

# Distribución de tensiones tangenciales en vigas de sección constante bajo esfuerzos cortantes

Teresa Fernández y Juan Manuel Viaño

Departamento de Matemática Aplicada  
Facultad de Matemáticas  
Universidad de Santiago de Compostela  
15706 Santiago de Compostela, España  
Tel.: 34-981-56 31 00 Ext. 13188, Fax: 34-981-59 70 54  
e-mail: teresa@zmat.usc.es, viano@zmat.usc.es

Avelino Samartín

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras  
E.T.S.I.C.C.P. - Universidad Politécnica de Madrid  
28040 Madrid, España  
Tel.: 34-91-336 67 91, Fax: 34-91-336 67 02  
e-mail: avelino@otilio.mecanica.upm.es

## Resumen

En este trabajo se analizan algunos resultados obtenidos por Trabucho y Viaño, mediante desarrollos asintótico de las ecuaciones de la elasticidad tridimensional en vigas de sección constante, para la distribución de tensiones tangenciales en una sección transversal bajo la acción de un esfuerzo cortante. Se aplican, con carácter ilustrativo, a vigas con distintos tipos de secciones transversales (rectangular, circular, triangular y perfil UPN) comparando los resultados con los que se calculan habitualmente con las fórmulas clásicas elementales de la Resistencia de Materiales.\*

**Clasificación MSC:** 73K05 73C02 73B50 73V25

**Palabras claves:** vigas elásticas, tensiones tangenciales, esfuerzo cortante

**SHEAR STRESS DISTRIBUTION ON THE CROSS SECTION IN RODS UNDER SHEAR LOAD**

## Summary

In this work, we compare some results obtained by Trabucho and Viaño by means of asymptotic expansions of three-dimensional elasticity equations for the shear stress distribution in constant section rods with those calculated by elementary classical formulae of the strength of materials. Several rods with different cross section (rectangular, triangular, circular and UPN profil), are tested and the accuracy of the new method is show

---

\* Este trabajo forma parte del Proyecto "Desarrollo de una teoría de hipervigas elásticas y su aplicación en ingeniería" de la *Dirección General de Enseñanza Superior (DGES)* (Ref. PB95-0862-C02-01)

## UN EJEMPLO CLÁSICO DE RESISTENCIA DE MATERIALES

Se supone una viga recta con un sección constante, maciza y simplemente conexa  $\Omega$ . La viga es de luz  $L$  y está empotrada en el extremo  $x_3 = 0$  y libre en  $x_3 = L$  (Figura 1). En el centro de gravedad de la sección recta definida por  $x_3 = 0$  se sitúa el origen de coordenadas  $O$  de tal modo que los ejes  $Ox_1$  y  $Ox_2$  son los principales de inercia de la sección. Se supone, para simplificar, que el plano  $x_1 = 0$  es de simetría de la sección  $\Omega$ . En la sección transversal del extremo  $x_3 = L$  se aplican fuerzas de densidad  $p_i(x_1, x_2, L)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) cuya resultante es una fuerza única  $(0, P_2, 0)$ , es decir, con todas sus componentes nulas excepto la correspondiente al eje  $Ox_2$ .

**Figura 1.**

Dada la definición de viga se tendrá que  $L$  es de un orden de magnitud mucho mayor que el diámetro de  $\Omega$ , que denotamos por  $d$  y, de acuerdo con el principio de Saint Venant, se puede admitir que la distribución de las tensiones en las secciones  $x_3 \in (0, L - kd)$ , con  $k$  un número entero pequeño, es independiente de la distribución de las fuerzas  $p_i(x_1, x_2, L)$  y sólo dependiente de su resultante  $P_2$  en la sección libre.

En la viga anteriormente definida las leyes de esfuerzos cortantes son constantes a lo largo de toda luz  $x_3 \in (0, L)$  y valen  $Q_1 = 0$  y  $Q_2 = P_2$ . Si se supone que el material de la viga es elástico, homogéneo e isótropo y se admite la hipótesis de Navier-Bernoulli de que las secciones rectas, planas y normales, de la viga inicial, permanecen planas y normales en la viga deformada, se puede deducir la fórmula, bien conocida, de la distribución de las tensiones tangenciales en una sección producida por el cortante  $Q_2$  (Samartín)<sup>4</sup>

$$\sigma_{32}^R(x_1, x_2) = \sigma_{32}^R(x_2) = \frac{M_{est}(x_2)}{b(x_2)I_2} Q_2 \quad (1)$$

donde

$M_{est}(x_2)$  es el momento estático de la sección

$$\Omega(x_2) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \Omega : \xi_2 \geq x_2\} \quad (2)$$

definido por

$$M_{est}(x_2) = \int_{\Omega(x_2)} \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (3)$$

$b(x_2)$  es la longitud (ancho) de la frontera inferior de  $\Omega(x_2)$  o, equivalente, la del segmento  $\{(\xi_1, \xi_2) \in \Omega : \xi_2 = x_2\}$  (Figura 2), e  $I_2$  es el momento de inercia de  $\Omega$  respecto al eje  $Ox_1$

$$I_2 = \int_{\Omega} x_2^2 dx_1 dx_2 \quad (4)$$

**Figura 2.****Figura 3.****Figura 4.****Figura 5.**

Conviene recordar que la expresión (1) se obtiene mediante aplicación exclusiva de las condiciones de equilibrio en la “rebanada”. Por otra parte, se observa que la tensión tangencial  $\sigma_{32}^R(x_1, x_2)$  es independiente de la coordenada  $x_1$ , puesto que (1) expresa únicamente el valor medio de las tensiones tangenciales a lo largo de las fibras de la sección situadas a idéntica distancia del eje  $Ox_1$  (Figura 3). Se comprende, por consiguiente, que esta fórmula conducirá a resultados adecuados para secciones esbeltas o estrechas, es decir, con valores  $b(x_2)$  pequeños respecto al canto. Sin embargo, estos resultados se deterioran a nivel de fibra en los casos de secciones anchas. Finalmente, se debe resaltar que la fórmula (1) sólo permite determinar la componente según el eje  $Ox_2$  de las tensiones tangenciales, es decir  $\sigma_{32}$ , pero no es posible deducir, a partir de ella, las componentes respecto al eje  $Ox_1$  de las tensiones tangenciales. Estas componentes se suelen aproximar mediante consideraciones de equilibrio en los extremos del segmento  $\{(\xi_1, \xi_2) \in \Omega : \xi_2 = x_2\}$ . En esas fibras extremas (Figura 4), la componente normal al borde de la viga, supuesto libre de tensiones, es nula. Esta condición permite calcular las componentes  $\sigma_{31}$  en esas fibras extremas y utilizar los valores obtenidos para estimar, mediante una sencilla interpolación, los valores aproximados de  $\sigma_{31}$  en las fibras intermedias.

Antes de finalizar este apartado se muestra una generalización de la fórmula (1) al caso de que los ejes de coordenadas  $Ox_1$  y  $Ox_2$  no sean coincidentes con los principales de inercia de la sección, pero conservando el origen en el centro de gravedad de la misma. Además, se supone un subconjunto  $\Omega(C)$  de la sección  $\Omega$  de la viga definido por el conjunto de puntos  $(\xi_1, \xi_2)$  de  $\Omega$  situados por encima de la curva  $C$  (Figura 5). Esta curva  $C$  se especifica por sus ecuaciones paramétricas en función de la longitud de arco  $x_\alpha = x_\alpha(s)$ ,  $s_1 \leq s \leq s_2$ ,  $\alpha = 1, 2$ , es decir, el subconjunto  $\Omega(C)$  se expresa

$$\Omega(C) \equiv \Omega \cap \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 / \xi_1 \geq x_1(s), \xi_2 \geq x_2(s)\}. \quad (5)$$

Se tiene entonces la siguiente generalización de la fórmula (1) que expresa la tensión tangencial media  $\sigma_{3n}^m$  de las tensiones tangenciales  $\sigma_{3n}$  a lo largo de  $C$ , contenidas en la sección  $\Omega$  y con dirección la normal a la curva  $C$ :

$$\sigma_{3n}^m = [-I_{12}M_{est1}(C) + I_2M_{est2}(C)] \frac{Q_2}{(I_1I_2 - I_{12}^2)b(C)}, \quad (6)$$

siendo  $b(C)$  la longitud de la curva  $C$  y  $M_{est\alpha}(C)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , los momentos estáticos de la sección  $\Omega(C)$  respecto a los ejes de coordenadas, es decir

$$b(C) = \oint_C ds, \quad M_{est\alpha} = \int_{\Omega(C)} \xi_\alpha d\xi_1 d\xi_2. \quad (7)$$

Además se ha introducido la notación

$$I_\alpha = \int_{\Omega} x_\alpha^2 dx_1 dx_2, \quad I_{12} = \int_{\Omega} x_1 x_2 dx_1 dx_2. \quad (8)$$

Nótese que por definición

$$\sigma_{3n}^m = \frac{1}{b(C)} \oint_C \sigma_{3n}(x_1, x_2) ds, \quad (9)$$

y, por tanto, representa la tensión tangencial media de las existentes a lo largo de la frontera inferior de  $\Omega(C)$ . En los puntos extremos de la curva  $C$  se pueden plantear, como antes, las ecuaciones de equilibrio que expresan el hecho de que la superficie lateral de la viga está libre de tensiones, y por consiguiente, deducir los valores de las tensiones  $\sigma_{31}$  en dichos extremos.

## LA VIGA COMO SÓLIDO ELÁSTICO TRIDIMENSIONAL

La viga elástica de tipo prismático, definida en la introducción, puede ser calculada utilizando la teoría general de la elasticidad, sin recurrir “a priori” a hipótesis simplificadoras adicionales a las de la elasticidad tridimensional. Se designa por  $V$  el dominio de la viga, es decir,  $V = \Omega \times (0, L)$ ,  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_L$  las secciones extremas correspondientes a  $x_3 = 0$  y  $x_3 = L$  y por  $\Gamma$  la sección lateral de la viga definida por la expresión  $\gamma \times (0, L)$  con  $\gamma$  el contorno de  $\Omega$ . Sea  $(n_1, n_2)$  el vector normal de  $\gamma$ , unitario y exterior de  $\Omega$ . Entonces  $(n_1, n_2, 0)$  es el valor normal unitario a la superficie lateral  $\Gamma$  y exterior a  $V$ .

Se utilizará el convenio de índices repetidos para la suma. Además, los índices griegos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  lo harán en el conjunto  $\{1, 2\}$ . Las derivadas parciales con respecto a una variable  $x_i$  de una función  $\phi$  se indicarán por  $\phi_{,i}$ . Para funciones  $z$  que sólo dependen de la variable  $x_3$ , las derivadas sucesivas se notarán por  $z', z'', \dots$

Supondremos que la sección de la viga  $V$  no es necesariamente simétrica y que está empotrada en su extremo  $\Gamma_0$ . En su extremo  $\Gamma_L$  está sometida a fuerzas de superficie de densidad  $p_i = p_i(x_1, x_2, L)$ . Además para mayor generalidad, supondremos una fuerza volúmica de densidad  $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$  actuando en  $V$  y una fuerza superficial en la superficie lateral  $\Gamma$  de densidad  $g_i = g_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(x_1, x_2) \in \gamma$ .

Entonces se pueden escribir las ecuaciones que resuelven el problema tridimensional de elasticidad lineal en  $V$ , correspondiente a la viga en voladizo, como sigue:

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j} &= f_i & \text{en } V \\ \sigma_{i3} &= p_i & \text{en } \Gamma_L \\ \sigma_{i\beta} n_\beta &= g_i & \text{en } \Gamma \\ u_i &= 0 & \text{en } \Gamma_0 \end{aligned} \quad (10)$$

siendo  $u_i$  los desplazamientos según los ejes  $Ox_i$  y  $\sigma_{ij}$  las componentes del tensor de tensiones.

La viga se supone compuesta de un material homogéneo e isotrópico con módulo de elasticidad  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ . La ley de Hooke nos asegura entonces que

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(u_{kk})\delta_i^j \quad (11)$$

donde  $\delta_i^j$  es la delta de Dirac.

Se definen las acciones resultantes, correspondientes a las cargas concentradas en el extremo libre del voladizo  $P_i$  y  $M_i^L$  y a las repartidas a lo largo de la luz  $L$  de intensidades  $F_i$  y  $M_i$  dependientes de  $x_3$ :

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{\Omega} p_i dx_1 dx_2 \\ M_{\alpha}^L &= \int_{\Omega} x_{\alpha} p_3 dx_1 dx_2 \\ M_3^L &= \int_{\Omega} (x_2 p_1 - x_1 p_2) dx_1 dx_2 \\ F_i &= \int_{\Omega} f_i dx_1 dx_2 + \int_{\gamma} g_i d\gamma \\ M_{\alpha} &= \int_{\Omega} x_{\alpha} f_3 dx_1 dx_2 + \int_{\gamma} x_{\alpha} g_3 d\gamma \\ M_3 &= \int_{\Omega} (x_2 f_1 - x_1 f_2) dx_1 dx_2 + \int_{\gamma} (x_2 g_1 - x_1 g_2) d\gamma \end{aligned} \quad (12)$$

Nótese que el caso clásico del apartado anterior corresponde al caso particular en el que  $F_i = M_i = M_i^L = P_1 = P_3 = 0$  y además  $Ox_2$  es un eje de simetría de la sección transversal.

En una viga el diámetro de la sección recta  $d = d(\Omega)$  es muy pequeño respecto a la luz  $L$  y este hecho implica que el problema tridimensional (4) sea difícil de resolver debido a su mal condicionamiento. De ahí la necesidad de aproximar tanto los desplazamientos  $u_i$  como las  $\sigma_{ij}$  por otros métodos. Trabucho-Viaño<sup>7</sup> han utilizado el área de la sección transversal como pequeño parámetro en un desarrollo asintótico y han justificado una fórmula explícita para aproximar las tensiones  $\sigma_{31}$  y  $\sigma_{32}$  producidas por las acciones arbitrarias  $f_i$ ,  $g_i$  y  $p_i$  para las que los ejes  $Ox_{\alpha}$  no precisan ser de simetría de la sección. Esta fórmula explícita, que representa, en principio, una mejor aproximación que las fórmulas concidas de la Resistencia de Materiales para casos particulares, se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^0(x_1, x_2, x_3) &= \frac{E}{2(1+\nu)} \{ -\psi_{,2}(x_1, x_2) \theta'(x_3) \\ &\quad + [(1+\nu)r_{\beta,1}(x_1, x_2) + \nu s_{\beta,1}(x_1, x_2) + \nu \phi_{1\beta}(x_1, x_2)] u_{\beta}'''(x_3) \} + w_{,1}^0 \\ \sigma_{32}^0(x_1, x_2, x_3) &= \frac{E}{2(1+\nu)} \{ \psi_{,1}(x_1, x_2) \theta'(x_3) \\ &\quad + [(1+\nu)r_{\beta,2}(x_1, x_2) + \nu s_{\beta,2}(x_1, x_2) + \nu \phi_{2\beta}(x_1, x_2)] u_{\beta}'''(x_3) \} + w_{,2}^0 \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  son funciones definidas en el dominio de la sección transversal por las expresiones:

$$\phi_{11} = -\phi_{22} = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2), \phi_{12} = \phi_{21} = x_1 x_2$$

y las funciones  $\psi(x_1, x_2)$  (función de torsión de Saint-Venant),  $r_\beta(x_1, x_2)$  y  $s_\beta(x_1, x_2)$  (funciones de cortante de Trabuco-Viaño) son también funciones que dependen exclusivamente de la geometría de la sección transversal. Son soluciones de los cinco problemas de Laplace siguientes (se supone  $\Omega$  conexa, sin “agujeros”):

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 2 & \text{en } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{en } \gamma, \\ \Delta r_\beta = 2x_\beta & \text{en } \Omega, \\ r_{\beta,n} = 0 & \text{en } \gamma, \\ \int_\Omega r_\beta = 0 & \\ -\Delta s_\beta = 2x_\beta & \text{en } \Omega \\ s_{\beta,n} = -\phi_{\beta\alpha}n_\alpha & \text{en } \gamma \\ \int_\Omega s_\beta = 0 & \end{cases} \quad (14)$$

La función de alabeo  $w$  se define como la única solución del siguiente problema de Neumann en  $\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w_{,n} = x_2n_1 - x_1n_2 & \text{en } \gamma \\ \int_\Omega w = 0 & \end{cases} \quad (15)$$

y la acción del alabeo debida a la carga axial es

$$R = \int_\Omega w f_3 dx_1 dx_2 + \int_\gamma w g_3 d\gamma \quad (16)$$

Asociadas a estas funciones se definen las constantes de la geometría de la sección:

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \frac{1}{2} \int_\Omega x_\alpha (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2, & I_\beta^\omega &= \int_\Omega x_\beta w dx_1 dx_2, & J &= - \int_\Omega x_\alpha \psi_{,\alpha} dx_1 dx_2, \\ I_1^\psi &= - \int_\Omega x_2^2 \psi_{,2} dx_1 dx_2, & I_2^\psi &= \int_\Omega x_1^2 \psi_{,1} dx_1 dx_2, & I_\alpha &= \int_\Omega x_\alpha^2 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (17)$$

En la fórmula (13)  $u_\beta = u_\beta(x_3)$  son los desplazamientos de flexión que satisfacen el siguiente problema de contorno en  $(0, L)$ , con derivadas de cuarto orden respecto a  $x_3$  (no suma en  $\beta$ ):

$$\begin{aligned} EI_\beta u_\beta'''' &= F_\beta + M_\beta' & \text{en } (0, L) \\ u_\beta &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \\ u_\beta' &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \\ -EI_\beta u_\beta'' &= M_\beta^L & \text{en } x_3 = L \\ -EI_\beta u_\beta''' &= P_\beta & \text{en } x_3 = L \end{aligned} \quad (18)$$

En (12)  $\theta = \theta(x_3)$  representa el giro de torsión de la sección  $x_3$  y es la solución del siguiente problema de contorno en  $(0, L)$  con derivadas de segundo orden respecto a  $x_3$ :

$$\begin{aligned} -\frac{EJ}{2(1+\nu)}\theta'' &= M_3 + R' - \frac{1}{2(1+\nu)I_\alpha}[(1+\nu)I_\alpha^\omega + \nu I_\alpha^\psi](F_\alpha + M_\alpha') & \text{en } (0, L), \\ \frac{EJ}{2(1+\nu)}\theta' &= \frac{-1}{2(1+\nu)I_\alpha}[(1+\nu)I_\alpha^\omega + \nu I_\alpha^\psi]P_\alpha + M_3^L - R(L) & \text{en } x_3 = L, \\ \theta &= \frac{\nu}{I_1 + I_2}[H_2 u_1''(0) - H_1 u_2''(0)] & \text{en } x_3 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Finalmente, la función  $w^0 = w^0(x_1, x_2, x_3)$  es en cada sección  $x_3$  solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta w^0 = f_3 - \frac{1}{\text{Area}(\Omega)} F_3 & \text{en } \Omega, \\ w_{,n}^0 = g_3 & \text{en } \gamma, \\ \int_{\Omega} w^0 dx_1 dx_2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

En las fórmulas (12) de Trabucho-Viaño se distingue inmediatamente que el primer sumando corresponde a los efectos de torsión general que incluye los efectos de la torsión pura debida a los momentos  $M_3$  y  $M_3^L$  así como la torsión provocada si la resultante de las cargas  $F_\alpha$  y  $P_\alpha$  no pasa por el centro de cortantes y también los efectos de la variación de  $R$  ó del valor  $R(L)$ . En efecto, del problema (18) se deduce que para obtener  $\theta' = 0$  ( $\theta = \text{cte}$ ) no basta con que  $M_3$  y  $M_3^L$  sean nulos sino que intervienen las cargas  $R'$  y  $R(L)$  así como el momento producido por las fuerzas  $(F_1 + M_1', F_2 + M_2')$  y  $(P_1, P_2)$  con respecto al punto de coordenadas  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= -\frac{1}{2(1+\nu)I_2} \left[ (1+\nu)I_2^\omega + \nu I_2^\psi \right], \\ \hat{x}_2 &= \frac{1}{2(1+\nu)I_1} \left[ (1+\nu)I_1^\omega + \nu I_1^\psi \right], \end{aligned} \quad (20)$$

que no es otro que el centro de cortantes según la expresión de Trabucho-Viaño<sup>8</sup>. La fórmula clásica del centro de cortantes corresponde, aproximadamente, a suponer  $\nu = 0$  en (20).

El segundo, tercer y cuarto sumandos de la fórmula (12) corresponde a los efectos de cortante de las flexiones que son incorporadas mediante las funciones  $r_\beta, s_\beta$  y  $\phi_{\alpha\beta}$ .

Por último los sumandos  $w_{,\alpha}^0$  en (12) incorporan un efecto de cortante debido a la presencia de cargas axiales en cada sección.

Se comprueba que la fórmula (12) conserva el equilibrio en la sección de las tensiones tangenciales con los esfuerzos cortantes, pues se verifica

$$Q_\beta = \int_{\Omega} \sigma_{3\beta}^0 d\Omega = -EI_\beta u_\beta''' + M_\beta \quad (\text{no suma en } \beta), \quad (21)$$

Habría que destacar que la fórmula (12) de Trabucho-Viaño también es válida par secciones múltiplemente conexas con sólo cambiar la definición de la función de torsión  $\psi$  (Véase Trabucho-Viaño<sup>8</sup>) y es aplicable tanto a secciones macizas como las constituidas por perfiles delgados.

En los casos frecuentes encontrados en la práctica se tiene  $f_i = 0$  y  $g_i = 0$ , con lo que las ecuaciones (17), (18) y (19) se resuelven explícitamente y se obtiene:

$$u_\beta(x_3) = \frac{1}{EI_\beta} \left[ \frac{1}{2} (P_\beta L - M_\beta^L) x_3^2 - \frac{1}{6} P_\beta x_3^3 \right], \quad (22)$$

$$\theta(x_3) = \left\{ -\frac{1}{EI_\alpha J} [(1+\nu)I_\alpha^\omega + \nu I_\alpha^\psi] P_\alpha + \frac{2(1+\nu)}{EJ} M_3^L \right\} x_3, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\nu}{I_1 + I_2} \left[ \frac{H_2}{EI_1} (P_1 L - M_1^L) - \frac{H_1}{EI_2} (P_2 L - M_2^L) \right], \\ &w^0 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

El caso clásico descrito en el primer apartado corresponde como ya se ha dicho a  $f_i = 0$ ,  $g_i = 0$  y además  $P_1 = P_3 = 0$ ,  $M_i^L = 0$ , siendo  $Ox_2$  un eje de simetría. Por tanto,

$H_1 = I_2^w = I_2^\psi = 0$  y en consecuencia

$$u_1 = 0, \theta = 0, u_2(x_3) = \frac{1}{EI_2} \left[ \frac{1}{2} P_2 L x_3^2 - \frac{1}{6} P_2 x_3^3 \right] = \frac{P_2 x_3^2}{6EI_2} (3L - x_3) \quad (25)$$

De esta forma, sustituyendo en (12) se deduce

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^0(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{2I_2(1+\nu)} [(1+\nu)r_{2,1}(x_1, x_2) + \nu s_{2,1}(x_1, x_2) \\ &\quad + \nu \phi_{12}(x_1, x_2)] P_2 \\ \sigma_{32}^0(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{2I_2(1+\nu)} [(1+\nu)r_{2,2}(x_1, x_2) + \nu s_{2,2}(x_1, x_2) \\ &\quad + \nu \phi_{22}(x_1, x_2)] P_2 \end{aligned} \quad (26)$$

## ESTUDIO COMPARTIVO DE LAS SOLUCIONES CLÁSICA Y ASINTÓTI- CA

El procedimiento de cálculo de las tensiones tangenciales en una viga tridimensional se reduce a dos análisis separados. Uno del tipo bidimensional a nivel de la sección  $\Omega$  que en Resistencia de Materiales está representado por el estudio de la rebanada de una viga y en el caso de la formulación de Trabuco-Viaño por la resolución de los seis problemas de Laplace (13)-(14). El otro análisis corresponde a un cálculo unidimensional para determinar el comportamiento de la directriz de la viga, eje  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , a lo largo de  $Ox_3$ . Generalmente la solución de los problemas de Laplace se lleva a cabo mediante métodos numéricos, como elementos finitos, de forma eficiente al ser problemas bien condicionados. Por el contrario, la determinación de los esfuerzos y movimientos a lo largo de la directriz se puede, al menos en muchas ocasiones, obtener de forma analítica. Con objeto de comprobar las diferencias, en la distribución tensional en una sección sometida a un esfuerzo cortante  $Q_2$ , entre la formulación de Trabuco-Viaño y la clásica de la Resistencia de Materiales se comparan en este apartado los resultados obtenidos por ambas fórmulas en vigas en algunas secciones simples y usuales en la práctica.

### Sección rectangular de canto $h$ y ancho $b$

Las fórmulas de la Resistencia de Materiales aplicadas a la sección de la Figura 6 conducen a los resultados

$$\sigma_{32}^R(x_1, x_2) = \sigma_{32}^R(x_2) = \frac{6}{bh} \left( \frac{1}{4} - \bar{x}_2^2 \right) Q_2, \text{ con } \bar{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \quad (27)$$

$$\sigma_{31}^R(x_1, x_2) = 0. \quad (28)$$

Por tanto, la tensión  $\sigma_{32}^R$  máxima se alcanza para  $\bar{x}_2 = 0$

$$\sigma_{32, max}^R = \sigma_{32}^R(0) = \frac{Q_2}{A(\omega)} = \frac{3}{2} \sigma_{32, med}^R \quad (29)$$

donde  $\sigma_{32, med}^R$  es la tensión producida por el cortante  $Q_2$  supuesto uniformemente distribuido en la sección, es decir

$$\sigma_{32, med} = \frac{Q_2}{bh} \quad (30)$$

**Figura 6.** Sección rectangular

Los resultados de Trabuco-Viaño se deducen aplicando la fórmula (26). En las Tablas I y II se muestran las diferencias entre los resultados obtenidos por ambos métodos para las tensiones  $\sigma_{32}$  en las fibras  $(b/2, 0)$  y  $(0, 0)$  en función de la relación  $h/b$  y del coeficiente de Poisson  $\nu$ . Se observa que las diferencias son apreciables, como era de esperar, en las secciones muy anchas y valores del coeficiente de Poisson elevados, si bien en otras situaciones los resultados son prácticamente coincidentes.

$h/b \rightarrow$ $\nu$ $\downarrow$	6	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,06	1,13	1,31	1,45	1,58	1,71
0,2	1,00	1,00	1,01	1,01	1,03	1,10	1,33	1,57	1,82	2,07	2,31
0,3	1,00	1,01	1,01	1,02	1,04	1,14	1,46	1,80	2,13	2,45	2,82
0,4	1,00	1,01	1,01	1,02	1,05	1,18	1,56	1,98	2,41	2,83	3,25
0,5	1,00	1,01	1,01	1,02	1,05	1,21	1,66	2,14	2,64	3,13	3,63

**Tabla I.**  $\sigma_{32}^0/\sigma_{32}^R$  en la fibra  $(b/2, 0)$ 

$h/b \rightarrow$ $\nu$ $\downarrow$	6	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,97	0,93	0,92	0,91	0,91	0,90
0,2	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,95	0,88	0,85	0,84	0,81	0,80
0,3	1,00	1,00	1,00	0,99	0,98	0,93	0,83	0,79	0,77	0,77	0,76
0,4	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,91	0,79	0,74	0,72	0,72	0,70
0,5	1,00	1,00	0,99	0,99	0,97	0,90	0,76	0,70	0,67	0,67	0,66

**Tabla II.**  $\sigma_{32}^0/\sigma_{32}^R$  en la fibra  $(0, 0)$

En las Figuras 7 y 8 se representan las funciones  $\sigma_{32}^0(x_1, x_2)$  y  $\sigma_{32}^R(x_1, x_2)$  para sección rectangular de canto  $h = 1$  y de ancho  $b = 6$ . De la comparación se deduce que ambas aproximaciones coinciden en media, a lo largo del conjunto de fibras situadas a  $x_2$  constante. Tanto en los bordes como en el centro las diferencias son significativas.

**Figura 7.** Sección rectangular:  $\sigma_{32}^0$

**Figura 8.** Sección rectangular:  $\sigma_{32}^R$

### Sección triagunlar isósceles de ancho $b$ y altura $h$

Se supone, en primer lugar, que el cortante es  $Q_2$ . La Resistencia de Materiales proporciona los siguientes resultados de las tensiones (Figura 9):

$$\sigma_{32}^R(x_1, x_2) = \sigma_{32}^R(x_2) = \frac{12}{bh} \left( \frac{2}{3} - \bar{x}_2 \right) \left( \frac{1}{3} + \bar{x}_2 \right) Q_2, \quad \text{con } \bar{x}_2 = \frac{x_2}{h} \quad (31)$$

$$\sigma_{31}^R(x_1, x_2) = -\sigma_{32}^R(x_1, x_2) \operatorname{tg} \varphi = -\sigma_{32}^R(x_2) \frac{x_1}{\frac{2}{3}h - x_2} \quad (32)$$

**Figura 9.** Sección triangular isósceles

Se deduce entonces

$$\sigma_{32,max}^R = \sigma_{32}^R \left( \frac{h}{6} \right) = \frac{3Q_2}{bh} = \frac{3}{2} \sigma_{32,med}^R \quad (33)$$

donde

$$\sigma_{32,med}^R = \frac{Q_2}{A(\omega)} = \frac{2Q_2}{bh} \tag{34}$$

En las Tablas III, IV y V se representan los cocientes  $\sigma_{32}^0/\sigma_{32}^R$  para las fibras O, A y B (Figura 9) de distintos triángulos isósceles (equilátero incluido) par diferentes valores del coeficiente  $\nu$  y de dimensiones  $h$  y  $b$ . Contrariamente el caso de sección rectangular se observa que las diferencias aumentan a medida que disminuyen el coeficiente  $\nu$  y la relación  $h/b$ . en la Tabla VI se muestran los resultados  $\sigma_{31}^0/\sigma_{31}^R$  para la fibra A, alcanzándose análogas conclusiones a las anteriores.

$h/b \rightarrow$ $\nu$ $\downarrow$	6	5	4	3	2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,07	1,08	1,17	1,23	1,27	1,31	1,33
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,05	1,06	1,12	1,17	1,20	1,23	1,25
0,2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,04	1,08	1,12	1,14	1,16	1,17
0,3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,02	1,02	1,05	1,07	1,08	1,10	1,10
0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05
0,5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,01	1,01	1,02	1,04

**Tabla III.** Sección triangular isósceles: relación  $\sigma_{32}^0(O)/\sigma_{32}^R(O)$

$h/b \rightarrow$ $\nu$ $\downarrow$	6	5	4	3	2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
0,0	1,00	1,00	0,99	0,99	0,97	0,87	0,83	0,68	0,60	0,56	0,54	0,53
0,1	1,00	1,00	1,00	0,99	0,98	0,90	0,87	0,77	0,71	0,68	0,66	0,65
0,2	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,94	0,91	0,85	0,80	0,78	0,76	0,75
0,3	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,96	0,94	0,91	0,88	0,86	0,85	0,84
0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,98	0,97	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91
0,5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,97

**Tabla IV.** Sección triangular isósceles: relación  $\sigma_{32}^0(A)/\sigma_{32}^R(A)$

$h/b \rightarrow$ $\nu$ $\downarrow$	6	5	4	3	2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,05	1,13	1,20	1,24	1,28	1,30
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,03	1,04	1,09	1,14	1,18	1,20	1,22
0,2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,02	1,06	1,10	1,12	1,14	1,15
0,3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,04	1,06	1,07	1,09	1,09
0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,00
0,5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

**Tabla V.** Sección triangular isósceles: relación  $\sigma_{32}^0(B)/\sigma_{32}^R(B)$

$h/b \rightarrow$ $\nu$ $\downarrow$	6	5	4	3	2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
0,0	0,91	0,92	0,93	0,93	0,93	0,84	0,80	0,67	0,60	0,58	0,58	0,57
0,1	0,91	0,92	0,93	0,94	0,94	0,87	0,85	0,75	0,69	0,67	0,66	0,65
0,2	0,91	0,92	0,93	0,94	0,94	0,91	0,89	0,83	0,78	0,76	0,76	0,75
0,3	0,91	0,92	0,94	0,94	0,95	0,93	0,92	0,89	0,86	0,84	0,84	0,84
0,4	0,91	0,92	0,94	0,95	0,96	0,95	0,95	0,94	0,93	0,91	0,92	0,92
0,5	0,91	0,92	0,94	0,95	0,96	0,97	0,97	0,99	0,98	0,97	0,98	0,98

**Tabla VI.** Sección triangular isósceles: relación  $\sigma_{31}^0(A)/\sigma_{31}^R(A)$

En el caso de actuación de un cortante  $Q_1$ , es decir, en la dirección paralela a la base, este debe de estar situado en el centro de cortante para que no induzca un momento torsor adicional en la sección. La determinación de este punto mediante las fórmulas de Resistencia de Materiales no es un problema sencillo en el caso de secciones macizas como en los triángulos isósceles que se estudian. La aplicación de la fórmula (20) permite deducir el centro de esfuerzos cortantes, que por simetría está situado en el eje  $x_1 = 0$ , y en la Tabla VII figuran los valores de su coordenada  $x_2$ .

$\nu \rightarrow$ $h/b$ $\downarrow$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
6	-,748	-,721	-,699	-,680	-,664	-,650
5	-,607	-,585	-,567	-,552	-,538	-,527
4	-,464	-,447	-,433	-,421	-,411	-,402
3	-,317	-,305	-,296	-,287	-,280	-,274
2	-,166	-,159	-,154	-,149	-,145	-,141
1	-,017	-,015	-,013	-,011	-,009	-,008
$\sqrt{3}/2$	,000	,002	,004	,005	,006	,007
1/2	,067	,068	,069	,070	,071	,072
1/3	,107	,108	,109	,109	,110	,110
1/4	,128	,128	,129	,129	,130	,130
1/5	,140	,140	,140	,141	,141	,141
1/6	,147	,147	,147	,147	,148	,148

**Tabla VII.** Sección triangular isósceles: coordenada  $x_2$  del centro cortante

Las fórmulas de la Resistencia de Materiales conducen a los valores siguientes para  $0 < x_1 < \frac{b}{2}$  (y por simetría en el resto) (Figura 9):

$$\sigma_{31}^R(x_1, x_2) = \sigma_{31}^R(x_1) = \frac{16}{bh} \left( \frac{1}{2} - \bar{x}_1 \right) \left( \frac{1}{4} + \bar{x}_1 \right) Q_1, \quad \text{con } \bar{x}_1 = \frac{x_1}{b}, \quad (35)$$

$$\sigma_{32}^R(x_1, x_2) = \sigma_{32}^R(x_1) = -\sigma_{31}^R(x_1) \operatorname{tg} \chi = -\sigma_{31}^R(x_1) \frac{\frac{h}{3} + x_2}{\frac{b}{2} - x_1} \quad (36)$$

Se deduce entonces

$$\sigma_{31,max}^R = \sigma_{31}^R \left( \frac{b}{8} \right) = \frac{9Q_1}{4bh} = \frac{9}{8} \sigma_{31,med}^R \quad (37)$$

donde

$$\sigma_{31,med} = \frac{Q_1}{A(\omega)} = \frac{Q_1}{2bh} \quad (38)$$

Se denota por  $\sigma_{31,med}^0(\xi)$  (resp.  $\sigma_{31,med}^R(\xi)$ ) el valor medio de  $\sigma_{31}^0$  (resp. de  $\sigma_{31}^R$ ) de una línea, que según el caso será la línea  $C_1(\xi) = \{(x_1, x_2) \in \omega : x_1 = \xi\}$  ó bien la  $C_2(\xi) = \{(x_1, x_2) \in \omega : x_2 = \xi\}$ . La Tabla VIII muestra la relación  $\sigma_{31,med}^0/\sigma_{31,med}^R$  para las líneas  $C_1(0)$  y  $C_2(0)$ . Se puede observar la discrepancia entre ambos valores para la línea  $x_1 = 0$ . Para la línea  $x_2 = 0$  la concordancia es mucho mayor, lo cual encaja bien con el significado “en media” que tienen los valores  $\sigma_{31}^R$ .

$\nu$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x_1 = 0$	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20	1,20
$x_2 = 0$	1,05	1,03	1,01	0,99	1,03	0,96

**Tabla VIII.** Sección triangular isósceles:  $\sigma_{31,med}^0(x_1, x_2)/\sigma_{31,med}^R(x_1, x_2)$

En las Figuras 10 y 11 se puede observar la distribución de  $\sigma_{31}^0$  y  $\sigma_{31}^R$  para el caso de carga  $Q_1$  y coeficiente  $\nu = 0$ .

**Figura 10.** Sección triangular:  $\sigma_{31}^0$

**Figura 11.** Sección triangular:  $\sigma_{31}^R$

### Sección circular de radio $r$

Se estudia en esta sección la distribución de las tensiones  $\sigma_{3\alpha}$  a lo largo de  $x_2 = 0$  y  $x_2 = r/2$  bajo la acción de un cortante  $Q_2$ . Las ecuaciones de Resistencia de Materiales permiten obtener los resultados siguientes

$$\sigma_{32}^R(x_1, x_2) = \sigma_{32}^R(x_2) = \frac{4}{3\pi r^2} [1 - \bar{x}_2^2] Q_2 \quad (39)$$

$$\sigma_{32}^R(x_1, x_2) = -\sigma_{32}^R(x_2) \operatorname{tg} \varphi(x_1) = -\frac{4\bar{x}_1 \bar{x}_2 Q_2}{3\pi r^2}, \quad \bar{x}_\alpha = \frac{x_\alpha}{r} \quad (40)$$

Por tanto

$$\sigma_{32, \max}^R = \sigma_{32}^R(0, 0) = \frac{4Q_2}{3\pi r^2} \quad (41)$$

**Figura 12.** Sección circular

La aplicación de la fórmula (26) al caso particular del círculo conduce a la siguiente expresión analítica que coincide con la solución clásica deducida de la Teoría de la Elasticidad Lineal (véase<sup>5</sup>):

$$\sigma_{32}^0(x_1, x_2) = \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)I_2} \left[ r^2 - x_2^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} x_1^2 \right] Q_2 \quad (42)$$

$$\sigma_{31}^0(x_1, x_2) = \frac{-(1 + 2\nu)}{4(1 + \nu)I_2} x_1 x_2 Q_2 \quad (43)$$

En la Tabla IX se comparan los resultados obtenidos de la fórmula (26) con los de las fórmulas (39)-(40) para diferentes puntos de la sección.

Se observa el mismo comportamiento que en las otras secciones y las discrepancias más importantes se producen hacia los bordes del círculo en la dirección  $Ox_2$  y se acentúa para valores de  $\nu$  pequeños. Esta diferencia se aprecia mejor en las Figuras 13 y 14 cuyas gráficas corresponden a  $\sigma_{32}^0(x_1, x_2)$  para  $\nu = 0$ ,  $\nu = 0,5$  y a  $\sigma_{32}^R(x_1, x_2)$ . Se percibe la coincidencia de  $\sigma_{32}^0$  con  $\sigma_{32}^R$  para  $\nu = 0,5$  en (42)-(43).

$\nu \rightarrow$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(0,4000, 0,0)	1,06	1,05	1,03	1,02	1,00	0,99
(1,0000, 0,0)	0,76	0,83	0,88	0,93	0,97	1,00
(0,8660, 0,5)	0,78	0,84	0,89	0,94	0,98	1,02
(0,3025, 0,5)	1,08	1,06	1,04	1,02	1,01	0,99

**Tabla IX.** Sección circular:  $\sigma_{32}^0(x_1, x_2)/\sigma_{32}^R(x_1, x_2)$

**Figura 13.** Sección circular:  $\sigma_{32}^0$  para  $\nu = 0$  y  $\nu = 0,5$

**Figura 14.** Sección circular:  $\sigma_{32}^0$

### Sección de perfil laminado UPM

Se considera el perfil laminado UPN de la Figura 15.

Los resultados de la Resistencia de Materiales para este tipo de secciones cuando están sometidos a un esfuerzo cortante  $Q_2$ , que pasa por el centro de cortante M, se obtienen a partir de las siguientes fórmulas

$$\sigma_{32,max}^R = Q_2 \frac{S_x}{I_2 e}, \quad (44)$$

$$\sigma_{31,max}^R = \frac{be_1(h - e_1)}{2I_2 e_2} Q_2, \quad (45)$$

donde  $S_x$  es el momento estático de media sección. Al contrario que en las secciones macizas la determinación del centro de esfuerzos cortantes en este caso es muy simple.

**Figura 15.** Perfil UPN12

En la Tabla X se puede observar que para las fibras  $x_1 = x_A = 0,812$ , al contrario que para las fibras  $x_1 = x_B = 1,412$ , la relación  $\sigma_{32}^0/\sigma_{32}^R$  alcanza un valor próximo a 1 independiente de la posición  $x_2$  de la fibra. Este hecho es debido a que la sección es de perfil delgado y por consiguiente la distribución de tensiones es uniforme a través del espesor (Figura 15).

$\nu \rightarrow$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$(x_A, 0,0000)$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
$(x_A, 1,6205)$	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
$(x_A, 2,3295)$	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
$(x_B, 0,0000)$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
$(x_B, 1,6410)$	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
$(x_B, 2,3589)$	0,84	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
$(x_B, 3,17995)$	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44

**Tabla X.** Sección perfil UPN12:  $\sigma_{32}^0(x_1, x_2)/\sigma_{32}^R(x_1, x_2)$ 

## CONCLUSIÓN

De la experimentación numérica se deduce que las fórmulas de la Resistencia de Materiales que expresan la distribución de tensiones tangenciales debidas a un cortante puro, producen resultantes que satisfacen el equilibrio global del esfuerzo actuante. Sin embargo, esta distribución no da indicación ninguna sobre la variación a lo largo de un conjunto de fibras situadas normales a la dirección del cortante y suele suponerse que es constante. En el caso de secciones de ancho pequeño esta hipótesis es válida, pero para secciones macizas de ancho importante o valores críticos del coeficiente de Poisson, las diferencias con una distribución obtenida mediante la Elasticidad pueden ser importantes.

La formulación de Trabucho-Viaño conduce a la obtención de distribuciones de tensiones tangenciales debidas a un esfuerzo cortante o a un momento torsor que, de forma coherente, aproximan los resultados de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

## REFERENCIAS

- 1 R.T.Fenner, “*Mechanics of solids*”, Blackwell Scientific Publications, Oxford, (1989).
- 2 B.M. Fraejijs, “*A course in elaticity*”, Springer-Verlag, Berlin, (1979).
- 3 H. Le Dret, “Convergence of displacements and stresses in linearly elastic slender rods as the thickness goes to zero”, *Asymptotic Anlysis*, Vol. **10**, N°. 4 , pp. 367–402, (1993).
- 4 A. Samartín, “*Resistencia de materiales*”, Servicio de Publicaciones Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, (1996).
- 5 S. Timoshenko y J.N. Goodier, “*Theory of elasticity*”, MacGraw-Hill, New York (1951).
- 6 L. Trabucho y J.M. Viaño, “Derivation of generalized models for linear elastic beams by asymptotic expansion methods”, Applications of multiple scalings in mechanics, *RMA* Vol. **4**, pp. 302–315, Masson, París, (1987).
- 7 L. Trabucho y J.M. Viaño, “Existence and characterization of higher order terms in an asymptotic expansion method for linearized elastic beams”, *Asymptotic Anlysis*, Vol. **2**, pp. 223–255, (1989).
- 8 L. Trabucho y J.M. Viaño, “*Mathematical modelling of rods: Handbook of Numerical Analysis*, Vol. **IV**, North Holland, (1996).