QÜESTIIÓ, vol. 24, 3, p. 425-448, 2000

VARIABLES FINITAS CONDICIONALMENTE ESPECIFICADAS

ROMÁN PÉREZ-VILLALTA
Universidad de Sevilla*

En este trabajo se estudia la existencia y unicidad de vectores bidimensionales de variables discreta con recorrido finito, cuando se fijan sus distribuciones condicionadas. Para ello, tras repasar la literatura existente sobre el tema, proporcionamos diversos resultados que relacionan diversos temas de álgebra matricial, especialmente la descomposición singular, con el problema que nos ocupa.

Finite conditionally specified variables

Palabras clave: Distribuciones condicionadas, especificación condicional, rango de una matriz, descomposición singular, cadenas de Markov

Clasificación AMS (MSC 2000): 60E05, 62E10

* Facultad de Económicas y Empresariales. Dpto. de Economía Aplicada I. Avda. Ramón y Cajal, 1. 41018 Sevilla. España. villalta@cica.es

– Recibido en diciembre de 1999.
– Aceptado en septiembre de 2000.

1. INTRODUCCIÓN

Dado un vector aleatorio bidimensional (X,Y) podemos especificar su función de cuantía o densidad de diversas formas: dar directamente esa función, dar una marginal y una condicionada (en la misma o distinta componente), dar dos marginales... Dependiendo del caso la densidad o cuantía del vector existirá o no y, además, será única o no.

El caso en el que se dan dos condicionadas, objeto de este trabajo, ha sido estudiado extensamente por Arnold y Press (1989) y Arnold, Castillo y Sarabia (1992) aunque se pueden nombrar trabajos pioneros como Gourieroux y Monfort (1979) y Abrahams y Thomas (1984). Señalemos antes de continuar que la lista anterior no cubre toda la literatura al respecto.

Respecto a las aplicaciones, cabe destacar la construcción de modelos bivariantes (p.e. Arnold, Castillo y Sarabia, 1992), estudios relativos a la convergencia del algoritmo del muestreo de Gibbs (Casella y George, 1992 y Casella, 1996), en Estadística Bayesiana (Arnold, Castillo y Sarabia, 1996 y Basulto, 1995) entre otras.

Este trabajo repasa los resultados existentes para el caso en que las variables aleatorias son finitas y aporta algún resultado adicional utilizando elementos de cálculo matricial y ejemplos que clarifican los distintos métodos expuestos

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y NOTACIÓN

Sean dos matrices $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ y $\mathbf{B} = (b_{i,j})$ de orden $L \times M$ que verifican $a_{i,j} \geq 0, b_{i,j} \geq 0$ $\forall i = 1,\dots,L; \forall j = 1,\dots,M$ y además

$$\sum_{i=1}^{L} a_{i,j} = 1, \sum_{j=1}^{M} b_{i,j} = 1.$$

Esto es, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}^t$ son matrices estocásticas por columnas. La cuestión a dilucidar es, bajo que condiciones dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, de dimensiones $L \times M$, en las condiciones anteriores, pueden ser consideradas distribuciones condicionadas de cierto vector aleatorio (X,Y) de variables discretas con recorrido finito. Esto es, si $x_1, x_2, \cdots, x_L$ son los posibles valores de X e $y_1, y_2, \cdots, y_M$ los de Y, cuando

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= P[X = x_i | Y = y_j] && i = 1 \dots L \\ b_{i,j} &= P[Y = y_j | X = x_i] && j = 1 \dots M \end{aligned}$$

Equivalentemente, bajo qué condiciones existen dos vectores τ y η, de dimensiones L y M respectivamente, no negativos y de forma que la versión normalizada (la suma de coordenadas unidad) de τ y η sean las distribuciones marginales correspondientes.

Nótese que podemos suponer $\tau_i b_{i,j} = \eta_j a_{i,j} \quad i = 1,\ldots,L \quad j = 1,\ldots,M$, ya que si un τ_i o un η_j es nulo, el valor x_i o y_j tiene todas sus probabilidades nulas y puede ser eliminado del problema.

Esta primera cuestión recibe el nombre de problema de compatibilidad y, en ese contexto, las matrices **A** y **B** se denominan candidatas a distribuciones condicionadas, y además, si la respuesta al problema es afirmativa se dice que **A** y **B** son compatibles.

Un segundo problema a tratar es, supuesto que existan, la unicidad de estas variables X e Y o vectores τ y η.

Para las matrices **A** y **B** definimos los conjuntos

$$N_A = \left\{(i,j) : a_{i,j} > 0\right\}, N_B = \left\{(i,j) : b_{i,j} > 0\right\}$$

Cuando se tenga $N_A = N_B$ los denotaremos, indistintamente, por N.

3. COMPATIBILIDAD

Un primer resultado sobre la compatibilidad de distribuciones puede encontrarse en Arnold y Press (1989) cuya traducción a matrices es el siguiente.

Teorema 1. *(Arnold y Press, 1989) Dos matrices* **A** *y* **B** *en las condiciones de la sección anterior son compatibles si y sólo si $N_A = N_B = N$ y además existen dos vectores,* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_L)$ *y* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_M)$ *tales que*

$$c_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}} = u_i v_j; \qquad \forall (i,j) \in N$$

La primera condición refleja el hecho de que las cuantías condicionadas se anulan en los mismos puntos que coinciden con los puntos en los que se anula la función de cuantía conjunta. Por su parte, la segunda condición hace referencia a la relación entre marginales y condicionadas $\tau_i b_{i,j} = \eta_j a_{i,j} \quad i = 1,\ldots,L \quad ; j = 1,\ldots,M$ de esta forma $u_i = \tau_i$ y $v_j = 1/\eta_j$.

En el caso que nos ocupa, variables finitas, es posible utilizar resultados de álgebra matricial para analizar la compatibilidad de las matrices **A** y **B**. En efecto, supongamos que $N = \{1,\ldots,L\} \times \{1,\ldots,M\}$ y denotemos por **C** la matriz de elementos $c_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{b_{i,j}}$, en esas condiciones se tiene el siguiente

Teorema 2. *En las condiciones anteriores* **A** *y* **B** *son compatibles si y sólo si el rango de* **C** *es uno.*

Demostración

Si rango de $\mathbf{C}$ es uno, existen dos matrices ortogonales $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ de órdenes L y M respectivamente de forma que $\mathbf{C} = \mathbf{U}\sum\mathbf{V}^t$ donde $\sum$ es una matriz $L \times M$ cuyo elemento $(1,1)$ es no nulo y el resto nulos. Obsérvese que esto no es más que la descomposición en valores singulares de la matriz $\mathbf{C}$ y el elemento no nulo de $\sum$ el único valor singular de $\mathbf{C}$ (ver p.e. Schott, 1997). Dada la forma de la matriz $\sum$ podemos escribir $\mathbf{C} = \mathbf{u}\sigma\mathbf{v}^{\mathbf{t}}$ donde u y v son las primeras columnas de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ respectivamente. Así $c_{i,j} = u_i\sigma\, v_j, \forall\,(i,j) \in N$, y por tanto, incluyendo el valor singular en uno de los vectores $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$, se tiene la factorización $c_{i,j} = u_i v_j, \forall(i,j) \in N$.

Por otra parte, puesto que u es autovector de $\mathbf{CC}^t$, que es no negativa, y está asociado al autovalor $\sigma > 0$, puede ser elegido con coordenadas no negativas y puesto que $\mathbf{v} \propto \mathbf{C}^t\mathbf{u}$ también es no negativo, las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son compatibles y, en este caso, una adecuada elección de las distribuciones marginales es

$$P\left[X = x_i\right] = \tau_i = \frac{u_i}{\sum\limits_{i=1}^{L} u_i} \qquad i = 1,\ldots,L$$

$$P\left[Y = y_j\right] = \eta_j = \frac{v_j^{-1}}{\sum\limits_{j=1}^{M} v_j^{-1}} \qquad j = 1\ldots.,M$$

Recíprocamente, si las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son compatibles, el rango de $\mathbf{C}$ es la unidad pues, si tomamos un menor de dimensión dos cualquiera, ”

$$\begin{vmatrix} c_{i,j} & c_{i,k} \\ c_{l,j} & c_{l,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{a_{i,j}}{b_{i,j}} & \dfrac{a_{i,k}}{b_{i,k}} \\ \dfrac{a_{l,j}}{b_{l,j}} & \dfrac{a_{l,k}}{b_{l,k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i v_j & u_i v_k \\ u_l v_j & u_l v_k \end{vmatrix} = u_i v_j u_l v_k - u_i v_k u_l v_j = 0$$

$\forall i,l = 1,\ldots,L$ y $\forall j,k = 1,\ldots,M$.

□

El resultado anterior puede encontrarse, bajo otra perspectiva en Arnold y Gokhale (1994) y Arnold, Castillo y Sarabia (1999).

Observemos que, en este caso, la condición de compatibilidad vía descomposición singular se simplifica notablemente pues, como observan Arnold y Press (1989) y Arnold, Castillo y Sarabia (1992), se verifica que:

$$c_{i,j}c_{..} = c_{i.}c_{.j} \quad \forall\,(i,j) \in N$$

donde

$$c_{..} = \sum_{i,j} c_{i,j}, \quad c_{,j} = \sum_i c_{i,j} \quad \text{y} \quad c_{i.} = \sum_j c_{i,j}$$

y en consecuencia: $u_i \propto c_{i.}$ y $v_j \propto c_{.j}, \quad \forall (i,j) \in N$

Ejemplo 1. *Consideremos las matrices:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

La matriz de cocientes es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{15}{10} & \frac{15}{20} \\ \\ \frac{24}{20} & \frac{6}{10} \end{bmatrix} = \frac{3}{20} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix},$$

tiene rango unidad y por tanto $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son compatibles. Luego* $v_1 \propto \frac{15}{10} + \frac{24}{20} = \frac{54}{20}$ *y* $v_2 \propto \frac{15}{20} + \frac{6}{10} = \frac{27}{20}$. *Por otra parte,* $u_1 \propto \frac{15}{10} + \frac{15}{20} = \frac{45}{20}$ *y* $u_2 \propto \frac{24}{20} + \frac{6}{10} = \frac{36}{20}$*: Podemos tomar por tanto* $(v_1, v_2) \propto (2,1)$ y $(u_1, u_2) \propto (5,4)$

El producto $(5,4)^t(2,1)$ *debe ser una matriz que, elemento a elemento, es proporcional a* $\mathbf{C}$.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} [2,1] = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando esta matriz por $\dfrac{3}{20}$ *se obtiene* $\mathbf{C}$.

Ejemplo 2. *Las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

son incompatibles pues la matriz de cocientes $\mathbf{C}$ *tiene, claramente, rango dos:*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{15}{10} & \frac{15}{20} \\ \\ \frac{18}{20} & \frac{12}{10} \end{bmatrix} = \frac{3}{20} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Estudiamos el caso general. Supongamos que $N_{\mathbf{A}} = N_{\mathbf{B}} = N$ (lo contrario indica incompatibilidad), pero N distinto del producto cartesiano $\{1, \ldots, L\} \times \{1, \ldots, M\}$.

Observemos que, en este caso, la matriz de los cocientes **C** no está completamente determinada por las matrices candidatas a distribuciones condicionadas **A** y **B**. Así si, por ejemplo, (Arnold Castillo y Sarabia 1992)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 3/14 \\ 0 & 1/4 & 4/14 \\ 5/6 & 3/4 & 7/14 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 5/18 & 6/18 & 7/18 \end{bmatrix}$$

Los elementos c_{12} y c_{21} de **C** están indeterminados, al ser cociente de dos elementos nulos. La observación fundamental es que, bajo la hipótesis de compatibilidad, esos elementos indeterminados de **C** están definidos, pues son cocientes de probabilidades marginales no nulas (pues, en otro caso el elemento se elimina), y pueden ser determinados, bajo ciertas condiciones, a partir de **A** y **B**.

Teorema 3. *Si* **A** *y* **B** *determinan la distribución conjunta de un vector* (X,Y) *discreto y finito entonces, la matriz* **C** *puede completarse de forma que tenga rango unidad.*

Demostración

Para cada $(i,j) \notin N$ nos basta tomar

$$c_{i,j} = \frac{P[X = x_i]}{P[Y = y_j]} = \frac{\tau_i}{\eta_j}$$

Obsérvese que estos $c_{i,j}$ están definidos pues $P[Y = y_j] \neq 0$ pues, en otro caso, y_j se habría eliminado del problema.

□

La utilidad del resultado que acabamos de obtener queda patente en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3. *Considérese*

$$\mathbf{A} = 10^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = 10^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces la matriz **C** *viene dada (parcialmente) por*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 1/6 & 1 \\ * & 1 & 1 & 1/2 \\ 5/4 & * & 2/3 & 4/3 \\ 4 & 2 & 5/3 & 3/4 \end{bmatrix}$$

A *y* **B** *son incompatibles pues, por ejemplo*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1/6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Nótese que si **C** puede completarse de forma que tenga rango unidad podremos aplicarle el Teorema 2 y tenemos el siguiente

Corolario 1. *En las condiciones anteriores si* **C** *puede completarse de forma que tenga rango unidad entonces,* **A** *y* **B** *son compatibles.*

Utilizaremos datos de Arnold, Castillo y Sarabia, (1992) para ilustrar el uso del corolario que acabamos de obtener.

Ejemplo 4. *Si tomamos las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{3}{14} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{14} \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} & \frac{7}{14} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{18} & \frac{6}{18} & \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & * & \frac{4}{14} \\ * & \frac{3}{4} & \frac{6}{14} \\ \frac{18}{6} & \frac{9}{4} & \frac{18}{14} \end{bmatrix}$$

Haciendo

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{6} & c_{12} \\ \frac{18}{6} & \frac{9}{4} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} c_{21} & \frac{3}{4} \\ \frac{18}{6} & \frac{9}{4} \end{vmatrix} = 0$$

Obtenemos $c_{12} = \dfrac{1}{2}$ *y* $c_{21} = 1$ *y así la matriz* $\mathbf{C}$ *es de rango unidad.*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{2} & \frac{4}{14} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{6}{14} \\ \frac{18}{6} & \frac{9}{4} & \frac{18}{14} \end{bmatrix}$$

y aplicando resultados anteriores se tiene $\mathbf{u} \propto \left(\frac{61}{42}, \frac{61}{28}, \frac{183}{28}\right)$ *y* $\mathbf{v} \propto \left(\frac{28}{6}, \frac{14}{4}, \frac{28}{14}\right)$.

En ocasiones, no es posible completar $\mathbf{C}$ de manera única y de forma que tenga rango unidad.

Ejemplo 5. *Consideramos las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz (parcial) de cocientes es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} * & \frac{5}{6} & * & \frac{5}{3} \\ 1 & * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{2}{3} & * & \frac{4}{3} \\ 2 & * & 3 & * \end{bmatrix}$$

Si hacemos $c_{11} = \lambda \neq 0$ *obtenemos*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda & \frac{5}{6} & \frac{\lambda}{2} & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{5}{6\lambda} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3\lambda} \\ \frac{4}{5}\lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{5}\lambda & \frac{4}{3} \\ 2 & \frac{5}{3\lambda} & 1 & \frac{10}{3\lambda} \end{bmatrix}$$

sin más que imponer que tenga rango 1. Para cada valor de λ se obtienen distintas **C** *y por tanto esta matriz no se puede completar de manera única de forma que tenga rango unidad. Además, para cada λ se tendrán distintos vectores* **u** *y* **v**. *En este caso,*

$$\mathbf{u} \propto \left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\lambda, \frac{3}{2}+\frac{5}{2\lambda}, 2+\frac{6}{5}\lambda, 3+\frac{5}{\lambda}\right) \quad \mathbf{v} \propto \left(3+\frac{9}{5}\lambda, \frac{3}{2}+\frac{1}{\lambda}\frac{5}{2}, \frac{3}{2}+\frac{9}{10}\lambda, 3+\frac{5}{\lambda}\right)$$

Otro resultado de interés, debido a Gupta y Vargas (1990), que da una condición necesaria y suficiente para el caso en que las matrices **A** y **B** tienen una fila (pongamos i_0) y una columna (por ejemplo j_0) de elementos no nulos. Formalmente podemos enunciarlo en los siguientes términos:

Teorema 4. *(Gupta y Vargas, 1990) Sean* **A** *y* **B** *dos matrices en las condiciones habituales $N_A = N_B = N$ y supongamos que $\exists (i_0, j_0) \in N$ tal que, para cada $j = 1, \ldots, M$ $(i_0, j) \in N$ y que para cada $i = 1, \ldots, L$ $(i, j_0) \in N$. Entonces,* **A** *y* **B** *son compatibles si y sólo si*

$$b_{ij}\frac{a_{i,j_0}}{b_{i,j_0}} = \kappa\, a_{i,j}\frac{b_{i_0,j}}{a_{i_0,j}} \quad \forall (i,j) \in N$$

donde κ es una constante que depende únicamente de i_0 y de j_0 y es distinta para cada elección de estos índices.

Puede comprobarse que si **A** y **B** son compatibles la igualdad se tiene tomando

$$\kappa = \left[\frac{\sum_{j=1}^{M} c_{i_0,j}^{-1}}{\sum_{i=1}^{L} c_{i,j_0}}\right]^{-1}$$

mientras que el recíproco se obtiene tomando la distribución conjunta

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \kappa' b_{i,j}\frac{a_{i,j_0}}{b_{i,j_0}} && \text{para}\,(i,j) \in N \\ p_{i,j} &= 0 && \text{para}\,(i,j) \notin N \end{aligned}$$

siendo

$$\kappa' = \left[\sum_{i=1}^{L} c_{i,j_0}\right]^{-1}$$

Ejemplo 6. *Consideramos las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Entonces $N_A = N_B = N = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

La elección de i_0 *y* j_0 *en este caso ofrece dos posibilidades.* $(i_0, j_0) = (3,3)$ *o bien* $(i_0, j_0) = (3,4)$*; tomemos la primera posibilidad*

$$\kappa = \left[\frac{\sum_{j=1}^{4} c_{3j}^{-1}}{\sum_{i=1}^{3} c_{i,3}} \right]$$

Comprobar las igualdades es trivial.

La distribución conjunta será: $p_{i,j} = \kappa' b_{i,j} \frac{a_{i,3}}{b_{i,3}}$ *para* $(i,j) \in N$ *con* $\kappa' = \left[\sum_{i=1}^{3} c_{i,3} \right] = \frac{3}{10}$*. Obteniéndose, entonces,*

$$(p_{i,j}) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que en el ejemplo 5 no es aplicable este resultado dada la estructura de las matrices **A** y **B** que contienen elementos nulos en todas sus filas y columnas.

4. UNICIDAD

En toda esta sección supondremos que las matrices **A** y **B** son compatibles, lo que implica, en particular, que sus elementos nulos están en la misma posición. Un primer resultado relativo a la unicidad es el siguiente:

Teorema 5. *(Gupta y Varga 1990) Si* **A** *y* **B** *tienen al menos una fila y una columna de elementos no nulos, la distribución conjunta que determinan* **A** *y* **B** *es única.*

Así las matrices del ejemplo 5 de la sección anterior son compatibles como ya vimos, además, al tener una fila y una columna formada con elementos no nulos, podemos concluir que la distribución conjunta que definen es única.

Otro enfoque de este problema es el siguiente. Supóngase que **C** puede ser completada de manera única y de forma que tenga rango unidad, entonces aplicando la descomposición singular obtenemos

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_L \end{pmatrix} (v_1 \dots v_M)$$

donde el valor singular lo hemos incluido en uno de los vectores **u** o **v**. Puesto que el vector **u** es autovector asociado al único autovalor no nulo de $\mathbf{C}^t\mathbf{C}$, y puesto que este autovector es simple, **u** es único salvo proporcionalidad (recordar que se toma no negativo) pero, la marginal que corresponde a **u** está obviamente normalizada y por consiguiente es única, de ahí que la distribución conjunta también. En definitiva se ha establecido el siguiente

Teorema 6. *Sean* **A** *y* **B** *dos matrices compatibles. Si la matriz de cocientes puede ser completada de manera única de forma que tenga rango unidad, entonces, la distribución que determinan* **A** *y* **B** *es única.*

El siguiente ejemplo, que utiliza matrices de Arnold, Castillo y Sarabia (1992) aclara este resultado.

Ejemplo 7. *Consideremos las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{3}{14} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{14} \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} & \frac{7}{14} \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{18} & \frac{6}{18} & \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

que tienen como matriz de cocientes

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & * & \frac{4}{14} \\ * & \frac{3}{4} & \frac{6}{14} \\ \frac{18}{6} & \frac{9}{4} & \frac{18}{14} \end{bmatrix}$$

que puede ser completada de manera única de forma que tenga rango unidad:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{2} & \frac{4}{14} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{6}{14} \\ \frac{18}{6} & \frac{9}{4} & \frac{18}{14} \end{bmatrix}$$

y vimos que es compatible. Ahora podemos afirmar, además, que la distribución conjunta es única.

Como ya vimos en la sección precedente no siempre es posible completar $\mathbf{C}$ de manera única con la condición $rg\,\mathbf{C} = 1$. Así pues, llegados a este punto, parece evidente la necesidad de caracterizar dichas matrices. Para ello, y con el fin de aligerar la notación, supondremos que mediante cambios de filas y columnas se han llevado el mayor número posible de elementos desconocidos de $\mathbf{C}$ a una submatriz de ella situada en la esquina superior izquierda. Obsérvese que esto no conlleva ninguna pérdida de generalidad, supone únicamente una reordenación de los valores del vector aleatorio.

Supondremos, además, que todos aquellos valores desconocidos de $\mathbf{C}$ que se puedan calcular unívocamente vía la condición $rg\,\mathbf{C} = 1$, han sido calculados. Esto implica que esos elementos han sido determinados mediante menores de dimensión dos con un único elemento desconocido. Estos elementos serán denominados *determinables o calculables*. En definitiva, la forma de la matriz $\mathbf{C}$ es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{C}_{11}$ es una matriz de orden $r \times s$, con todos sus elementos elementos indeterminados. Además de los elementos de $\mathbf{C}_{11}$, es posible que existan otros elementos indeterminados en $\mathbf{C}_{12}$, $\mathbf{C}_{21}$ y $\mathbf{C}_{22}$. En estas condiciones se tiene

Teorema 7. *Si $\mathbf{C}_{22}$ tiene todos sus elementos indeterminados y $\mathbf{C}_{12}$, $\mathbf{C}_{21}$ tienen todos sus elementos determinados, entonces, la distribución que determinan $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no es única.*

Demostración

Utilizando la descomposición singular para la matriz $\mathbf{C}_{12}$ ($rg\mathbf{C}_{12} = 1$) se puede determinar un par de vectores $(u_1, u_2, \ldots, u_r)^t$ y $(v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_M)^t$ de forma que

$$\mathbf{C_{12}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} (v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_M)$$

pero también, si $\lambda > 0$:

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_r \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\lambda} v_{s+1}, \frac{1}{\lambda} v_{s+2}, \ldots \frac{1}{\lambda} v_M \right)$$

Análogamente utilizando $\mathbf{C}_{21}$:

$$\mathbf{C_{21}} = \begin{pmatrix} u_{r+1} \\ u_{r+2} \\ \vdots \\ u_L \end{pmatrix} (v_1, v_2, \ldots, v_s)$$

Pero también si $\mu > 0$:

$$\mathbf{C_{21}} = \begin{pmatrix} \mu u_{r+1} \\ \mu u_{r+2} \\ \vdots \\ \mu u_M \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\mu} v_1, \frac{1}{\mu} v_2, \ldots, \frac{1}{\mu} v_s \right)$$

Ahora los vectores

$$\mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots \lambda u_r, \mu u_{r+1}, \mu u_{r+2}, \ldots, \mu u_L)^t$$

$$\mathbf{v} = \left(\tfrac{1}{\mu} v_1, \tfrac{1}{\mu} v_2, \ldots \tfrac{1}{\mu} v_s, \tfrac{1}{\lambda} v_{s+1}, \tfrac{1}{\lambda} v_{s+2}, \ldots, \tfrac{1}{\lambda} v_M \right)$$

son proporcionales a las distribuciones marginales y si $\lambda \neq \mu$ es evidente que no son únicos aún normalizándolos. En consecuencia la distribución conjunta no es única.

$\square$

Teorema 8. *Si la distribución conjunta que determinan* **A** *y* **B** *no es única, la matriz de cocientes* **C** *puede escribirse, permutando filas y columnas, como*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{C}_{11}$ *y* $\mathbf{C}_{22}$ *matrices de elementos indeterminados.*

Demostración

Supongamos que por permutación de filas y columnas la matriz **C** se ha escrito en la forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{C}_{11}$ de elementos desconocidos. Esta forma de escribir $\mathbf{C}$ no es única, nosotros seleccionaremos la siguiente: $\mathbf{C}_{11}$ tiene el mayor número posible de columnas de entre todas las particiones de $\mathbf{C}$ del tipo anterior y, para ese número de columnas, el mayor número de filas posibles. Supongamos que las dimensiones resultantes son $r \times s$. Probaremos que entonces, $\mathbf{C}_{22}$ está formada por elementos desconocidos. En efecto, supongamos, sin pérdida de generalidad, que el elemento $c_{r+1,s+1}$ es conocido (o ha sido calculado en algún paso anterior) entonces, algún elemento de su columna $c_{ij},\ i = 1,\dots,r;\ j = s+1,\dots,M$ es conocido pues, si no, las dimensiones de $\mathbf{C}_{11}$ no serían máximas. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que es $c_{r+1,s+1}$. Análogamente trabajando con la fila $r+1$ tendremos que podemos suponer que $c_{r+1,s}$ es conocido. Así pues son conocidos $c_{r+1,s}, c_{r,s+1}, c_{r+1,s+1}$, pero entonces como el determinante

$$\begin{vmatrix} c_{r,s} & c_{r,s+1} \\ c_{r+1,s} & c_{r+1,s+1} \end{vmatrix} = 0$$

tenemos que c_{rs} es conocido, lo que es absurdo. Obsérvese que $\mathbf{C}_{11}$ existe realmente (i.e.$r > 0$ y $s > 0$) pues la distribución conjunta no es única y en consecuencia existe, al menos, un elemento no determinable ya que de no ser así, todos los elementos de $\mathbf{C}$ se pueden determinar y, en consecuencia, aplicando resultados anteriores la distribución conjunta es única.

□

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 8. *Retomando el ejemplo 4 de la sección anterior, donde ningún elemento desconocido es determinable, y permutando filas y columnas*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} * & \frac{5}{6} & * & \frac{5}{3} \\ 1 & * & \frac{1}{2} & * \\ * & \frac{2}{3} & * & \frac{4}{3} \\ 2 & * & 3 & * \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} * & * & \frac{5}{6} & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & * & * \\ * & * & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & 3 & * & * \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} * & * & \frac{5}{6} & \frac{5}{3} \\ * & * & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & * & * \\ 2 & 3 & * & * \end{bmatrix}$$

con lo que, aplicando resultados anteriores, se concluye que, aún siendo compatibles, la distribución conjunta no es única.

El siguiente ejemplo muestra la utilización de la descomposición singular en submatrices para obtener diversas distribuciones marginales.

Ejemplo 9. *Las siguientes matrices pueden considerarse como distribuciones condicionadas de un vector aleatorio finito:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de cocientes viene dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & * \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & * & * & * & * \\ * & * & * & \frac{1}{2} & * & * & \frac{1}{2} \\ 1 & * & 1 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Intercambiando la 2ª y 3ª fila y las columnas 5ª y 7ª obtenemos:

$$\mathbf{C} \longrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & * & * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & * & * \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & * & * & * & * \\ 1 & * & 1 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

El elemento c_{42} es determinable mediante la condición $rgC = 1$, obteniéndose que $c_{42} = 1/2$. Los elementos conocidos forman menores de orden dos nulo y, en consecuencia, las matrices **A** *y* **B** *se pueden considerar distribuciones condicionadas si* **C** *se puede completar de forma que tenga rango unidad. La matriz $\mathbf{C}_{12}$ reproduce la estructura por cajas que estudiamos en el teorema 8 y además* **C** *también la reproduce.*

Completaremos en primer lugar las submatrices de la submatriz $\mathbf{C}_{1,2}$: la submatriz que ocupa el lugar 1,2 en $\mathbf{C}_{12}$ es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Aplicando la descomposición en valores singulares (como siempre incluimos el valor singular en los vectores) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^t = \mathbf{u}'\mathbf{v}'^t$$

donde podemos tomar $\mathbf{u}' = \lambda$, $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{2\lambda} \end{bmatrix}$ para cualquier número real $\lambda > 0$. Observamos que este $\mathbf{u}'$ es la componente u_1 del vector **u** *que resuelve el problema en la* *matriz* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{v}'$ *contiene los componentes* $v_6\, v_7$ *del vector* $\mathbf{v}$ *que resuelve el problema en la matriz* $\mathbf{C}$*, así se tiene:*

$$u_1 = \lambda \quad v_6 = \frac{1}{2\lambda} \quad v_7 = \frac{1}{2\lambda}$$

Trabajando ahora con la submatriz que ocupa el lugar 2,1 en $\mathbf{C}_{1,2}$ *obtenemos*

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}^t = \mu \begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu} \\ \frac{1}{2\mu} \end{bmatrix}^t$$

y como antes se tiene

$$u_2 = \mu \quad v_4 = \frac{1}{2\mu} \quad v_5 = \frac{1}{2\mu}$$

con estos vectores es posible reconstruir $\mathbf{C}_{1,2}$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{1},\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} (v_4 v_5 v_6 v_7) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2\mu} & \frac{\lambda}{2\mu} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\mu}{2\lambda} & \frac{\mu}{2\lambda} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz C adopta la forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} * & * & * & \frac{\lambda}{2\mu} & \frac{\lambda}{2\mu} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & * & * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\mu}{2\lambda} & \frac{\mu}{2\lambda} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & * & * & * & * \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Para completar $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *necesitamos* $u_3, u_4, v_1, v_2,$ *y* v_3*, los obtendremos de la descomposición en valores singulares de la matriz* $\mathbf{C}_{2,1}$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} (2,1,2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\omega \\ \frac{1}{2}\omega \end{bmatrix} \left(\frac{2}{\omega}, \frac{1}{\omega}, \frac{2}{\omega} \right)$$

en consecuencia

$$u_3 = \frac{1}{3}\omega,\, u_4 = \frac{1}{2}\omega,\; v_1 = \frac{2}{\omega}, v_2 = \frac{1}{\omega}, \text{y } v_3 = \frac{2}{\omega}$$

$$\mathbf{v}^t = \left(\frac{2}{\omega}, \frac{1}{\omega}, \frac{2}{\omega}, \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda} \right)$$

Así se obtiene

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \frac{1}{3}\omega \\ \frac{1}{2}\omega \end{bmatrix} \left(\frac{2}{\omega}, \frac{1}{\omega}, \frac{2}{\omega}, \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\mu}, \frac{2}{2\lambda}, \frac{2}{2\lambda}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{\omega} & \frac{\lambda}{\omega} & \frac{2\lambda}{\omega} & \frac{\lambda}{2\mu} & \frac{\lambda}{2\mu} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2\mu}{\omega} & \frac{\mu}{\omega} & \frac{2\mu}{\omega} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\mu}{2\lambda} & \frac{\mu}{2\lambda} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{\omega}{6\mu} & \frac{\omega}{6\mu} & \frac{\omega}{6\lambda} & \frac{\omega}{6\lambda} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{\omega}{4\mu} & \frac{\omega}{4\mu} & \frac{\omega}{4\lambda} & \frac{\omega}{4\lambda} \end{bmatrix}$$

Para obtener distribuciones marginales, bastará con normalizar los vectores **u** *y* **v***, sin embargo, aún en ese caso, dando valores positivos a* λ, μ *y* ω *obtenemos distintas de estas distribuciones con lo que se tiene la no unicidad.*

Una vía alternativa en el estudio de la unicidad es el uso de las cadenas de Markov tal y como proponen Arnold y Press (1989). Este enfoque surge de la siguiente observación:

Si **A** y **B** son compatibles existe un vector bidimensional (X,Y) de variables aleatorias finitas tal que para cada $i = 1,2,\ldots,L$ y para cada $j = 1,2,\ldots,M$.

$$a_{1,j} = P[X = x_i|Y = y_j] \qquad b_{i,j} = P[Y = y_j|X = x_i]$$

denotamos, como en la sección precedente:

$$\tau_i = P[X = x_i] \qquad \eta_j = P[Y = y_j]$$

que son las distribuciones marginales, entonces se tienen los siguientes resultados por aplicación de teorema de la probabilidad total.

$$P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{M} P\left[X = x_i|Y = y_j\right] P[Y = y_j] = \sum_{j=1}^{M} a_{i,j}\eta_j = (a_{i,1}a_{i,2}\ldots a_{i,M}) \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ . \\ . \\ \eta_M \end{bmatrix}$$

es decir la fila i-ésima de **A**, por el vector de probabilidad marginal, en consecuencia

$$\tau = \mathbf{A}\eta$$

Por otra parte

$$P\left[Y = y_j\right] = \sum_{i=1}^{L} P\left[Y = y_j|X = x_i\right] P\left[X = x_i\right] = \sum_{i=1}^{L} b_{i,j}\tau_i = (b_{1,j}, b_{2,j}, \ldots, b_{L,j}) \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ . \\ . \\ \tau_L \end{bmatrix}$$

esto es la columna j-ésima de $\mathbf{B}$ por la distribución marginal de X; así

$$\eta = \mathbf{B^t}\tau$$

Combinando lo anterior

$$\tau = \mathbf{A}\eta = \mathbf{AB^t}\tau$$

puesto que $\mathbf{AB^t}$ es una matriz estocástica por columnas, al serlo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}^t$, $\mathbf{AB}^t$ puede ser considerada como la matriz de transición de una cadena de Markov de L estados y, consecuentemente, τ se interpreta como una distribución invariante o estacionaria de la cadena.

Arnold, y Press (1989) observan que si $\mathbf{A}$ y por tanto $\mathbf{B}$ tienen sus elementos no nulos se tiene la unicidad, resultado que obtuvimos más arriba.

Los resultados anteriores se pueden generalizar al tratamiento de distribuciones discretas de recorrido infinito con un número finito de elementos (ver Pérez-Villalta, 1997).

5. REFERENCIAS

Abrahams J. y Thomas J.B. (1984). «A note on the characterization of bivariate densities by conditional densities». *Comunications in Statistics: Theory and Methods*, 13(3), 395-400

Arnold B.C., Castillo E. y Sarabia J.M. (1992). *Conditionally specified distributions*. Lectures Notes in Statistics, Volume 73, Springer Verlang. Berlin.

— (1996) «Bayesian analysis for classical distributions using conditionally specified priors». *Sankhyã*, *Ser. B*, 60, 228-245.

— (1999). *Conditional specification of statistical model*. Springer Series in Statistics. Springer. New York.

Arnold B.C. y Gokhale, D.V. (1994). «On uniform marginal representations of contingency tables». *Statistics and Probability Letter*, 21, 311-316

Arnold B.C. y Press S.J. (1989). «Compatible conditional distributions». *Journal of the American Statistical Association*, 84, 152-156

Basulto J. (1995). «Una propuesta para obtener distribuciones a priori públicas». *Publicación del Departamento de Economía Aplicada I de la Universidad de Sevilla*.

Casella G. y George E.I. (1992). «Explaining the Gibbs sampling». *The American Statistician*, 46(3), 167-174.

Casella G. (1996). «Statistical inference and MonteCarlo algorithms». *Test*, 5, 249-344.

Gourieroux Ch. y Monfort A. (1979). «On the characterization of a joint probability distribution by conditional distributions». *Journal of Econometrics*, 10 115-118.

Gupta A.K. y Varga T. (1990). «Characterization of joint density by conditional densities». *Comunications in Statistics: Theory and Methods*, 19(12), 4643-4659.

Pérez-Villalta, R. (1997). *Distribuciones bivariantes especificadas con condicionadas o Marginales*. Trabajo de Investigación. Departamento de Economía Aplicada I Universidad de Sevilla.

Schott, J.R. (1997). *Matrix analysis for statistics*. John Wiley and sons. New York.

ENGLISH SUMMARY

FINITE CONDITIONALLY SPECIFIED VARIABLES

ROMÁN PÉREZ-VILLALTA
Universidad de Sevilla*

In this research, the existence and uniqueness of bidimensional vectors of discrete variables with finite rank is studied when their condition distribution are set. To do that and after revising the literature about the subject, we provide several results that relate some issues of matricial algebra, specially the singular descomposition, to the problem that we are interested in.

Keywords: Conditional distribution, conditional specification, matrix range, singular descomposition, Markov chain

AMS Classification (MSC 2000): 60E05, 62E10

---

* Facultad de Económicas y Empresariales. Dpto. de Economía Aplicada I. Avda. Ramón y Cajal, 1. 41018 Sevilla. España. villalta@cica.es

– Received December 1999.
– Accepted September 2000.

1. INTRODUCTION

Given a bivariate random vector (X,Y) we can specify its density function in several ways: providing either that function directly, a marginal and a conditional function (in the same o different component), two marginal densities... Depending of the case, the density function of the vector will exist or not, and moreover, it will be the unique one or not.

The case where two conditional functions are given,objective of this research, has been studied extensively by Arnold and Press(1989), and Arnold, Castillo and Sarabia(1979), although it can been mentioned pioneering research such as Gourieroux and Monfort (1979), Abrahams and Thomas (1984). Let's note before continuing that, the previous list of researches do not cover the extent literature in the matter (with regard to the subject under discussion).

This research reviews the existing results in the case where the random variables are finite and contributes(illustrates) some additional result using elements of matricial calculus (calculos matriciales) and examples that clarify the different methods exposed.

2. POSING THE PROBLEM AND NOTATION

Let two matrices be $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ y $\mathbf{B} = (b_{i,j})$ (de orden) $L \times M$ that verifies $a_{i,j} \geq 0, b_{i,j} \geq 0 \; \forall i = 1,\ldots,L; \forall j = 1,\ldots,M$ and moreover,

$$\sum_{i=1}^{L} a_{i,j} = 1, \sum_{j=1}^{M} b_{i,j} = 1.$$

The question to elucidate is, under what conditions two matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, with dimensions $L \times M$, in the conditions before, can be considered conditional distributions of a certain random vector (X,Y) of discrete variables with finite range. That is, if $x_1, x_2, \cdots, x_L$ are the possible values of X and $y_1, y_2, \cdots, y_M$ those of Y, when can the following expressions be verify?

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= P[X = x_i | Y = y_j] \qquad & i = 1 \ldots L \\ b_{i,j} &= P[Y = y_j | X = x_i] \qquad & j = 1 \ldots M \end{aligned}$$

In the same way, we are interested in knowing under what conditions can exist two vectors τ and η, with dimensions L and M respectively, non negative y so that the normalized version (the sum of the coordinates are the unity)of τ and η constitutes the respective marginal distributions. Note that we can suppose $\tau_i b_{i,j} = \eta_j a_{i,j} \quad i = 1,\ldots,L \quad j = 1,\ldots,M$, since if a τ_i or a η_j is null, the value x_i or y_j has all of its probabilities null and can be eliminated of the problem.

This first question is called compatibility problem and, in that context, the matrices **A** and **B** are denominated candidates to conditional distributions, and moreover, if the answer the problem is affirmative it can be said that **A** and **B** are compatible.

A second problem to be considered is the uniqueness of these variables X and Y or vectores τ y η, when it exists.

For the matrices **A** and **B**, we define the sets

$$N_A = \left\{(i,j) : a_{i,j} > 0\right\}, N_B = \left\{(i,j) : b_{i,j} > 0\right\}$$

when $N_A = N_B$ are obtained, it will be denoted by N indistinctly

3. COMPATIBILITY

In this section we study the following results:

Theorem 1. *(Arnold y Press, 1989) Two matrices* **A** *y* **B** *under the conditions of the section before are compatible if and only if* $N_A = N_B = N$ *an moreover there exist two vectors,* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_L)$ *y* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_M)$ *so that*

$$c_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}} = u_i v_j; \qquad \forall (i,j) \in N$$

Theorem 2. *Under the previous conditions* **A** *and* **B** *are compatibles if and only if the rank of* **C** *is equal to one.*

The result before can be found, under other perspective in Arnold and Gokhale (1994), and Arnold, Castillo and Sarabia (1999). When there exist null elements in **A** y **B**, the matrix **C** contains undetermined (indeterminados) elementos, however these can be calculated:

Theorem 3. *If* **A** *and* **B** *determin the joint distribution of a discrete and finite vector* (X,Y) *then, the matrix* **C** *can be completed so that it has rank equal to one (rango unidad).*

Corollary 1. *Under the previous conditions if* **C** *can be completed so that it has rank equal to one then,* **A** *and* **B** *are compatibles.*

Theorem 4. *(Gupta y Vargas, 1990) Let* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *be two matrices in the usual conditions* $N_A = N_B = N$ *and let's suppose that* $\exists (i_0, j_0) \in N$ *such that, for every* $j = 1, \dots, M$ $(i_0, j) \in N$ *and for every* $i = 1, \dots, L$ $(i, j_0) \in N$*.Then,* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *are compatible iff(if and only if)*

$$b_{ij} \frac{a_{i,j_0}}{b_{i,j_0}} = \kappa\, a_{i,j} \frac{b_{i_0,j}}{a_{i_0,j}} \quad \forall (i,j) \in N$$

where κ *is a constant that depends only of* i_0 *and* j_0 *and it is different for every choice of these indexes.*

4. UNIQUENESS

Theorem 5. *(Gupta y Varga 1990) If* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *have at least a row and a column of no null elements, the joint distribution that* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *determine is unique.*

Theorem 6. *Let* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *be two compatible matrices. If the matrix of the quotients can be completed in a unique way so that it has rank equal to one, then the distribution that* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *determine is unique.*

It is not always possible to complete $\mathbf{C}$ in a unique way with the condition $rg\,\mathbf{C} = 1$. So, at this point, the necessity of typifying such matrices seems obvious. To get that and with the objective of making the notation easier, we will suppose that by changes of rows and columns, the most possible number of elements of $\mathbf{C}$ has been moved to a sub-matrix of it, set at the top left corner.

Moreover, we will suppose that all those unknown values of $\mathbf{C}$ that can be calculated uniquely, according to the condition $rg\,\mathbf{C} = 1$, have been calculated. These elements will be denominated *determinable or calculatable*. In summary, the form of the matrix $\mathbf{C}$ is

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{bmatrix}$$

where $\mathbf{C}_{11}$ is a matrix with dimension $r \times s$, with all of its elements undetermined. Besides the elements of $\mathbf{C}_{11}$, it is possible that other undetermined elements exist in $\mathbf{C}_{12}, \mathbf{C}_{21}$ y $\mathbf{C}_{22}$.

Theorem 7. *If* $\mathbf{C}_{22}$ *has all of their elements undetermined and* $\mathbf{C}_{12}$*,* $\mathbf{C}_{21}$ *have all of its elements determined, then the distribution that determines* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *is not unique.*

Theorem 8. *If the joint distribution that determines* $\mathbf{A}$ *and* $\mathbf{B}$ *is not unique, the matrix of quotients* $\mathbf{C}$ *can be written permutating rows and columns, such as*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}} \\ \mathbf{C_{21}} & \mathbf{C_{22}} \end{bmatrix}$$

with $\mathbf{C}_{11}$ *and* $\mathbf{C}_{22}$ *matrices of undetermined elements.*