

# CONTROL DIGITAL PREDICTIVO DE LA RESPUESTA SISMICA DE ESTRUCTURAS

J. RODELLAR

y

A. H. BARBAT

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.  
Universidad Politécnica de Cataluña, España.*

## RESUMEN

En este artículo se desarrolla un controlador digital predictivo con aplicación en la reducción de la respuesta sísmica de estructuras. Su eficacia se comprueba controlando la respuesta de un modelo de reactor nuclear.

## SUMMARY

In this paper a predictive digital controller is developed and applied to reduce the seismic response of structures. Its effectiveness is proved by controlling the response of a nuclear reactor model.

## INTRODUCCION

Una construcción emplazada en una zona sísmica presenta unos problemas de cálculo y diseño mucho más complejos que los que concurren en el caso de una estructura situada en una región no sísmica. Estos problemas pueden asociarse esencialmente a los siguientes aspectos:

- **Definición numérica de la acción sísmica.** Generalmente, para construcciones importantes, se definen dos niveles de acción sísmica, uno correspondiente al terremoto base de diseño (OBE) y otro correspondiente al terremoto base de verificación (SSE). El OBE se define como un terremoto medio que, con una probabilidad dada, puede ocurrir varias veces durante la vida de la construcción; ésta tiene que resistir sin sufrir daños estructurales importantes. El SSE es el terremoto más fuerte que, con cierta probabilidad, puede producirse una única vez durante la existencia de la construcción. El proyectista diseña la construcción de manera que ésta no se destruya bajo la acción del SSE, evitando así pérdidas de vidas y bienes materiales, aunque pueda sufrir daños de consideración en la estructura de resistencia. No obstante, existe cierta probabilidad de que la construcción esté sometida durante su existencia a terremotos con características distintas a las definidas.
- **Modelos.** Se requiere la formulación de modelos dinámicos y matemáticos que caractericen adecuadamente el comportamiento sísmico de la estructura real. Fenómenos que pueden tener una influencia importante sobre la respuesta sísmica, como por ejemplo la interacción suelo-estructura, deben estar incluidos en el modelo adaptado.

- **Métodos numéricos de cálculo.** La respuesta sísmica se calcula mediante procedimientos numéricos que tienen un notable grado de complejidad, requiriendo consecuentemente un mayor tiempo de ordenador.
- **Medidas específicas de diseño sísmico.** La elección del tipo de estructura adquiere una considerable importancia, dependiendo esencialmente de las características de la acción sísmica esperada y de la geología del emplazamiento de la estructura. Por otra parte, el diseño apropiado de los elementos estructurales, de las juntas y de los componentes no estructurales tiene un mayor peso específico que en el caso no sísmico. Por ejemplo, en el caso de estructuras de barras, las juntas pueden diseñarse de manera que, bajo la acción de un terremoto base de verificación, admitan una cierta deformación plástica con el objetivo de dotar a la estructura de una mayor capacidad de disipación de energía.

Cumpliendo los requisitos adecuados al cálculo y diseño sísmicos, es posible proyectar estructuras capaces de resistir movimientos sísmicos fuertes dentro de un margen razonable de seguridad. Hay que poner énfasis en el hecho de que dicho margen de seguridad está limitado a los terremotos de diseño y verificación considerados o a unos de características similares. Por otra parte, como se ha señalado anteriormente, incluso en el caso de que el terremoto ocurrido fuese similar al SSE previsto, la estructura sufriría desperfectos que necesitarían una posterior reparación.

Como una posible solución a estos problemas se ha considerado la utilización de sistemas de control pasivo. Estos sistemas constan de dispositivos aisladores que absorben parcialmente la energía inducida por el terremoto en la estructura<sup>1,2</sup>. La aplicación de controladores pasivos sigue siendo objeto de investigación hoy en día. Hay que reconocer, no obstante, que suponen únicamente una solución parcial al problema debido a que, por una parte, su acción de control es limitada y, por otra parte, su diseño es específico para las características del terremoto esperado en la zona.

Con el objeto de mejorar el rendimiento del control de la respuesta estructural se ha abierto en los últimos años una línea de investigación que desarrolla técnicas de control activo<sup>3,4</sup>. Los sistemas de control activo utilizan la información disponible de la respuesta estructural, tal como desplazamientos, velocidades y aceleraciones, para manipular automáticamente los valores de un conjunto de fuerzas de control de acuerdo con una metodología de control. El uso de sistemas de control automático no es nuevo en la técnica. En efecto, la Moderna Teoría de Control desarrollada a partir de los años sesenta es de aplicación habitual en dominios diversos tales como el aéreo, espacial, naval, militar, industrial, etc. Distintos métodos, tomados de la Moderna Teoría de Control, se han propuesto para el control activo de estructuras de ingeniería civil.

En este artículo se considera un método de control estructural predictivo. En primer lugar se describe la base conceptual del método predictivo en relación con otros métodos de control activo. Dentro de dicha base conceptual pueden desarrollarse distintos tipos de controladores predictivos. El objetivo de este artículo es diseñar un nuevo controlador predictivo y evaluar numéricamente su efectividad para reducir la respuesta sísmica de estructuras independientemente de las características de la acción sísmica. La evaluación numérica se lleva a cabo utilizando como ejemplo la estructura de un reactor nuclear. Dado que el método está concebido para ser implementado en un computador digital, para su formulación se utiliza un modelo matemático en tiempo discreto.

## EL METODO DE CONTROL PREDICTIVO EN EL CONTEXTO DEL CONTROL ESTRUCTURAL ACTIVO

Como se ha mencionado anteriormente, un sistema de control activo aplica a la estructura un conjunto de fuerzas cuyos valores se obtienen en función de ciertas características medidas o estimadas de la respuesta de la estructura. El objetivo de la aplicación de estas fuerzas de control es mejorar el comportamiento de la estructura frente a las acciones dinámicas que sobre ella actúan. Se han propuesto distintos métodos para formular una ley de control, es decir, una relación matemática entre la respuesta y las fuerzas de control.

Hasta el presente la teoría de control óptimo ha sido la más utilizada para el control de estructuras<sup>5-9</sup>. Los valores de las fuerzas de control se calculan minimizando una función de coste lineal cuadrática que incluye la respuesta estructural y las propias fuerzas de control. Esta minimización requiere la solución de una ecuación matricial de Ricatti<sup>10</sup>. El considerable esfuerzo de cálculo requerido para obtener esta solución puede limitar el interés práctico de este método si el modelo estructural es complejo. Para reducir las dimensiones de la ecuación matricial de Ricatti, se ha considerado en<sup>11</sup> el desacoplamiento modal de la respuesta, controlándose únicamente unos modos específicos.

Otro método de control utilizado en el control de estructuras ha sido el de asignación de polos. Este método está basado en una ley de control por realimentación cuya ganancia se escoge de modo que los polos del sistema controlado tengan unos valores estables especificados<sup>12</sup>. Aunque teóricamente existe al menos un conjunto de polos estables si el sistema es completamente controlable, puede no ser factible en la práctica hallar una localización de tales polos que garantice un buen rendimiento del control en el caso de una estructura de ingeniería civil. En este contexto, en<sup>13</sup> se usa un algoritmo de mínimos cuadrados para estimar la ganancia que reduzca la respuesta en un factor especificado a priori.

Los métodos mencionados anteriormente han sido formulados mediante modelos matemáticos en tiempo continuo. Recientemente se ha propuesto un nuevo método para el control estructural<sup>14</sup> cuya base, desde un punto de vista metodológico, está en el concepto de control predictivo. Desde un punto de vista práctico, el modelo matemático utilizado para calcular las fuerzas de control se ha formulado en tiempo discreto.

La estrategia de control en la que se basa el método predictivo consiste en aplicar sobre la estructura un conjunto de fuerzas de control, en cada instante de muestreo, de manera que la respuesta predicha de la estructura sea igual a una respuesta deseada. La aplicación práctica de esta estrategia implica una selección previa de las características de respuesta a controlar; éstas se denominan como salida de la estructura. Para traducir este concepto en un controlador se utiliza, según la Figura 1, un modelo predictivo y un bloque de consigna cuyas funciones específicas pueden resumirse en:

- El bloque de consigna genera, en cada instante de muestreo, una salida deseada futura que pertenezca a una trayectoria deseada. Para ello tiene en cuenta el estado final deseado de la estructura, denominado consigna, que generalmente es el estado de equilibrio.
- El modelo predictivo se usa para generar, en cada instante de muestreo, un conjunto de fuerzas de control que haga que la salida predicha sea igual a la deseada proporcionada por el bloque de consigna.

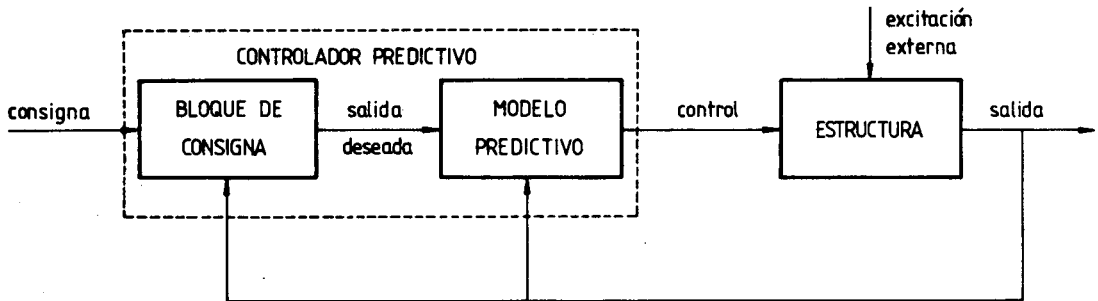


Fig. 1. – Esquema de bloques del controlador predictivo.

Este esquema está contenido en una metodología definida como sistema de control adaptativo-predictivo<sup>15,16</sup> y usada en distintas aplicaciones<sup>17,18</sup>. La aplicación del método predictivo al control de estructuras de edificación sometidas a acciones sísmicas se ha analizado en<sup>14,19</sup>.

### CONTROL DIGITAL ESTRUCTURAL

Las ecuaciones del movimiento de una estructura modelizada mediante el método de las masas concentradas, teniendo  $n$  grados de libertad y sometida a una aceleración del terreno  $a(t)$  en su base, pueden expresarse de la forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} a(t) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de dimensión  $n \times n$ ;  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  y  $\ddot{\mathbf{d}}$  son los vectores de desplazamientos, de velocidades y de aceleraciones, respectivamente, de dimensión  $n$ ;  $\mathbf{j}$  es el vector identidad de dimensión  $n$ .  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas de control de dimensión  $n$ . Su componente  $f_j$  es el valor de la fuerza de control aplicada por un actuador en el grado de libertad  $j$ . Si el número de actuadores es  $r \leq n$ , se puede escribir:

$$\mathbf{f} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{u}$  es un vector de control de dimensión  $r$  cuyos elementos son las fuerzas de control suministradas por los actuadores considerados;  $\mathbf{L}$  es una matriz de dimensión  $n \times r$  cuyos elementos son 1 o 0 dependiendo de la presencia o ausencia de un actuador en los distintos grados de libertad.

Definiendo un vector de estado  $\mathbf{x}$  de dimensión  $2n$  como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

la ec. (1) puede escribirse en la forma de modelo de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (4)$$

donde  $F$  es la matriz del sistema de dimensión  $2n \times 2n$ :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (5)$$

$G$  es la matriz de control de dimensión  $2n \times r$ :

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \quad (6)$$

y  $w$  es un vector de dimensión  $2n$ , que representa la excitación sísmica, definido por

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \end{bmatrix} a(t) \quad (7)$$

La ec. (4) describe la evolución temporal continua de la estructura controlada en una forma compacta y general.

Dado que la estructura se controla utilizando un computador, puede considerarse el esquema de control digital de la Figura 2. Según dicho esquema un conjunto

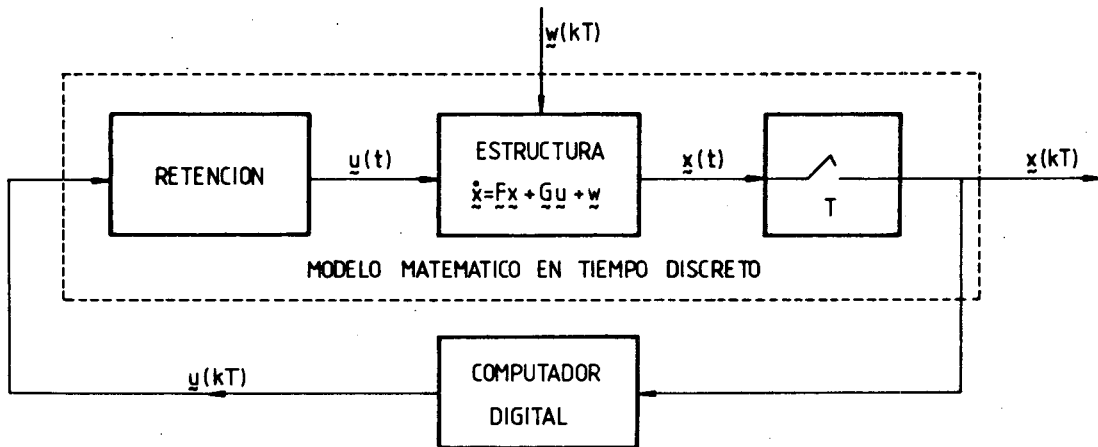


Fig. 2.— Esquema de control digital.

de sensores mide las características de respuesta en desplazamientos y velocidades que definen el vector  $x(kT)$  en cada instante  $kT$ , siendo  $T$  el período de muestreo y  $k$  un entero. En el caso en que los componentes de  $x(kT)$  no sean todos directamente medibles, puede diseñarse un observador para estimar las variables inaccesibles<sup>20</sup>. El computador calcula el vector de control  $u(kT)$  mediante cierto algoritmo. Un dispositivo de retención convierte la secuencia de vectores  $u(kT)$  en un vector de control continuo en el tiempo  $u(t)$  que se aplica a la estructura mediante un conjunto de actuadores.

### SIMULACION DE LA ESTRUCTURA CONTROLADA

La ecuación (4) tiene solución analítica que puede escribirse, para la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , en la forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{w}(\tau)d\tau \quad (8)$$

donde la matriz exponencial se define como

$$e^{\mathbf{F}(t-t_0)} = \mathbf{I} + \mathbf{F}(t-t_0) + \frac{\mathbf{F}^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\mathbf{F}^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots \quad (9)$$

Esta solución se utiliza para formular un modelo matemático en tiempo discreto de la estructura controlada según el esquema de la Figura 2. Dicho modelo consiste en una ecuación en diferencias que permita calcular, en cada instante de muestreo  $kT$ , el vector de estado  $\mathbf{x}(kT)$  en función del vector de control  $\mathbf{u}(kT)$  y del vector  $\mathbf{w}(kT)$  correspondiente a la excitación.

Expresando la ecuación (8) entre dos instantes de muestreo consecutivos, es decir tomando  $t_0 = kT$  y  $t = (k+1)T$ , se obtiene

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{F}(kT+T-\tau)}[\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{w}(\tau)]d\tau \quad (10)$$

El cálculo analítico de la integral de (10) requiere conocer la evolución temporal continua de  $\mathbf{u}(\tau)$  y  $\mathbf{w}(\tau)$  en el intervalo de muestreo  $[kT, kT+T]$ . La forma de  $\mathbf{u}(\tau)$  depende del tipo de dispositivo de retención considerado. Generalmente en el control digital se utiliza un dispositivo de orden cero; éste convierte la secuencia  $\mathbf{u}(kT)$  en una función escalonada que mantiene constante el valor de  $\mathbf{u}(kT)$  entre el instante  $kT$  y el consecutivo  $kT+T$ . Para la excitación hay que considerar un criterio que reconstruya  $\mathbf{w}(\tau)$  a partir de sus valores muestreados. Para el caso aquí considerado de la excitación sísmica es usual considerar una variación lineal de  $\mathbf{w}(\tau)$  entre instantes de muestreo. Con estas dos consideraciones, la expresión (10) puede escribirse finalmente, como se demuestra en<sup>21</sup>, en la forma:

$$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{P}_1\mathbf{w}(kT+T) + \mathbf{P}_2[\mathbf{w}(kT+T) - \mathbf{w}(kT)] \quad (11)$$

donde

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}T} \quad (12 a)$$

$$\mathbf{P}_1 = \int_0^T e^{\mathbf{F}\mu}\mathbf{G}d\mu \quad (12 b)$$

$$\mathbf{P}_2 = -\frac{1}{T} \int_0^T e^{\mathbf{F}\mu}\mathbf{G}\mu d\mu \quad (12 c)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_1\mathbf{G} \quad (12 d)$$

Un algoritmo para un cálculo eficiente de las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  y  $\mathbf{B}$  se detalla en<sup>21</sup>.

## CONTROLADORES PREDICTIVOS

De acuerdo con el esquema de la Figura 1, el diseño de un controlador predictivo requiere básicamente:

- La definición del modelo predictivo juntamente con la elección de las características de respuesta estructural (salida) a controlar.
- La formulación del bloque de consigna.

Dependiendo de las decisiones tomadas acerca de los dos puntos mencionados, pueden obtenerse distintos controladores predictivos. A continuación se describen dos controladores diferentes, uno desarrollado en<sup>19</sup> y otro que supone una extensión del anterior, cuyo diseño y evaluación numérica son las principales aportaciones de este artículo.

### Controlador 1

Se considera un modelo predictivo de la forma<sup>19</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (13)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  es el valor del vector de estado predicho, en el instante  $k$ , para el instante siguiente  $k+1$ . Hay que señalar que este modelo utiliza toda la información de la respuesta estructural contenida en el vector de estado  $\mathbf{x}(k)$ . El vector de excitación sísmica no está incluido, ya que ésta se considera como una perturbación desconocida (compárense las ecuaciones (11) y (13)).

Las características de respuesta a controlar son los desplazamientos correspondientes a determinados grados de libertad. Estos se organizan como las componentes de un vector de salida  $\mathbf{y}(k)$  que puede expresarse en función del vector de estado mediante la relación:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H} \mathbf{x}(k) \quad (14)$$

donde  $\mathbf{H}$  es una matriz de dimensiones apropiadas y cuyos elementos son 0 o 1 dependiendo de los desplazamientos que se desea controlar.

De acuerdo con las ecuaciones (13) y (14), la respuesta predicha en  $k$  para el instante  $k+1$  se expresa en la forma:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (15)$$

El vector de control  $\mathbf{u}(k)$  se obtiene, de acuerdo con los conceptos de control predictivo, imponiendo la condición:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) - \mathbf{y}_d(k+1) = \mathbf{0} \quad (16)$$

donde  $\mathbf{y}_d(k+1)$  es la salida deseada generada por el bloque de consigna. La salida deseada se elige de manera que pertenezca a una trayectoria de referencia que se

redefine, en cada instante de muestreo, a partir de la respuesta de la estructura y que alcanza la consigna siguiendo una ley especificada<sup>19</sup>. De la condición (16) se deduce finalmente la siguiente ley de control:

$$\mathbf{u}(k) = (\mathbf{HB})^{-1} \mathbf{y}_d(k+1) - (\mathbf{HB})^{-1} \mathbf{H A x}(k) \quad (17)$$

La realizabilidad de este controlador requiere obviamente, según se observa en la ecuación (17), que la matriz producto  $\mathbf{HB}$  sea cuadrada y no singular. La primera condición requiere que el número de fuerzas de control aplicadas (dimensión del vector  $\mathbf{u}(k)$ ) debe ser igual al número de desplazamientos controlados (dimensión del vector  $\mathbf{y}(k)$ ).

Por otra parte hay que señalar que este controlador utiliza el modelo (13) para predecir, en cada instante  $k$ , la respuesta estructural únicamente en el instante consecutivo  $k+1$ . Ello puede dar lugar a una acción de control excesiva en algunos casos<sup>14</sup>.

## Controlador 2

De forma más general que para el controlador anteriormente descrito, el modelo (13) puede utilizarse para predecir, en cada instante de muestreo  $k$ , una secuencia de vectores de estado en función de una secuencia de futuros vectores de control como indica la ecuación:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+j|k) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k+j-1|k) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(k+j-1|k) \quad (18)$$

$(j = 1, \dots, \lambda)$

donde  $\hat{\mathbf{x}}(k+j|k)$  ( $j=1, \dots, \lambda$ ) es la secuencia predicha de vectores de estado y  $\hat{\mathbf{u}}(k+j-1|k)$  ( $j=1, \dots, \lambda$ ) es la secuencia de vectores de control.  $\lambda$  es un entero convenientemente elegido que define el intervalo finito de predicción  $[k, k+\lambda]$ . Obviamente,  $\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{x}(k)$  y  $\hat{\mathbf{u}}(k|k) = \mathbf{u}(k)$ .

En el caso en que no hubiera cambio alguno en la acción de control posterior al instante  $k$ , la secuencia de vectores de estado predichos podría calcularse mediante (18) con la condición:

$$\hat{\mathbf{u}}(k|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \dots = \hat{\mathbf{u}}(k+\lambda-1|k) \quad (19)$$

Utilizando las ecuaciones (18) y (19), el vector de estado predicho para el instante  $k+\lambda$  puede expresarse, en función del vector de estado disponible en el instante  $k$ , en la forma<sup>14</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+\lambda|k) = \alpha(\lambda) \mathbf{x}(k) + \beta(\lambda) \mathbf{u}(k|k) \quad (20)$$

donde  $\alpha(\lambda)$  y  $\beta(\lambda)$  son matrices definidas por:

$$\alpha(\lambda) = \mathbf{A}^\lambda \quad (21 \text{ a})$$

$$\beta(\lambda) = (\mathbf{A}^{\lambda-1} + \mathbf{A}^{\lambda-2} + \dots + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{B} \quad (21 \text{ b})$$



En el diseño de este controlador se considera el vector de estado completo como salida de la estructura. El vector de control  $\mathbf{u}(k)$  se obtiene imponiendo la condición de que sea mínima la expresión:

$$J = [\hat{\mathbf{x}}(k+\lambda k) - \mathbf{x}_d(k+\lambda)]^T \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{x}}(k+\lambda k) - \mathbf{x}_d(k+\lambda)] \quad (22)$$

donde  $\mathbf{x}_d(k+\lambda)$  es la salida deseada para el instante  $k+\lambda$  generada por el bloque de consigna y cuyas componentes son los valores deseados de las componentes del vector de estado para  $k+\lambda$ .  $\mathbf{Q}$  es una matriz de peso definida no negativa. La condición (22) es una generalización de la expresada en (16).

El vector de control que minimiza  $J$  se deduce a partir de la siguiente condición sobre el gradiente de  $J$ :

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{u}}(k|k)} \right|_{\hat{\mathbf{u}}(k|k) = \mathbf{u}(k)} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Sustituyendo la expresión (20) en (22) e imponiendo la condición (23) se obtiene:

$$\mathbf{0} = \beta(\lambda)^T \mathbf{Q} [\alpha(\lambda) \mathbf{x}(k) + \beta(\lambda) \mathbf{u}(k) - \mathbf{x}_d(k+\lambda)] \quad (24)$$

de donde puede escribirse finalmente:

$$\mathbf{u}(k) = \eta(\lambda) \mathbf{x}_d(k+\lambda) - \eta(\lambda) \alpha(\lambda) \mathbf{x}(k) \quad (25)$$

siendo  $\eta(\lambda)$  la matriz definida por:

$$\eta(\lambda) = [\beta(\lambda)^T \mathbf{Q} \beta(\lambda)]^{-1} \beta(\lambda)^T \mathbf{Q} \quad (26)$$

El bloque de consigna puede ser formulado de manera que genere, en cada instante  $k$ , una salida deseada  $\mathbf{x}_d(k+\lambda)$  perteneciente a una trayectoria de referencia<sup>14,19</sup> definida por:

$$\mathbf{x}_r(k+j) = \varrho_1 \mathbf{x}_r(k+j-1) + \varrho_2 \mathbf{x}_r(k+j-2) \quad (27)$$

Esta trayectoria se redefine, en cada instante  $k$ , a partir de la respuesta estructural correspondiente a dicho instante  $k$  y al previo  $k-1$ , evolucionando hacia la consigna (el punto de equilibrio en este caso) de acuerdo con una dinámica especificada por las matrices  $\varrho_1$  y  $\varrho_2$ . Dicha redefinición implica que, en cada instante  $k$ :

$$\mathbf{x}_r(k) = \mathbf{x}(k) \quad (28 \text{ a})$$

$$\mathbf{x}_r(k-1) = \mathbf{x}(k-1) \quad (28 \text{ b})$$

La salida deseada es  $\mathbf{x}_d(k+\lambda) = \mathbf{x}_r(k+\lambda)$ , la cual se calcula mediante (27) y (28).

EJEMPLO NUMERICO

Se considera el reactor de una central nuclear esquemáticamente representado en la Figura 3.a. En su modelo dinámico (Figura 3.b) se consideran tres grados de libertad para las traslaciones y tres para los giros. Además dicho modelo incluye de una manera simplificada el efecto de la interacción suelo-estructura, atribuyendo a la cimentación únicamente dos grados de libertad: traslación y giro. La estructura se modeliza mediante elementos de barra, utilizándose para el terreno un elemento con características específicas. Las posiciones de las masas concentradas del modelo (ver Figura 3.b) son:  $h_1 = 14$  m,  $h_2 = 9$  m y  $h_3 = 9$  m. Las masas correspondientes a los grados de libertad de traslación son:  $m_1 = 7 \times 10^5$  Kg,  $m_2 = 4.5 \times 10^5$  Kg y  $m_3 = 2.2 \times 10^5$  Kg, mientras que los momentos de inercia correspondientes a los giros son  $1.2 \times 10^7$  Kg m<sup>2</sup>,  $0.65 \times 10^7$  Kg m<sup>2</sup> y  $0.3 \times 10^7$  Kg m<sup>2</sup> respectivamente. Los momentos de inercia de las secciones de los tres elementos de barra son, respectivamente,  $55.0$  m<sup>4</sup>,  $7.0$  m<sup>4</sup> y  $7.0$  m<sup>4</sup>. El módulo de Young del material es de  $3 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Para el terreno se considera un módulo de Young de  $7.5 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup> y un coeficiente de Poisson de 0.3. Estos datos se utilizan para modelizar el terreno mediante un elemento de barra equivalente cuya longitud y momento de inercia se calculan en función del diámetro de la cimentación; éste tiene un valor de 8 m.

El controlador 2 se define en este ejemplo por la longitud del intervalo de predicción ( $\lambda$ ) y por la matriz de peso  $\mathbf{Q}$  que se toma de la forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{Q}_D$  es una matriz unidad de dimensión  $6 \times 6$ . El bloque de consigna toma como salida deseada para el instante  $k+\lambda$  un valor nulo, lo que corresponde a la posición de equilibrio de la estructura. Se considera una única fuerza de control aplicada en la posición correspondiente al grado de libertad 5.

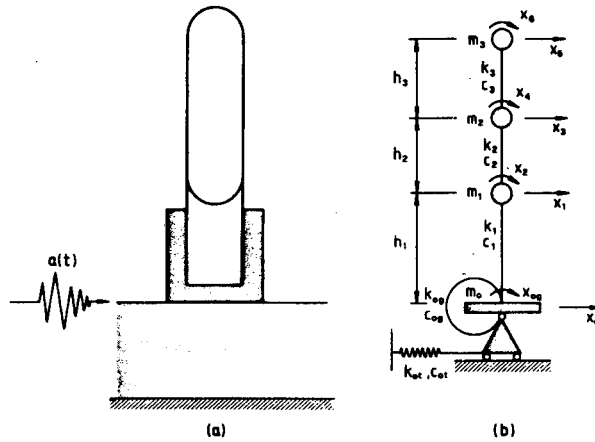


Fig. 3.— Reactor de central nuclear: (a) estructura; (b) modelo dinámico que considera interacción suelo-estructura.

En este ejemplo se estudia la incidencia que las características de la excitación sísmica (concretamente la frecuencia dominante) pueden tener sobre el rendimiento del controlador 2 anteriormente descrito. Para ello se considera una excitación de tipo armónico de amplitud  $2.45 \text{ m/seg}^2$  con el fin de realizar un barrido de frecuencias. Las Figuras 4-6 muestran, respectivamente, la respuestas máximas en desplazamientos, velocidades y aceleraciones para el grado de libertad 5, tanto en ausencia de control (gráficas 1) como en el caso en que se aplica el controlador (gráficas 2). Se fija para el mencionado controlador un valor  $\lambda = 5$ .

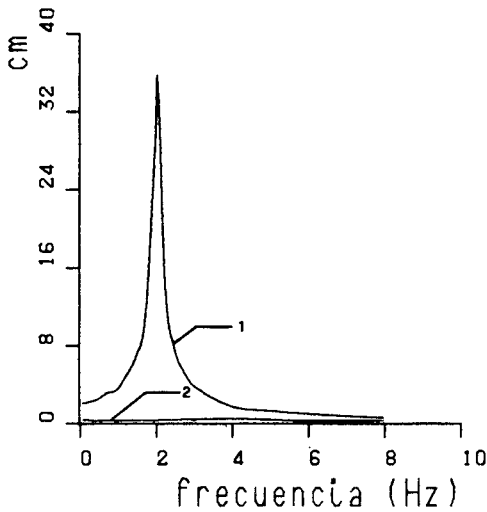


Fig. 4.— Respuesta máxima en desplazamientos: (1) sin control; (2) con control.

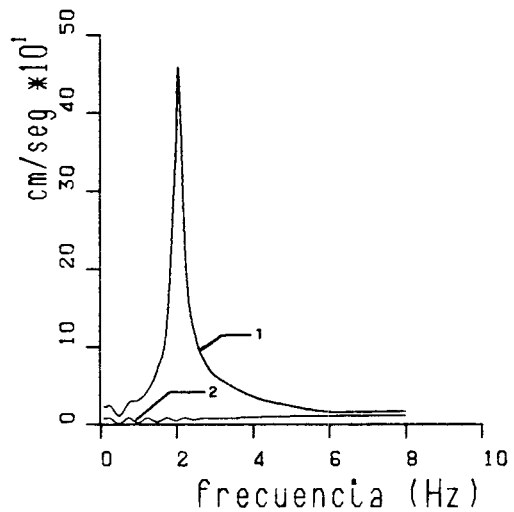


Fig. 5.— Respuesta máxima en velocidades: (1) sin control; (2) con control.

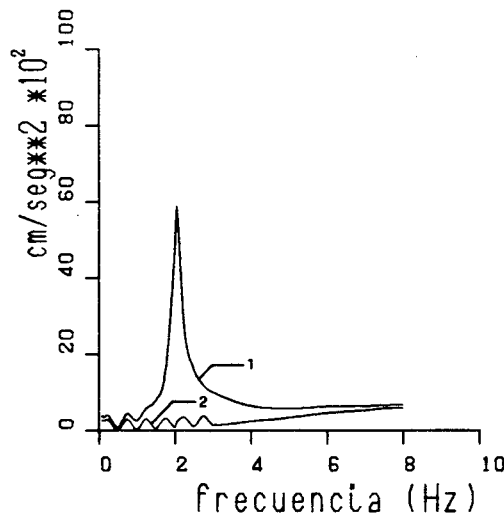


Fig. 6.— Respuesta máxima en aceleraciones: (1) sin control; (2) con control.

Por otra parte en el ejemplo se ilustra también el efecto que el valor del parámetro  $\lambda$  tiene sobre la respuesta controlada y la propia acción de control. El análisis se efectúa para tres acelerogramas generados artificialmente. En la Figura 7 se representan,

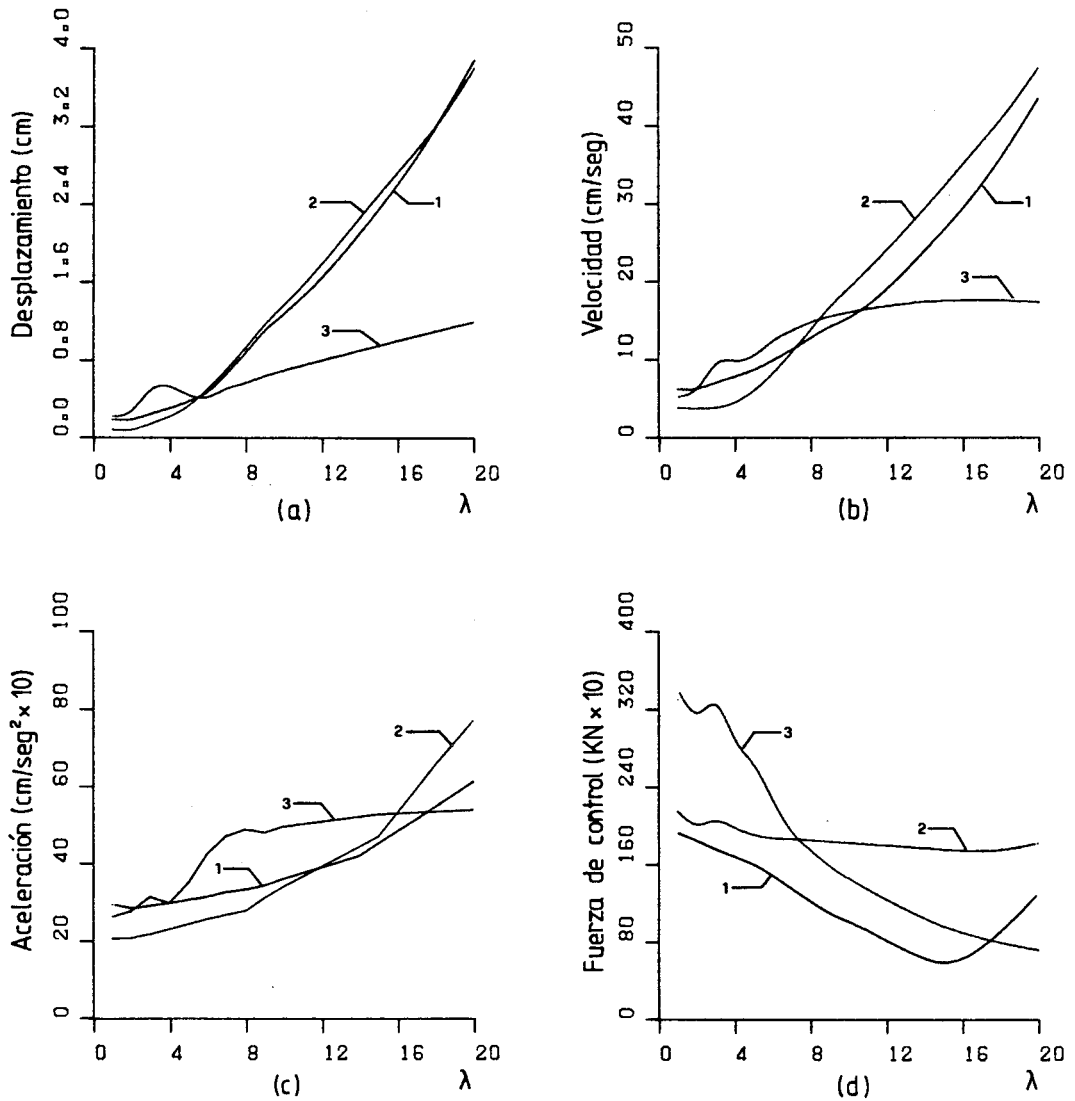


Fig. 7.— Variación de la respuesta máxima y de la fuerza máxima de control en función de  $\lambda$  para el grado de libertad 5: (a) respuesta en desplazamientos; (b) respuesta en velocidades; (c) respuesta en aceleraciones; (d) fuerza de control. Frecuencia de la excitación: (1) 0.75 Hz; (2) 2.05 Hz; (3) 5 Hz.

en función del valor de  $\lambda$ , los valores máximos de las respuestas en desplazamientos, velocidades y aceleraciones para el grado de libertad 5, así como el valor máximo de la fuerza de control. Los tres acelerogramas a que corresponden las gráficas

de la mencionada figura se han generado con frecuencias dominantes de 0.75 Hz (gráficas 1), 2.05 Hz (gráficas 2) y 5 Hz (gráficas 3).

Comparando las gráficas 1 y 2 de las Figuras 4-6, puede concluirse que el controlador consigue una reducción significativa de la respuesta de la estructura dentro del rango de frecuencias considerado. Además la reducción es particularmente notable en el entorno de la frecuencia fundamental de la estructura.

Una característica general que puede observarse en las Figuras 7.a, 7.b y 7.c es el incremento de la respuesta máxima al aumentar la longitud del intervalo de predicción. No obstante, este incremento lleva asociada una disminución en el valor máximo de la fuerza de control como muestra la Figura 7.d. Esto se debe a que, debido a la estrategia de control utilizada, un intervalo de predicción corto impone una acción de control más enérgica. En consecuencia es conveniente fijar un valor de  $\lambda$  que establezca un compromiso entre el factor de reducción de la respuesta y la acción de control aplicada. Obviamente un valor excesivo de  $\lambda$  puede dar lugar a un control no satisfactorio e incluso llevar a una respuesta inestable.

La Figura 8 representa el acelerograma generado con una frecuencia predominante de 2.05 Hz que coincide con la fundamental de la estructura. La historia temporal de la respuesta en desplazamientos no controlada del grado de libertad 5 se muestra en la Figura 9; la respuesta controlada, usando un valor de  $\lambda = 5$ , se representa en la Figura 10. La fuerza de control correspondiente aparece en la Figura 11. Comparando las Figuras 9 y 10, puede apreciarse una notable reducción de la respuesta controlada con una fuerza de control razonable (Figura 11).

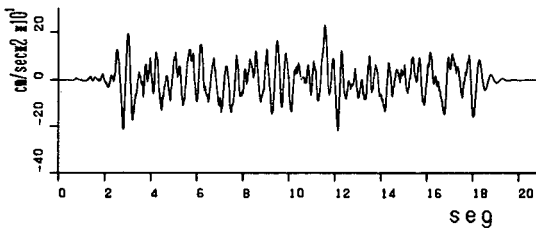


Fig. 8.— Aceleración del terreno en la base de la estructura.



Fig. 9.— Historia temporal de la respuesta en desplazamientos no controlada para el grado de libertad 5.

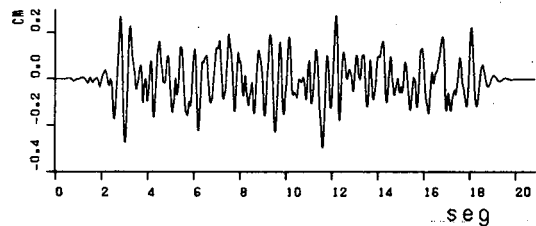


Fig. 10.— Historia temporal de la respuesta en desplazamientos controlada para el grado de libertad 5.

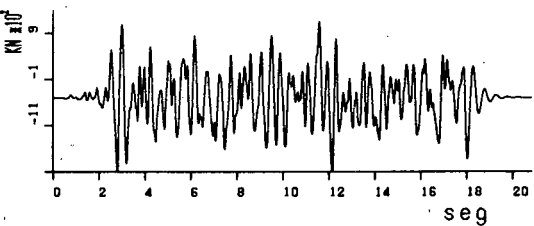


Fig. 11.— Evolución temporal de la fuerza de control.

### CONCLUSIONES

Dentro del método de control predictivo se ha diseñado en este artículo un controlador digital para el control activo de la respuesta sísmica de estructuras. Para calcular

la fuerza de control, se ha formulado un modelo de estado en tiempo discreto que predice la respuesta estructural en un intervalo de tiempo finito. El algoritmo de cálculo es sencillo en su formulación y eficiente desde el punto de vista numérico. Su aplicación al control de un modelo de estructura de reactor nuclear ha demostrado que el controlador es eficaz en la reducción de la respuesta dentro de un rango de la frecuencia de la excitación que presenta interés en la ingeniería sísmica.

#### REFERENCIAS

1. J. M. Kelly. "Control devices for earthquake-resistant structural design". En *Structural Control*, editado por H. H. Leipholtz, editorial North-Holland, 391-413 (1980).
2. M. A. Bhatti, K. S. Pister y E. Polak. "Optimization of control devices in base isolation systems for aseismic design". En *Structural Control*, editado por H. H. Leipholtz, editorial North-Holland, 127-138 (1980).
3. W. Zuk. "Kinetic structures". *Civil Engineering ASCE*, vol. 38, n.º 12, 62-64 (1968).
4. J. T. P. Yao. "Concept of structural control". *J. Structural Div. ASCE*, vol. 98, n.º ST7, 1567-1574 (1972).
5. J. N. Yang. "Application of optimal control theory to civil engineering structures". *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, vol. 101, n.º EM6, 819-838 (1975).
6. M. Abdel-Rohman y H. H. Leiphold. "A general approach to active structural control". *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, vol. 105, n.º EM6, 1007-1023 (1979).
7. M. Abdel-Rohman y H. H. Leipholtz. "Automatic active control of structures". En *Structural Control*, editado por H. H. Leipholtz, editorial North-Holland, 29-56 (1980).
8. J. Chang y T. T. Soong. "Structural control using active tuned mass dampers". *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, vol. 106, n.º EM6, 1091-1098 (1980).
9. J. P. Wolf y P. M. Madden. "An assesment of the application of active control to reduce the seismic response of nuclear power plants". *Nuclear Eng. Des.* 66, 383-397 (1981).
10. A. Sage y C. White. *Optimum System Control*. Editorial Prentice-Hall (1979).
11. L. Meirovitch y L. M. Silverberg. "Control of structures subjected to seismic excitation". *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, vol. 109, n.º 2, 604-618 (1983).
12. M. Abdel-Rohman y H. H. Leipholtz. "Structural control by pole assignment method". *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, vol. 104, n.º EM5, 1159-1175 (1978).
13. M. A. Basharkhah y J. T. P. Yao. "Some recent developments in structural control". *J. Struct. Mech.*, 11(2), 137-152 (1983).
14. J. Rodellar y J. M. Martín Sánchez. "Predictive structural control". Pendiente de publicación.
15. J. M. Martín Sánchez. "A new solution to adaptive control". *Proc. IEEE*, vol. 64, n.º 8, 1209-1218 (1976).
16. J. M. Martín Sánchez. "A globally stable APCS in the presence of bounded noises and disturbances". *IEEE Trans. Autom. Con.*, vol. AC-29, n.º 5, 461-464 (1984).
17. J. M. Martín Sánchez. "Realizaciones del control adaptativo-predictivo en los dominios industrial y aerospacial". *Mundo Electrónico*, 71, 13-19 (1978).
18. J. Rodellar y J. M. Martín Sánchez. "Nueva dimensión del control industrial: el controlador SCAP". *Mundo Electrónico*, 100, 83-90 (1980).
19. J. Rodellar y A. H. Barbat. "Digital control of structures subjected to seismic actions". *Proc. of Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*. A. A. Balkema Publ. Vol. 1, 281-290 (1985).
20. A. E. Bryson y Y. C. Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publ. Corp. (1975).
21. J. Rodellar y A. H. Barbat. "Numerical analysis of the seismic response. A state space approach". *Proc. of Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*. A. A. Balkema Publ. Vol. 1, 273-279 (1985).