

# Simulación de excavaciones mediante un método de acoplamiento elementos finitos – elementos de contorno

Ricardo Perera

Departamento de Mecánica Estructural  
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid  
José Gutiérrez Abascal 2, 28006 Madrid, España  
Tel.: 34-91-336 31 34, Fax: 334-91-336 30 04  
e-mail: perera@estru.upm.es

Antonio Ruiz

Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales  
ETSI Minas, Universidad Politécnica de Madrid  
Ríos Rosas 21, 28003 Madrid, España  
Tel.: 34-91-336 32 34, Fax: 34-91-336 32 30  
e-mail: ruiz@dmarn.upm.es

Enrique Alarcón

Departamento de Mecánica Estructural  
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid  
José Gutiérrez Abascal 2, 28006 Madrid, España  
Tel.: 34-91-336 31 34, Fax: 334-91-336 30 04  
e-mail: alarcon@estru.upm.es

## Resumen

Quando se modelan sistemas físicos no lineales de extensión infinita, como las excavaciones, se hace necesario simular adecuadamente tanto la solución en el infinito como la no linealidad. El método de elementos finitos es una herramienta efectiva para representar la no linealidad. Sin embargo, el tratamiento del campo infinito truncando el dominio es bastante cuestionable. Por otro lado, el método de elementos de contorno es adecuado para simular el comportamiento en el infinito sin truncamientos. Por combinación de ambos métodos, se puede obtener un uso adecuado de las ventajas de cada uno. En este trabajo se proponen diversas posibilidades de acoplamiento entre los dos métodos. Se desarrollan algoritmos de acoplamiento basados en una descomposición de dominios y se comparan con los esquemas más tradicionales de acoplamiento.

### **Palabras clave:**

*Acoplamiento MEF-MEC, relajación, preconditionamiento.*

## SIMULATION OF EXCAVATIONS USING A COUPLED FINITE AND BOUNDARY ELEMENT METHOD

### Summary

When non-linear physical systems of infinite extent are modelled, such as excavations, it is necessary to simulate suitably the solution in the infinite as well as the non-linearity. The finite element method (FEM) is a well-known procedure for simulating the non-linear behavior. However, the treatment of the infinite field with domain truncations is often questionable. On the other hand, the boundary element method (BEM) is suitable to simulate the infinite behavior without truncations. Because of this, by the combination of both methods a suitable use of the advantages of each one would be obtained. Several possibilities of FEM-BEM coupling are performed. Parallelizable coupling algorithms based in a domain decomposition are developed and compared with the most traditional coupling methods

### **Key words:**

*FEM-BEM coupling, relaxation, preconditioning.*

## INTRODUCCIÓN

En cualquier excavación subterránea la roca misma trabaja como elemento estructural. Por ello, en el origen de la excavación se produce una alteración del estado inicial de tensiones del macizo rocoso hasta alcanzar un estado tensional de equilibrio. Se hace preciso, por tanto, evaluar todo el proceso de deformación que sufre la masa rocosa durante la excavación como medio de determinar el tipo de sostenimiento estructural adecuado<sup>1</sup>.

El método de elementos finitos (MEF) se ha empleado habitualmente como forma de predicción de las tensiones, deformaciones y desplazamientos de la masa rocosa durante la excavación<sup>2,3</sup>. Lo mismo se puede afirmar del método de los elementos de contorno (MEC)<sup>4</sup>.

Sin embargo, parece claro que acoplando ambos métodos se pueden obtener más ventajas que las que aporta cada uno por separado. De hecho, dicho acoplamiento es especialmente adecuado para simular problemas no lineales en un semiespacio infinito. El MEC es ideal para tratar los dominios infinitos y semiinfinitos implicados, mientras el MEF es más adecuado para representar la no homogeneidad y no linealidad de los dominios. Un acoplamiento de ambos, explota sus mejores características y disminuye sus puntos débiles. La técnica general de acoplamiento fue desarrollada por Zienkiewicz *et al.*<sup>5</sup> y es aplicable a una variedad amplia de problemas ingenieriles<sup>6</sup>.

Ambos métodos conducen a sistemas muy diferentes: sistemas con matrices definidas positivas simétricas y en banda para el MEF y sistemas llenos no simétricos para el MEC. La primera clase de sistemas se puede resolver de forma eficiente utilizando métodos iterativos, mientras los segundos se resuelven por métodos directos. Cuando se lleva a cabo un acoplamiento general entre ambos, se obtienen matrices grandes parcialmente en banda pero con bloques llenos no simétricos y ni un método directo ni un método iterativo son idóneos para resolver dicho sistema.

Por otro lado, dentro del entorno de cálculo multiproceso se han empezado a desarrollar algoritmos numéricos paralelizables<sup>7,8,9</sup>. La partición del dominio de cálculo inicial en subdominios permite reformular el problema en cada subdominio produciendo una familia de subproblemas de complejidad computacional más baja. Esta descomposición permite la aplicación de esquemas numéricos diferentes en cada subdominio. Así, en un acoplamiento MEF-MEC se resuelven separadamente la región MEF no lineal y la región MEC lineal manteniendo las ventajas de cada método. La consistencia con el problema original se logra forzando la transferencia de información adecuada entre subregiones adyacentes.

En este trabajo se presenta un estudio de diferentes posibilidades de llevar a cabo el acoplamiento en problemas no lineales. En el tipo de acoplamiento empleado tradicionalmente se presentan diversas posibilidades orientadas a la eliminación de las principales desventajas encontradas. Por añadidura, se propone también otra alternativa que hace posible una resolución en paralelo. La misma está basada en la descomposición del dominio original en subdominios y planteamiento separado del problema en cada uno de ellos. La transmisión de información entre cada uno de ellos se lleva a cabo mediante operadores de interfase apropiados, cuya aproximación numérica se detalla.

Los cálculos numéricos realizados permiten extraer conclusiones acerca de la eficiencia de cada una de las alternativas propuestas.

## ACOPLAMIENTO STANDARD MEF–MEC

Como es sabido, el método de elementos finitos toma como punto de partida el principio de los trabajos virtuales

$$\int_{\Omega} \sigma \delta \varepsilon \, d\Omega = \int_{\Omega} b \delta u \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} t \delta u \, d\Gamma_{\sigma} \quad (1)$$

A partir de esta ecuación, el sistema MEF resultante tiene la forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{D} \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez del sistema y  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{D}$  los vectores de fuerzas nodales debidos a las acciones en el contorno y en el dominio, respectivamente. El vector  $\mathbf{F}$  se puede escribir como

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}\mathbf{t} \quad (3)$$

en donde  $\mathbf{N}$  representa la matriz de Gram y  $\mathbf{t}$  el vector de tensiones en el contorno.

Por otro lado, la expresión de partida del MEC es

$$cu + \int_{\Gamma} t^* u \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* t \, d\Gamma + \int_{\Omega} bu^* \, d\Omega \quad (4)$$

siendo  $u^*$  y  $t^*$  las soluciones fundamentales en desplazamientos y tensiones en el contorno, respectivamente. A partir de esta ecuación por aplicación del MEC se obtiene el sistema

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{B} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  dependen de  $t^*$  y  $u^*$ , respectivamente, y  $\mathbf{B}$  representa el vector debido a las fuerzas por unidad de volumen. Si se considera un problema consistente de dos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  unidos mediante una interfase  $\Gamma_I$  y se modeliza el primer dominio mediante el MEF y el segundo mediante el MEC para unir ambas regiones, es preciso aplicar las condiciones de compatibilidad y equilibrio en la interfase  $\Gamma_I$ , es decir

$$\begin{aligned} u_{I1} &= u_{I2} \\ t_{I1} &= t_{I2} \end{aligned} \quad (6)$$

Tradicionalmente se emplean dos alternativas para llevar a cabo el acoplamiento<sup>10</sup>. En la primera se considera la región de elementos de contorno como un elemento finito equivalente y su tratamiento se hace igual que en el MEF. De forma alternativa se pueden considerar ambos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  como si fueran ambas regiones de elementos de contorno.

Usando la primera posibilidad, se transforma la ecuación (5) invirtiendo  $\mathbf{G}$  y premultiplicando por  $\mathbf{N}$ . Se obtiene el siguiente esquema de estructura similar al derivado por el MEF

$$\mathbf{K}'\mathbf{u} = \mathbf{F}' + \mathbf{D}' \quad (7)$$

siendo

$$\mathbf{K}' = \mathbf{N}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \quad \mathbf{D}' = \mathbf{N}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{F}' = \mathbf{N}\mathbf{t} \quad (8)$$

Con la segunda alternativa y según (6) se tiene un sistema

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_{I1} & N_{I1} & 0 \\ 0 & H_{I2} & -G_{I2} & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_I \\ t_I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

en el cual se consideran separadamente las variables en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  y en la interfase  $\Gamma_I$ .

A primera vista parece más interesante el primer esquema, ya que puede ser incorporado fácilmente en programas de elementos finitos, pero en general dependiendo del problema en particular se elegirá una u otra alternativa.

## ACOPLAMIENTO MEF NO LINEAL – MEC

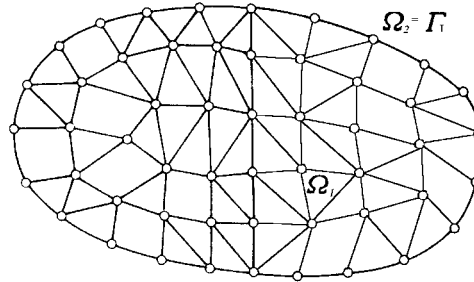
En problemas como la excavación de un suelo se hace necesaria una modelización de un sistema físico de extensión infinita. El MEC se ha utilizado frecuentemente como método ideal para representar el semiespacio infinito correspondiente a un suelo. Sin embargo, a diferencia del MEF, no es muy adecuado para el tratamiento de medios no lineales. Una combinación de ambos métodos resulta idónea para simular adecuadamente este tipo de fenómeno físico haciendo uso de las características más ventajosas de cada uno de ellos: el MEF para la zona próxima a la excavación de comportamiento no lineal y el MEC para representar el semiespacio infinito lineal<sup>11</sup>.

En esta situación, la región MEC  $\Omega_2$  coincide con el subdominio infinito, cuyo contorno es la interfase  $\Gamma_I$  entre ambas regiones, mientras que la zona no lineal, representada con el MEF, se corresponde con la zona masiva. Por ello, en un acoplamiento MEF-MEC la zona no lineal es predominante en lo que al número de grados de libertad se refiere. A efectos de acoplamiento, parece adecuado, por tanto, considerar la región MEC como un elemento finito equivalente.

Si se consideran de forma separada las variables pertenecientes a  $\Omega_1$  de las variables de la interfase lineal  $\Gamma_I$  (Figura 1), las ecuaciones de equilibrio en la región MEF se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} F_{\text{int}}^1 \\ F_{\text{int}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\text{ext}}^1 \\ F_{\text{ext}}^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

en donde el superíndice 2 hace referencia a los grados de libertad adscritos a la interfase.



**Figura 1.** Acoplamiento MEF-MEC en un semiplano infinito

Por otro lado, el sistema (5) derivado de aplicar el MEC se formula en la interfase  $\Gamma_I$  como

$$\mathbf{N}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}u_2 = \mathbf{N}t_2 \quad (11)$$

Las fuerzas volumétricas no se han considerado. Sin embargo, esto no representa ninguna limitación del método, ya que pueden ser reducidas al contorno<sup>12</sup>.

Combinando (10) y (11) y por equilibrio en la interfase, el problema se reduce al cálculo de desplazamientos del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F_{\text{int}}^1 &= F_{\text{ext}}^1 \\ F_{\text{int}}^2 + \mathbf{M}u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

siendo

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \quad (13)$$

La linealización por el método de Newton del sistema no lineal en  $\Omega_1$  lo transforma en

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} + \mathbf{M} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}^k \quad (14)$$

siendo

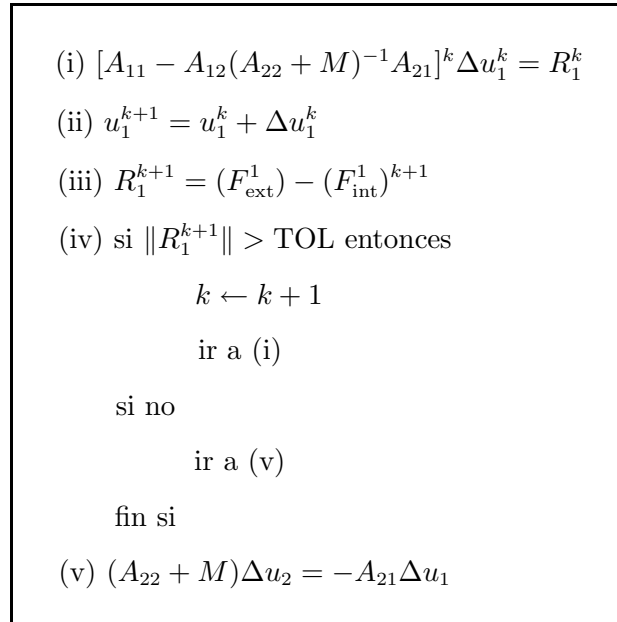
$$A_{11} = (F_{\text{int}}^1)_{u_1}' A_{12} = (F_{\text{int}}^1)_{u_2}' A_{21} = (F_{\text{int}}^2)_{u_1}' A_{22} = (F_{\text{int}}^2)_{u_2}' \quad (15)$$

y el residuo

$$R_1 = F_{\text{ext}}^1 - F_{\text{int}}^1 \quad (16)$$

La resolución del sistema de ecuaciones (14) se puede llevar a cabo de dos formas diferentes dependiendo de la consideración que se de a la interfase  $\Gamma_I$ . En un primer esquema (Figura 2) la linealidad en  $\Gamma_I$  se mantiene. Si se denomina  $n_1$  al número de columnas distintas de cero de  $A_{21}$ ,  $n_2$  el tamaño de  $A_{22}$  y  $n_3$  el de  $A_{11}$ , para cada iteración se han de resolver:

- $n_1$  sistemas llenos no simétricos de orden  $n_2$  para obtener  $(A_{22} + \mathbf{M})^{-1}A_{21}$ , aunque la factorización de la matriz se realizaría sólo una vez;
- 1 sistema lleno no simétrico de orden  $n_3$  para obtener  $\Delta u_1^k$  y, después del proceso iterativo
- 1 sistema lleno no simétrico de orden  $n_2$  para obtener  $\Delta u_2$ .



**Figura 2.** Esquema de acoplamiento tradicional preservando la linealidad de la interfase

Todos los sistemas son no simétricos, por lo que la resolución es muy costosa. De hecho, la principal desventaja de este tipo de resolución es la eliminación de la simetría y de la estructura en banda de la matriz  $A_{11}$  definida sobre el dominio masivo del problema en lo que a grados de libertad se refiere. Sin embargo, se preserva la linealidad de la interfase  $\Gamma_I$ .

El segundo esquema posible (Figura 3) para resolver el sistema (5) se orienta con el fin de mantener la simetría y la estructura en banda de  $A_{11}$ . Para lograr este propósito se ha de resolver la interfase  $\Gamma_I$  de forma no lineal, es decir, iterativamente. Llamando  $n_1$  al número de columnas no nulas de  $A_{12}$  en cada iteración se tienen para resolver:

- $n_1$  sistemas simétricos en banda de orden  $n_2$  para obtener  $A_{11}^{-1}A_{12}$ ;
- 1 sistema simétrico en banda de orden  $n_2$  para obtener  $A_{11}^{-1}R_1$ ;
- 1 sistema lleno no simétrico para obtener  $\Delta u_2^k$ ;
- 1 sistema simétrico en banda para obtener  $\Delta u_1^k$ .

La principal ventaja de este método reside en la posibilidad de resolver iterativamente los problemas simétricos derivados de la región no lineal por un método de gradiente conjugado preconditionado. El hecho de tener que resolver varios sistemas iterativamente no es demasiado grave al ser la estructura de  $A_{12}$  en banda y llevar a cabo el preconditionamiento una sola vez.

(i)  $[A_{22} + M - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^k \Delta u_2^k = [-A_{21}A_{11}^{-1}R_1]^k$

(ii)  $A_{11}^k \Delta u_1^k = [R_1 - A_{12}\Delta u_2]^k$

(iii)  $u_2^{k+1} = u_2^k + \Delta u_2^k$

(iv)  $u_1^{k+1} = u_1^k + \Delta u_1^k$

(v)  $R_1^{k+1} = (F_{\text{ext}}^1) - (F_{\text{int}}^1)^{k+1}$

(vi) si  $\|R_1^{k+1}\| > \text{TOL}$  entonces

$k \leftarrow k + 1$

ir a (i)

si no

salir

fin si

**Figura 3.** Esquema de acoplamiento tradicional forzando la no linealidad de la interfase

De los dos esquemas planteados, el segundo produce en la región masiva del problema  $\Omega_1$  sistemas simétricos y en banda que disminuyen el coste de resolución del problema. Por esta razón, se adoptará este segundo esquema para este tipo de acoplamiento.

## MÉTODO DE RELAJACIÓN

Otra posibilidad de llevar a cabo el acoplamiento MEF–MEC se basa en descomponer el problema inicial en subdominios y proceder iterativamente hasta alcanzar la convergencia en la interfase MEF–MEC. Ello proporciona una familia de subproblemas casi independientes de complejidad computacional más baja.

Este procedimiento permite llevar a cabo un tratamiento separado de la regiones lineal y no lineal manteniendo, por tanto, las ventajas de los métodos de elementos de contorno y finitos.

Para mantener la congruencia del problema original con el problema descompuesto se fuerza el cumplimiento de las condiciones de compatibilidad y equilibrio en la interfase entre subdominios. Mediante un procedimiento de relajación en la interfase, para cada iteración<sup>13</sup>, se obtiene la convergencia del problema.

Para el caso en estudio, la región lineal modelizada con elementos de contorno, coincide con la interfase, mientras para la zona no lineal se emplean elementos finitos.

Según esto, el problema descompuesto queda planteado como la resolución de los siguientes dos subproblemas

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\sigma^{(I)k+1} + f &= 0 & \text{en } \Omega_2 \\ u^{(I)k+1} &= \theta u^{(1)k} + (1 - \theta)u^{(I)k} & \text{en } \Gamma_I \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (17)$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\sigma^{(1)k+1} + f &= 0 & \text{en } \Omega_1 \\ u^{(1)} &= u & \text{en } \Gamma_D \\ \sigma^{(1)}n &= t & \text{en } \Gamma_N \\ t^{(1)k+1} &= t^{(I)k+1} & \text{en } \Gamma_I \end{aligned} \quad (18)$$

siendo  $u^{(1)}$  y  $u^{(I)}$  los valores de  $u$  en  $\Omega_1$  respectivamente, y  $\Gamma_I$  y  $0 < \theta < 1$  el parámetro de relajación;  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  coinciden con los puntos del contorno esencial y natural, respectivamente, del problema original.

De esta forma, se resuelve un problema de Dirichlet en la interfase mediante el MEC y un problema de Neumann en la interfase mediante elementos finitos no lineales. Las tensiones obtenidas por elementos de contorno se emplean como condiciones de contorno del problema de elementos finitos.

El parámetro de relajación  $\theta \in ]0, 1[$  se toma como una constante o bien se selecciona dinámicamente con el fin de maximizar el orden de convergencia del procedimiento. Para ello, si se define como  $z^k(\theta)$  a la secuencia de funciones del procedimiento de relajación

$$z^k(\theta) = \theta u^{(1)k} + (1 - \theta)u^{(I)k} \quad (19)$$

se elige  $\theta = \theta^k$  como el número que minimiza  $\|z^k(\theta) - z^{k-1}(\theta)\|^2$ . Se obtiene

$$\theta^k = \frac{(e_{u^{(I)}}^k, e_{u^{(I)}}^k - e_{u^{(1)}}^k)}{\|e_{u^{(I)}}^k - e_{u^{(1)}}^k\|^2} \quad k \geq 2 \quad (20)$$

siendo

$$\begin{aligned} e_{u^{(I)}}^k &= u^{(I)k} - u^{(I)k-1} \\ e_{u^{(1)}}^k &= u^{(1)k} - u^{(1)k-1} \end{aligned} \quad (21)$$

El valor de  $\theta^1$  debería ser prescrito de antemano.

Una interpretación al método de relajación se puede dar reescribiendo la ecuación de equilibrio en la interfase entre subdominios como

$$(S_1 + S_2)u^{(I)} = b \quad (22)$$

siendo

$$S_i u^{(I)} = \left. \frac{\partial u_i(u^{(I)}, 0)}{\partial n_i} \right|_{\Gamma_I} \quad (23)$$

el operador de Steklov–Poincaré<sup>14</sup>  $S_i$  y

$$b = -\frac{\partial u_1(0, f)}{\partial n_1} - \frac{\partial u_2(0, f)}{\partial n_2} \quad (24)$$

A partir de estas expresiones el método de iteración entre subdominios se puede interpretar alternativamente de dos maneras: como un método de subrelajación en la interfase para la partición  $S = S_2 - (-S_1)$  y tomando como matriz de relajación

$$L = S_2^{-1}[(1 - \theta)S_2 - \theta S_1] \quad (25)$$

o, también, como un método de gradiente conjugado para el sistema (22) preconditionado con la matriz  $S_2$ .

## PRECONDICIONAMIENTO

La eficiencia del método de Newton en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales es indudable. Sin embargo, el coste es demasiado elevado, ya que se requiere la resolución de un sistema lineal para cada iteración. Una forma alternativa de mejorar su eficiencia en este sentido, cuando se aplica a sistemas especialmente grandes, se basa en combinarlo para cada sistema linealizado con una técnica de gradiente conjugado preconditionado (GCP)<sup>15</sup> en lugar de emplear la factorización típica LDU del operador tangente global.

Un buen preconditionador  $C$  debe ser tal que el sistema resultante equivalente  $C^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u} = C^{-1}\mathbf{F}$  sea fácil de resolver y el número de condición de la matriz iterativa sea cercano a la unidad. La única restricción en la elección del preconditionador viene dada por el coste operacional y la preservación del carácter definido positivo y simétrico de la matriz del sistema  $\mathbf{K}$ .

Según lo anterior, se debería elegir una matriz fácil de factorizar y que sea una buena aproximación de  $\mathbf{K}$  a fin de aumentar la convergencia. En este trabajo se ha elegido como preconditionador el operador tangente<sup>16</sup>  $K_{T_0} = -[(F_{\text{int}}^1)'_{u_1}]^1$  correspondiente a la primera iteración de cada paso de carga. Este preconditionador conlleva las ventajas y desventajas características del método de Newton. Por un lado,  $K_{T_0}$  aporta información relativa al paso de carga en cuestión con lo que el número de condición de la matriz  $C^{-1}K_T$  sería cercano a la unidad; pero, por otro lado, durante la primera iteración el método sería directo al requerirse la factorización del preconditionador  $C$ .

## RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se compara la eficiencia de cada uno de los algoritmos de acoplamiento propuestos anteriormente. Para los cálculos se ha empleado una versión no lineal del programa DLEARN<sup>17</sup>, en la cual se han incorporado los elementos de contorno. Dicho programa se ha ejecutado sobre una estación de trabajado empleando doble precisión. Se ha adoptado para la zona no lineal comportamiento elastoplástico tomando como criterio plástico Drucker–Prager y en la integración de las ecuaciones elastoplásticas se ha empleado el algoritmo del punto de mínima distancia para una regla de plastificación asociada<sup>18</sup>. Asimismo la matriz rigidez tangente se ha obtenido usando el módulo elastoplástico tangente consistente<sup>19</sup>.

La convergencia del algoritmo no lineal se ha verificado mediante la norma del residuo

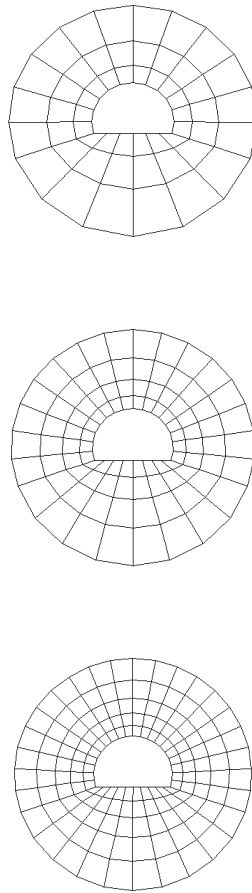
$$\|R^k\| \leq \varepsilon_R \|R^0\| \quad (26)$$



A efectos de comparación de los distintos algoritmos planteados se ha tomado un valor de la tolerancia  $\varepsilon_R = 10^{-3}$  no muy restrictivo. Para las iteraciones del algoritmo GCP la tolerancia elegida es  $10^{-2}$ .

### Excavación plana

Se ha tomado como ejemplo el de una excavación llevada a cabo a 60 m de profundidad con un radio interno de 5 m. El semiplano infinito se fijó a una distancia de tres veces el valor de este radio y fue modelizado con elementos de contorno. Por simplicidad, el material se ha considerado homogéneo con las siguientes características: módulo de Young  $E = 2,5 \times 10^6$  t/m<sup>2</sup>, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,27$ , densidad  $\gamma = 2,4$  t/m<sup>3</sup>, resistencia compresiva sin confinar  $R_c = 2240$  t/m<sup>2</sup> y ángulo de fricción interno  $\phi = 33^\circ$ . Para simular el efecto de la excavación, se ha generado internamente un estado inicial de tensiones en cada punto de integración y posteriormente se ha aplicado una presión interna para proseguir con los cálculos.



**Figura 4.** a) Mallado 1 (504 gdl); b) Mallado 2 (865 gdl); c) Mallado 3 (1320 gdl)

Para evaluar cada uno de los algoritmos de acoplamiento se han empleado tres mallados de elementos finitos con diferentes niveles de refinamiento (504, 864 y 1320 grados de libertad) (Figuras 4a, b y c). Los cálculos se llevaron a cabo en cuatro pasos de carga diferentes con los siguientes cuatro algoritmos:

- a) Algoritmo tradicional de acoplamiento (Figura 3). Los sistemas linealizados por el método de Newton-Raphson se resuelven mediante una factorización triangular de Crout (TRAD-NR-D).
- b) Algoritmo tradicional de acoplamiento (Figura 3). Los sistemas linealizados por el método de Newton-Raphson se resuelven iterativamente mediante un gradiente conjugado preconditionado (TRAD-NR-GCP).
- c) Acoplamiento con un procedimiento de relajación Dirichlet-Neumann. El parámetro de relajación se selecciona de forma dinámica y los sistemas linealizados por el método de Newton-Raphson se resuelven mediante una factorización triangular de Crout (RELAJ-NR-D).
- d) Acoplamiento con un procedimiento de relajación Dirichlet-Neumann. El parámetro de relajación se selecciona de forma dinámica y los sistemas linealizados por el método de Newton-Raphson se resuelven mediante un gradiente conjugado preconditionado (RELAJ-NR-GCP).

En las Tablas I, II y III se muestran los resultados para cada uno de los cuatro algoritmos y para los tres tipos de mallado. En el caso de usar un método de relajación se han fijado de antemano tres iteraciones en cada paso de carga.

De los resultados se observa que el método de relajación es más eficiente en cuanto a tiempo de CPU que los métodos tradicionales de acoplamiento y, además, el fenómeno se hace más evidente a medida que aumenta el número de grados de libertad del problema. Esto parece lógico, ya que en el segundo caso se requiere la resolución del subsistema  $A_{11}^{-1}A_{12}$  en cada iteración de Newton y éste se incrementa progresivamente con el número de columnas no nulas en  $A_{12}$  y, por tanto, con los grados de libertad.

En el método de relajación el GCP es más óptimo que la factorización de Crout, ya que sólo se necesita resolver  $A_{11}\Delta u_1 = R_1$  en cada iteración de Newton y el número de factorizaciones necesarias es menor cuando se emplea el GCP. Por ello, la solución RELAJ-NR-GCP se muestra como la más óptima de las cuatro propuestas.

Criterio	TRAD-NR-D	TRAD-NR-PCG	RELAJ-NR-D	RELAJ-NR-PCG
Nº pasos carga	4	4	4	4
Nº iteraciones global	18	18	49	50
Nº iteraciones relajación	—	—	12	12
Nº iter.global/paso	4,5	4,5	12,25	12,5
Nº iter.global /iter. relajación	—	—	4,08	4,17
Nº factorizaciones	18	4	49	12
Nº subiteraciones	—	1024	—	146
Nº subiter./iter. global	—	56,89	—	2,92
Total CPU (s)	390	639,004	369,020	312,027

**Tabla I.** Excavación (mallado 1-504 gdl)

Criterio	TRAD-NR-D	TRAD-NR-PCG	RELAJ-NR-D	RELAJ-NR-PCG
Nº pasos carga	4	4	4	4
Nº iteraciones global	21	21	52	51
Nº iteraciones relajación	–	–	12	12
Nº iter.global/paso	5,25	5,25	13	12,75
Nº iter.global /iter. relajación	–	4,33	4,25	
Nº factorizaciones	21	4	52	12
Nº subiteraciones	–	1451	–	186
Nº subiter./iter. global	–	69,09	–	3,65
Total CPU (s)	1232,05	1749,95	929,969	690,031

**Tabla II.** Excavación (mallado 2–864 gdl)

Criterio	TRAD-NR-D	TRAD-NR-PCG	RELAJ-NR-D	RELAJ-NR-PCG
Nº pasos carga	4	4	4	4
Nº iteraciones global	19	20	50	50
Nº iteraciones relajación	–	–	12	12
Nº iter.global/paso	4,75	5	12,5	12,5
Nº iter.global /iter. relajación	–	4,17	4,17	
Nº factorizaciones	19	4	50	12
Nº subiteraciones	–	1641	–	174
Nº subiter./iter. global	–	82,05	–	3,48
Total CPU (s)	2882,05	4154,98	1881,06	1325,98

**Tabla III.** Excavación (mallado 3–1320 gdl)

	$\theta$ DINÁMICO	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,5$	$\theta = 0,7$
Nº pasos carga	4	4	4	4	diverge
Nº iter.global	52	46	48	73	diverge
Nº iter.global/paso	13	11,5	12	18,25	diverge
Total CPU (s)	323,97	286,84	299,32	408,498	diverge

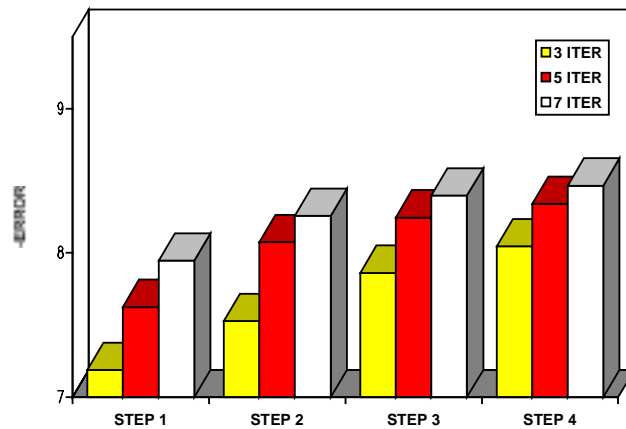
**Tabla IV.** Algoritmo de relajación para diferentes valores de  $\theta$

## Parámetro de relajación

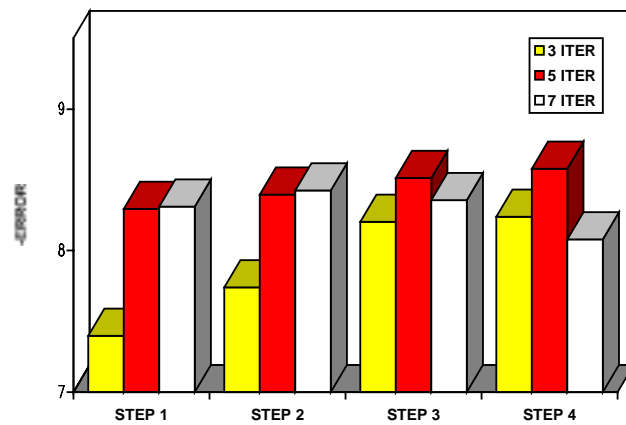
En todos los cálculos presentados hasta ahora el parámetro de relajación  $\theta$  se ha determinado dinámicamente. En la Tabla IV se muestran resultados en caso de elegir un valor constante de dicho parámetro. A la vista de los mismos se puede concluir que valores menores de 0,5 son óptimos, mientras que valores más altos son problemáticos e incluso el algoritmo puede llegar a divergir.

Igualmente, en el apartado anterior se comentó que se habían prefijado tres iteraciones de relajación en cada paso de carga. La elección de este número no fue aleatoria, sino que fue determinada a partir de cálculos numéricos previos.

En la Figura 5 se muestra la variación de la variable ERROR con el número de iteraciones de relajación siendo ERROR el logaritmo natural del valor máximo del error en la interfase entre la solución de elementos de contorno y la de elementos finitos para la misma iteración de relajación. Los resultados se muestran para dos situaciones, valor de  $\theta$  constante e igual a 0,3 (Figura 5a) y valor elegido de forma dinámica (Figura 5b).



a)



b)

**Figura 5.** Evolución de ERROR con el número de iteraciones de relajación: a)  $\theta = 0,3$ ; b)  $\theta$  dinámico

De los resultados se puede deducir que un valor más alto en el número de iteraciones no tiene por qué producir mejores resultados cuando  $\theta$  se selecciona dinámicamente. Sin embargo, no sucede lo mismo en caso de  $\theta$  constante, ya que la seguridad aumenta de forma monótona con el número de iteraciones, aunque probablemente no sea suficiente para compensar el incremento de coste producido.

## CONCLUSIONES

Se han propuesto diversas alternativas para llevar a cabo el acoplamiento MEF-MEC en problemas no lineales definidos sobre un semiplano infinito. Aparte de los métodos tradicionales, se ha presentado otro basado en una resolución separada de los dominios MEF y MEC. Esta última propuesta tiene la ventaja de desacoplar la solución lineal de la no lineal y, por tanto, de permitir una resolución independiente de los subproblemas factible de una implementación en paralelo dentro de un entorno multiproceso. Además, se ha mostrado como la solución más óptima en tiempo de cálculo, lo que habría sido más evidente todavía en el caso de un cálculo en paralelo.

Se ha mostrado la importancia en la elección del parámetro de relajación a fin incluso de garantizar la convergencia. Valores menores de 0,5 o elegidos dinámicamente son convenientes.

Con respecto a las alternativas tradicionales, de las dos posibilidades presentadas se ha mostrado más eficiente desde un punto de vista computacional aquella, que trata al semiplano infinito como si fuese no lineal al permitir mantener la simetría y la estructura en banda de la matriz MEF.

Se ha llevado a cabo también una comparación entre la factorización LDU convencional del operador tangente global y los métodos iterativos basados en una técnica de gradiente conjugado con preconditionador (GCP) para resolver el sistema resultante del problema linealizado. Se ha concluido que, en cálculos a gran escala, la segunda técnica es más potente.

## REFERENCIAS

- 1 M. Panet, “*Les calcul des tunnels par la méthode convergence-confinement*”, Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, París, (1995).
- 2 R.I. Borja, “Analysis of incremental excavation based on critical state theory”, *J. Geotech. Engng.*, ASCE, Vol. **116**, N° 6, pp. 964–985, (1990).
- 3 A. Whittle, Y.M. Hashash y R.V. Whitman, “Analysis of deep excavations in Boston”, *J. Geotech. Engng.*, ASCE, Vol. **119**, N° 1, pp. 69–90, (1993).
- 4 R. García, “Aplicación del método de los elementos de contorno y de la teoría de daños al análisis y diseño de túneles excavados en roca”, *Boletín Técnico IMME*, Vol. **33**, N° 2, pp. 35–77, (1995).
- 5 O.C. Zienkiewicz, D. W. Kelly y P. Bettles, “The coupling of the finite element and boundary solution procedures”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **11**, pp. 355–375, (1977).
- 6 I. Guven y E. Madenci, “Transient heat conduction analysis in a piecewise homogeneous domain by a coupled boundary and finite element method”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, a publicar.

- 7 M. Dryja y O.B. Widlund, “Towards an unified theory on domain decomposition algorithms for elliptic problems”, in “*Domain decomposition methods for partial differential equations*”, Vol. 3, SIAM, Philadelphia, pp. 3–21, (1990).
- 8 P.L. Lions, “On the Schwarz alternating method I”, “*Domain decomposition methods for partial differential equations*”, SIAM, Philadelphia, (1988).
- 9 P.L. Lions, “On the Schwarz alternating method II”, “*Domain decomposition methods for partial differential equations II*”, SIAM, Philadelphia, (1989).
- 10 C.A. Brebbia y J. Domínguez, “*Boundary elements: an introductory course*”, Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill, (1989).
- 11 G. Beer y J.O. Watson, “*Introduction to finite and boundary element methods for engineers*”, John Wiley & Sons, (1992).
- 12 F.J. Rizzo y D.J. Shippy, “The boundary element method in thermoelasticity”, “*Developments in boundary element methods*, Vol. 1, Applied Science Publishers, pp. 155–172, (1979).
- 13 L.D. Marini y A. Quarteroni, “An iterative procedure for domain decomposition methods: a finite element approach”, “*Domain decomposition methods for partial differential equations*”, Vol. 1, SIAM, Philadelphia, pp. 129–143, (1988).
- 14 V.I. Agoshkov, “Poincaré–Steklov’s operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces”, “*Domain decomposition methods for partial differential equations*”, Vol. 1, SIAM, Philadelphia, pp. 73–112, (1988).
- 15 M. Papadrakakis y C. J. Gantes, “Truncated Newton methods for nonlinear finite element analysis”, *Computers & Structures*, Vol. **30**, pp. 705–714, (1988).
- 16 R.I. Borja, “Composite Newton-PCG and quasi-Newton iterations for nonlinear consolidation”, *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **86**, pp. 27–60, (1991).
- 17 T.J.R. Hughes, “*The finite element method*”, Prentice-Hall, (1987).
- 18 J.C. Simó, J.G. Kennedy y S. Govindjee, “Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **26**, pp. 2161–2185, (1988).
- 19 J.C. Simó y R.L. Taylor, “Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity”, *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **48**, pp. 101–118, (1985).