

Un modelo monodimensional para el análisis de barras de pared delgada de material compuesto

Antonio Foces Mediavilla*, José Antonio Garrido García† y Ali Vasallo Belver**

Aula UVA-CIMNE, ETS de Ingenieros Industriales
Universidad de Valladolid
Paseo del Cauce, s/n, 47011 Valladolid, España
Tel.: 34 983 423386*/91**; Fax: 34 983 423631
e-mail: foces@eis.uva.es, alivb@eis.uva.es

Resumen

Se presenta un modelo monodimensional para el análisis de barras con sección de pared delgada constituidas por materiales compuestos. Cada pared está formada por un conjunto de láminas ortótropas que dan lugar a laminados que pueden ser incluso anisótropos. La formulación hace uso de los modelos de Navier-Bernoulli y Vlasov para describir la flexión y la torsión, respectivamente, a nivel de barra, y del modelo de Love-Kirchhoff para plantear las relaciones de comportamiento a nivel de lámina. Como primer resultado, se consigue una matriz de rigidez de dimensiones 5×5 que relaciona los esfuerzos y las deformaciones monodimensionales a nivel de sección. Posteriormente, utilizando el Principio de los Trabajos Virtuales y las funciones de forma apropiadas se obtiene la matriz de rigidez de un elemento tipo viga. El método es aplicable a barras con secciones de forma arbitraria con cualquier esquema de laminado, tanto abiertas como cerradas. Se presentan ejemplos de secciones con rigidez circunferencial uniforme (CUS) y con rigidez circunferencial asimétrica (CAS), para el estudio de los acoplamientos axil-torsión y flexión-torsión, respectivamente. La técnica ha sido validada comparando los resultados obtenidos con los deducidos por otros autores.

Palabras clave: barra, pared delgada, material compuesto, laminado, acoplamientos elásticos, modelo monodimensional, elementos finitos.

ONE-DIMENSIONAL MODEL FOR THE ANALYSIS OF THIN-WALLED COMPOSITE BEAMS

Summary

One-dimensional model is presented for the analysis of thin-walled composite beams. Each wall is made of orthotropic layers bonded together to form a laminate that can be anisotropic. The theory uses the Navier-Bernoulli and Vlasov models to describe bending and twist, respectively, at beam level, and the Love-Kirchhof model to define the constitutive equations at lamina level. As first result, a 5×5 cross-sectional stiffness matrix is obtained that relates one-dimensional generalized beam forces and moments to one-dimensional generalized displacements. Later, the cross-sectional stiffness matrix of one beam element is obtained using The Virtual Work Principle and the appropriate shape functions. This formulation allows the modeling of either open-section or closed-section beams of arbitrary section shape with arbitrary layup. Two examples of sections with circumferentially uniform stiffness (CUS) and circumferentially asymmetric stiffness (CAS) are presented for the study of extension-twist and bending-twist elastic couplings, respectively. The technique has been validated comparing the results obtained with the results deduced by other authors.

Keywords: beam, thin-walled, composite, laminated, elastic couplings, one-dimensional model, finite elements.

INTRODUCCIÓN

La aplicación de materiales compuestos avanzados en la fabricación de elementos estructurales se ha incrementado notablemente durante las dos últimas décadas. El acero o el aluminio han ido cediendo ciertos usos a este tipo de materiales, ya que con ellos se pueden obtener mejores propiedades específicas. Si bien el avance tecnológico y la disminución de costes de producción han permitido aplicar estas nuevas soluciones a diferentes sectores industriales, como por ejemplo el del automóvil, son las industrias tecnológicamente punteras como la aeroespacial o la aeronáutica quienes siguen demandando con fuerza este tipo de materiales. En concreto, elementos estructurales tales como las palas de helicópteros o los largueros de las alas de las aeronaves se proyectan a partir de barras de pared delgada y sección en cajón constituidas de material compuesto. Este tipo de piezas ligeras poseen mejor resistencia a la fatiga y ofrecen características de fabricación innovadoras y rentables.

Como han puesto de manifiesto otros autores^{7,15} los acoplamientos elásticos tienen una fuerte influencia en la respuesta estática y dinámica de las palas de helicópteros en servicio. Estos acoplamientos son debidos a la naturaleza direccional (anisotropía) de los materiales compuestos y se consiguen mediante la variación de ciertos parámetros del composite, tales como el ángulo de orientación de las fibras o la secuencia de apilamiento de las láminas. Destacan particularmente los laminados con rigidez circunferencial uniforme (CUS), y con rigidez circunferencial asimétrica (CAS), por los acoplamientos axil-torsión y flexión-torsión que presentan, respectivamente. Una de las aplicaciones más espectaculares de esta tecnología es el empleo de estructuras de material compuesto con acoplamiento elástico flexión-torsión para evitar la divergencia aerodinámica de las alas de los aviones dispuestas en flecha negativa^{9,20}.

Jung, Nagaraj y Chopra¹¹ han descrito el estado del arte en lo referente a las técnicas para la obtención de modelos capaces de reproducir la respuesta de este tipo de barras ante diferentes estados de carga, poniendo de manifiesto la importancia de los acoplamientos elásticos y del alabeo de las secciones. Para caracterizar estos fenómenos se puede plantear el problema desde dos perspectivas diferentes.

Uno de estos planteamientos consiste en el Análisis Asintótico Variacional de la Sección Transversal de la Barra (VABS)^{1,19,21,22}. Ésta herramienta permite dividir un problema general de elasticidad no lineal 3-D en dos partes, una lineal 2-D para analizar la sección transversal que permita obtener sus características y otra no-lineal 1-D en la que se estudia la barra considerando las características de la sección antes obtenidas. Se trata de un modelo de elementos finitos en el que se desprecian los términos poco significativos, con la consiguiente pérdida de perspectiva física en la formulación.

La otra tendencia para el análisis de barras de material compuesto consiste en desarrollar modelos analíticos monodimensionales basados en la combinación de las teorías clásicas de barras, de láminas y de materiales compuestos. Estos modelos tienen la ventaja de ser simples y útiles para realizar diseños preliminares y para optimización. Su formulación permite plantear el problema tanto en desplazamientos como en fuerzas. El primero ha sido aplicado por autores como Rehfield, Atilgan y Hodges¹⁷, Smith y Chopra¹⁸, Chandra y Chopra^{3,4}, Johnson⁸, Patil y Johnson¹⁶, Zhang y Smith²³. Consiste en plantear un campo de desplazamientos adecuado a nivel de lámina y a partir de él obtener la energía de deformación y la matriz de rigidez de la sección transversal de la barra. De otra parte, el planteamiento en fuerzas fue aplicado por Mansfield y Sobey¹⁴ y por Libove¹³ a barras de pared delgada de material compuesto de sección cerrada. En él se asume directamente un campo de tensiones a nivel de lámina.

Como alternativa a estos dos planteamientos extremos, Jung, Nagaraj y Chopra¹⁰ desarrollaron un modelo mixto combinando ambos y lo aplicaron con éxito tanto a secciones abiertas como a cerradas. Estos autores plantearon el funcional de energía semicompleman-

taria de Reissner y obtuvieron una matriz de rigidez de dimensiones 7×7 (considerando la teoría de Timoshenko) por derivación de las ecuaciones que relacionan los desplazamientos generalizados a nivel de barra con las correspondientes fuerzas generalizadas. Recientemente, Jung y Park¹² han aplicado este modelo mixto al estudio de secciones multicelulares.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo analítico monodimensional para describir el comportamiento a flexión y a torsión de una barra con sección de pared delgada hecha de material compuesto. La metodología propuesta parte del modelo de lámina de Love–Kirchhoff para relacionar los esfuerzos con las deformaciones a nivel de lámina. En dicha relación se introducen las deformaciones generalizadas de barra correspondientes a los modelos de Navier–Bernoulli y Vlasov mediante consideraciones geométricas. A continuación, integrando los esfuerzos de lámina en la sección se obtienen los esfuerzos de barra en función de las deformaciones generalizadas de barra. Dicha relación se establece a través de una matriz de rigidez de dimensiones 5×5 . Por último, utilizando el Principio de los Trabajos Virtuales y las funciones de forma apropiadas se llega a la matriz de rigidez de un elemento tipo barra, la cual puede ser utilizada para el análisis de barras sometidas a flexión–torsión. Para finalizar, se presentan dos ejemplos que ilustran la aplicabilidad de la técnica descrita.

FORMULACIÓN TEÓRICA

En la Figura 1a) se muestra la geometría de una viga de material compuesto de sección de pared delgada con forma arbitraria. En dicha viga se considerará un sistema de referencia global $Oxyz$, con origen en una sección arbitraria. Para referir localmente las variables asociadas a los puntos de la sección se utilizará otro sistema de referencia $O'xns$ [Figura 1b)], con origen en un extremo libre si la sección es abierta y en un punto arbitrario de la línea media de la sección si ésta es cerrada. El eje local $O's$ es tangente a la línea media de la sección en el punto considerado; el eje $O'x$ es paralelo al eje Ox global de la barra y la tercera dirección, definida por el eje $O'n$, lleva la dirección del espesor, de modo que con los dos anteriores forme un triedro directo. Los vectores unitarios según los ejes coordenados serán \vec{i}_x , \vec{j}_y y \vec{k}_z en el sistema global y \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} en el sistema local. Para describir el comportamiento de una rebanada genérica de barra, con longitud dx , se considerará la interacción entre elementos lámina de esa misma longitud y área $dx ds$.

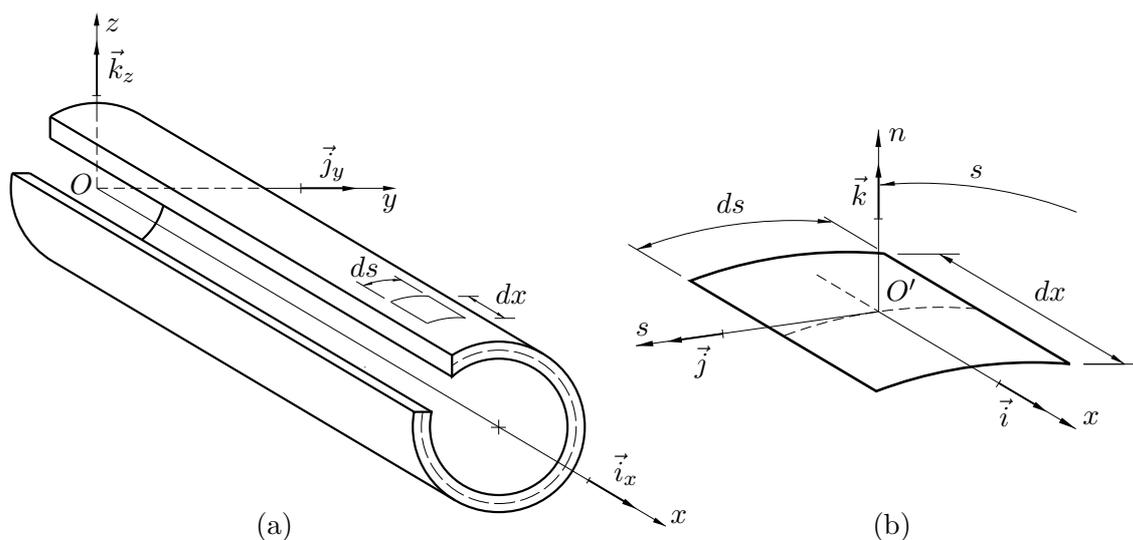


Figura 1. Sistemas de coordenadas

Cinemática

Sean U , V y W los desplazamientos de la línea media de la viga según los ejes globales Ox , Oy y Oz , respectivamente, y ϕ el giro por torsión de cada sección alrededor del eje Ox . Las deformaciones locales a nivel de lámina según los ejes $O'x$, $O'n$ y $O's$ se denotarán por u , v_n y v_t , respectivamente. Según la teoría de Love–Kirchhoff, el campo de desplazamientos en coordenadas locales está definido por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v_t \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^0 + n \psi_x \\ v_t^0 + n \psi_s \\ v_n^0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

siendo u^0 , v_t^0 y v_n^0 los desplazamientos de los puntos materiales de la superficie de referencia de la lámina (superficie media) y ψ_x y ψ_s las rotaciones de la normal a la línea de referencia alrededor de los ejes $O's$ y $O'x$, respectivamente. Como es sabido, en términos de ecuaciones de compatibilidad en coordenadas locales, el campo de deformaciones es

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^0 \\ v_{t,s}^0 + \frac{v_n^0}{a} \\ u_{,s}^0 + v_{t,x}^0 \\ v_{n,x}^0 + \psi_x \\ v_{n,s}^0 - \frac{v_t^0}{a} + \psi_s \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{ss} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{s,s} \\ \psi_{x,s} + \psi_{s,x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

donde a es el radio de curvatura de la lámina en el punto considerado y se ha usado la notación tensorial para indicar las derivaciones.

De otra parte, utilizando relaciones puramente geométricas, los desplazamientos de la superficie de referencia de la lámina pueden ser expresados en términos de las deformaciones globales de la viga como

$$\begin{aligned} v_t^0 &= V y_{,s} + W z_{,s} + r \phi \\ v_n^0 &= V z_{,s} - W y_{,s} - q \phi \end{aligned} \quad (4)$$

donde, al adoptar el modelo de Navier–Bernoulli, se ha considerado $\psi_s = \phi$, pues en él no se considera la deformación por cortante. Las distancias r y q son las existentes entre el centro de esfuerzos cortantes y las rectas tangente y normal, respectivamente, a la línea media de la sección en el punto considerado (Figura 3).

Derivando adecuadamente las ecuaciones (4) y sustituyendo el resultado en las expresiones (2) y (3), se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x}^0 \\ \gamma_{xs} &= u_{,s}^0 + V_{,x} y_{,s} + W_{,x} z_{,s} + r \phi_{,x} \\ \kappa_{xx} &= \beta_{z,x} z_{,s} - \beta_{y,x} y_{,s} + q \phi_{,xx} \\ \kappa_{xs} &= 2 \phi_{,x} + \frac{1}{a} (\beta_z y_{,s} + \beta_y z_{,s} - r \phi_{,x}) \end{aligned} \quad (5)$$

En las ecuaciones anteriores, aún no ha sido deducido el desplazamiento axial u_x^0 . Para su determinación es necesario integrar la expresión de las deformaciones angulares γ_{xs} entre el

origen de la coordenada s y el punto considerado en la línea media de la sección. De dicha integral se obtiene

$$u_x^0 = U + \beta_z y + \beta_y z - \phi_{,x} \omega \quad (6)$$

estando ω definido como

$$\omega = \int_0^s r ds \quad (7)$$

Con ello, la primera de las ecuaciones (5) se transforma en

$$\varepsilon_{xx} = U_{,x} + \beta_{z,x} y + \beta_{y,x} z - \phi_{,x} \omega \quad (8)$$

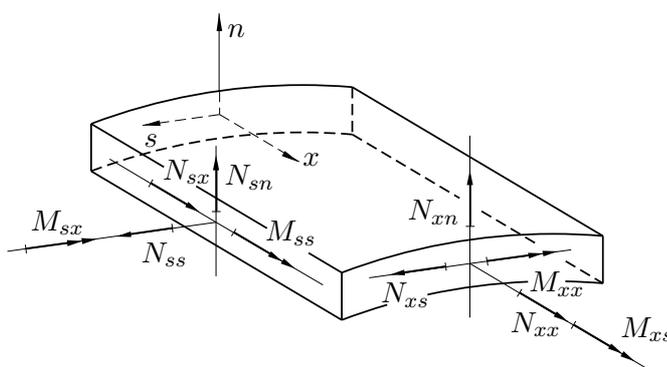


Figura 2. Esfuerzos sobre un elemento de lámina

Ecuaciones de comportamiento

Con relación a la Figura 2, donde se muestran los sentidos positivos de los esfuerzos aplicados sobre un elemento diferencial de lámina, las ecuaciones de comportamiento de una lámina de material compuesto expresadas en forma matricial son

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{ss} \\ N_{xs} \\ M_{xx} \\ M_{ss} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{16} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{ss} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

siendo A_{ij} , B_{ij} y D_{ij} las rigideces de la lámina asociadas al esfuerzo axial, al acoplamiento flexión-axil y a la flexión, respectivamente. Asumiendo, al igual que otros investigadores¹⁰, que el esfuerzo N_{ss} es despreciable frente al resto ($N_{ss} \simeq 0$), se puede expresar la deformación ε_{ss} en función del resto de deformaciones a partir de la segunda de las ecuaciones anteriores. Utilizando este resultado y reordenando, la expresión (9) se convierte en

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \\ \gamma_{xs} \\ \kappa_{ss} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n\varepsilon} & A_{n\kappa} & A_{n\phi} & A_{n\gamma} & A_{n\tau} \\ A_{n\kappa} & A_{m\kappa} & A_{m\phi} & A_{m\gamma} & A_{m\tau} \\ A_{n\phi} & A_{m\phi} & A_{\phi\phi} & A_{\phi\gamma} & A_{\phi\tau} \\ -A_{n\phi} & -A_{m\gamma} & -A_{\phi\gamma} & A_{\gamma\gamma} & A_{\gamma\tau} \\ -A_{n\tau} & -A_{m\tau} & -A_{\phi\tau} & A_{\gamma\tau} & A_{\tau\tau} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{xs} \\ N_{xs} \\ M_{ss} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Ecuaciones de equilibrio

Según la teoría clásica de láminas, las ecuaciones de equilibrio de un elemento diferencial de lámina de pequeño espesor (se desprecian N_{sn} y N_{xn}) son las siguientes:

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xs,s} &= 0 \\ N_{xs,x} &= 0 \\ M_{xx,x} + M_{xs,s} &= 0 \\ M_{xs,x} + M_{ss,s} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Determinación de N_{xs} y M_{ss}

A partir de las ecuaciones de equilibrio (11) se puede deducir que N_{xs} consta de una parte constante y de otra que depende de la integral en s de $N_{xx,x}$. Asimismo, M_{ss} está formado por un término constante, otro que varía linealmente con s y un tercero que depende de la integral en s de $M_{xs,x}$. Despreciando los sumandos que dependen de las integrales en s , por ser función de las segundas derivadas de las deformaciones, se puede escribir

$$\begin{aligned} N_{xs} &= N_{xs}^0 \\ M_{ss} &= M_{ss}^0 + M_{ss}^y y + M_{ss}^z z \end{aligned} \quad (12)$$

Para obtener el valor de las constantes N_{xs}^0 , M_{ss}^0 , M_{ss}^y y M_{ss}^z se debe imponer las siguientes condiciones obtenidas al considerar la unicidad del campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} \int_S \gamma_{xs} ds &= 2 A_0 \phi_{,x} \\ \int_S \kappa_{ss} ds &= 0 \\ \int_S \kappa_{ss} y ds &= 0 \\ \int_S \kappa_{ss} z ds &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

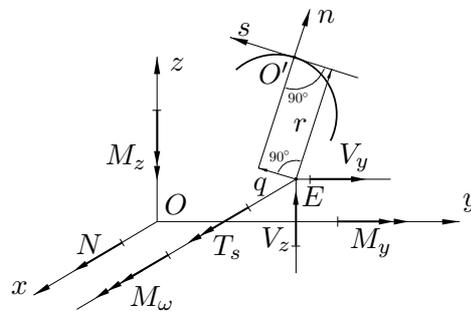


Figura 3. Esfuerzos de barra

Fuerzas y momentos generalizados de barra

En la Figura 3 se muestran los sentidos positivos de los esfuerzos de barra. Éstos se obtienen por integración en la sección de los esfuerzos de lámina. Es decir,

$$\begin{aligned} N &= \int_S N_{xx} ds \\ M_y &= \int_S [N_{xx} z - M_{xx} y_{,s}] ds \\ M_z &= \int_S [N_{xx} y + M_{xx} z_{,s}] ds \\ M_\omega &= \int_S [-N_{xx} \omega + M_{xx} q] ds \\ T_s &= \int_S [2 M_{xs} + N_{xs} r] ds \end{aligned} \quad (14)$$

donde N es la fuerza axial, M_y y M_z son los momentos flectores alrededor de los ejes Oy y Oz , respectivamente, T_s es el momento torsor de St. Venant y M_ω es el bimomento de Vlasov.

La matriz de rigidez de la sección transversal de la viga, que relaciona los esfuerzos con las deformaciones de barra, se obtiene a partir de las ecuaciones (14) sin más que expresar en ellas los esfuerzos de lámina en función de las deformaciones de barra utilizando las expresiones (5), (8), (10) y (12). Se trata de una matriz simétrica de dimensiones 5×5 que representa el modelo de Navier–Bernoulli respecto a flexión y de Vlasov en lo relativo a torsión:

$$\mathbf{F} = \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q} \quad (15)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T &= \{ N \quad M_y \quad M_z \quad T_s \quad M_\omega \} \\ \mathbf{q}^T &= \{ U_{,x} \quad \beta_{y,x} \quad \beta_{z,x} \quad \phi_{,x} \quad \phi_{,xx} \} \end{aligned} \quad (16)$$

Análisis mediante el método de los elementos finitos

Para la obtención de la matriz de rigidez de un elemento tipo viga (beam) se aplica el Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\int_{V^{(e)}} \delta \varepsilon \sigma dV = \delta q^{(e)} f^{(e)} \quad (17)$$

Para reproducir el comportamiento del elemento tipo viga se utilizan dos tipos de funciones de forma. Para el desplazamiento axial U se emplea una función Lagrangiana de dos nodos. Las rotaciones β_y y β_z son interpoladas utilizando otra función Hermítica de dos nodos de manera que se satisfaga la condición de continuidad C^1 en cada nodo del elemento. Finalmente, para aproximar el giro por torsión ϕ y sus derivadas se emplea también una función Hermítica de dos nodos. Así, cada uno de los dos nodos del elemento tiene asociados siete grados de libertad (con sus correspondientes esfuerzos), que son las tres translaciones y las tres rotaciones respecto de cada eje, así como el alabeo. Es decir, cada elemento tiene un total de 14 grados de libertad. Llevando esta aproximación a la ecuación (17) se obtiene la relación

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K} \mathbf{q}_g \quad (18)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez del elemento tipo viga, \mathbf{F}_g el vector de cargas y \mathbf{q}_g es el vector de desplazamientos generalizados.

El elemento tipo viga de material compuesto, cuyo desarrollo se ha expuesto anteriormente, ha sido implementado con éxito en el paquete de software KRATOS^{5,6}, con el que se han obtenido los resultados, entre otros, que se exponen en el siguiente apartado.

EJEMPLOS

Se presentan dos ejemplos que ilustran la aplicabilidad de la técnica descrita. En el primero se analizan dos secciones abiertas (una en doble T y otra en T). El segundo se dedica al estudio de una sección en cajón bajo dos configuraciones de laminado (CUS y CAS).

Ejemplo 1

La primera parte de este problema consiste en el estudio de una barra en voladizo de sección como la representada en la Figura 4a), cuyo extremo no empotrado tiene impedidos los desplazamientos de alabeo, aunque puede sufrir desplazamientos no axiales, incluidos giros por torsión. Estas condiciones cinemáticas suelen darse, por ejemplo, en determinadas palas de helicópteros, donde secciones como la representada en la mencionada figura constituyen el cuerpo resistente del elemento estructural ligero que une la pala al rotor. A efectos de comparación de algunos de los resultados presentados con los obtenidos por otros autores, se ha adoptado el sistema anglosajón de unidades, siendo la longitud de la pieza 30 in. Las dimensiones de la sección y los valores de las constantes elásticas del material (AS4/3501-6 grafito/epoxy) se especifican en la Tabla I. En cuanto a la orientación de las fibras de las láminas se refiere, los casos estudiados son los señalados en la Figura 4a), donde puede observarse que en el alma se disponen láminas intercaladas con fibras orientadas a 0° y 90° , respectivamente.

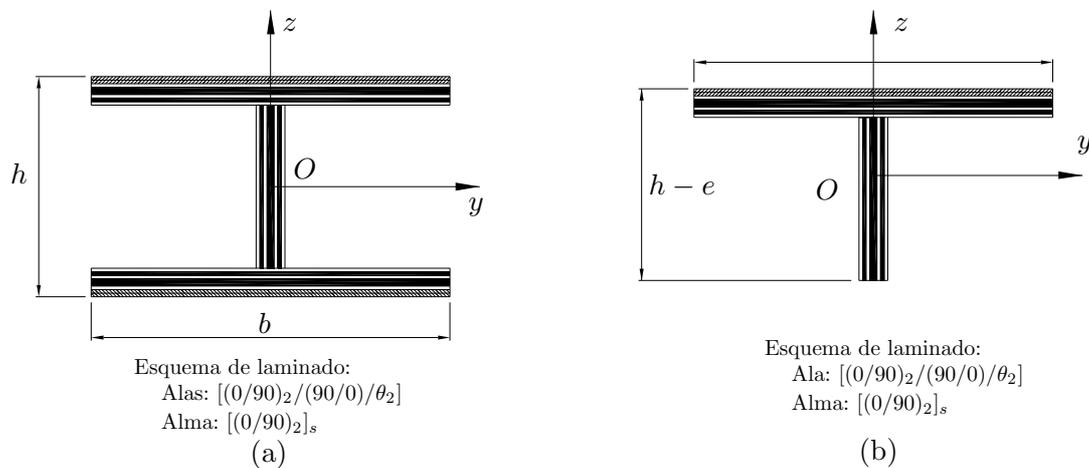


Figura 4. Secciones consideradas en el Ejemplo 1

Característica	Valor
E_{11}	141,90 GPa ($20,59 \cdot 10^6$ psi)
E_{22}	9,78 GPa ($1,42 \cdot 10^6$ psi)
G_{12}	6,13 GPa ($0,89 \cdot 10^6$ psi)
ν_{12}	0,42
Espesor de la lámina (e)	0,127 mm (0,005 in)
Canto (h)	12,7 mm (0,5 in)
Ancho (b)	25,40 mm (1,00 in)
Longitud de viga (L)	762,12 mm (30 in)

Tabla I. Propiedades elásticas y geométricas del Ejemplo 1

Al objeto de caracterizar los acoplamientos elásticos, se han analizado dos estados de carga simples. El primero consiste en una carga unitaria concentrada normal a la directriz, y el segundo con sólo un momento torsor de valor unidad, estando ambas cargas aplicadas en la sección extrema no empotrada.

Se comenzará exponiendo los resultados conseguidos para la sección en doble T [Figura 4a)]. En la Figura 5 se muestra la variación del giro por flexión cuando se dispone una configuración simétrica del laminado con fibras orientadas 15° y se aplica una carga normal a la directriz. Junto a ella se muestra la curva obtenida por Jung, Nagaraj y Chopra¹⁰, a la que se ajusta extraordinariamente, y los valores experimentales que derivan de los ensayos realizados por Chandra y Chopra³.

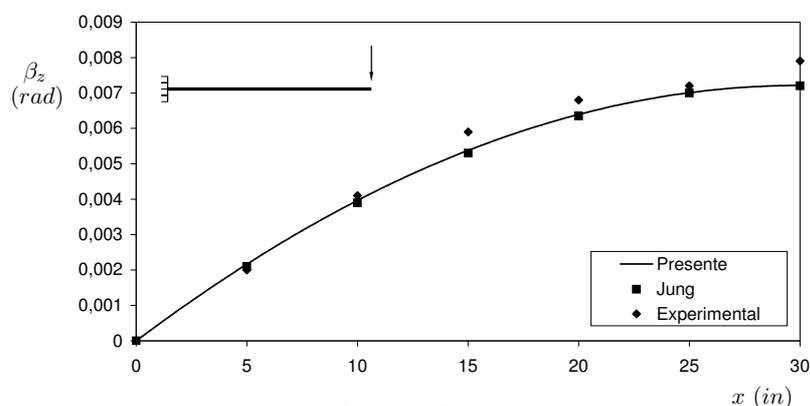


Figura 5. Giros de flexión (doble T)

Los giros por torsión se muestran en la Figura 6. Se aprecia que los resultados coinciden con los deducidos por Jung, Nagaraj y Chopra¹⁰. Sin embargo, el estudio experimental arroja valores algo mayores, aunque en ambos casos siguen la misma evolución. En cuanto a las magnitudes, se tiene que el del giro inducido debido al acoplamiento flexión-torsión, originado por la orientación de las fibras y por el carácter simétrico de la configuración del laminado, es del orden de diez veces menor que en el problema de torsión.

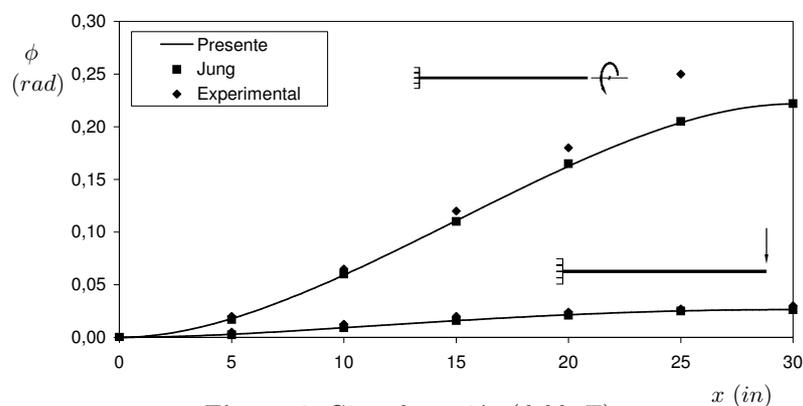


Figura 6. Giros de torsión (doble T)

Las Figuras 7 y 8 recogen la primera y la segunda derivada del giro inducido, respectivamente. En el problema de flexión, el alabeo crece rápidamente desde el empotramiento hasta la sección situada aproximadamente a un tercio de la longitud de la barra, para decrecer hasta anularse en la sección exterior donde se han restringido los desplazamientos normales. Como es lógico, estos son mucho mayores cuando la barra es sometida a torsión, resultando una ley simétrica como consecuencia de haber restringido los movimientos normales en el extremo no empotrado y de que la ley de giros presenta simetría puntual respecto a la sección central de la pieza. Por su parte, en ambos casos, el bimomento decaer desde el empotramiento hasta anularse en la sección donde el alabeo es máximo, con el consiguiente cambio de signo que afecta al resto de la pieza (Figura 8). En consonancia

con los resultados anteriores, la magnitud bimomento es menor en el problema de torsión inducida por flexión que en el de torsión, presentando simetría puntual en este caso la curva que lo define. El cambio de signo del mismo refleja un diferente comportamiento cualitativo respecto a la flexión local de las alas.

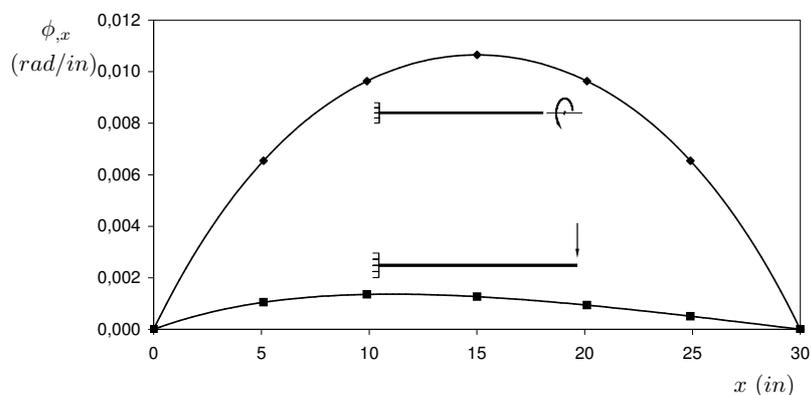


Figura 7. Curvas de alabeo (doble T)

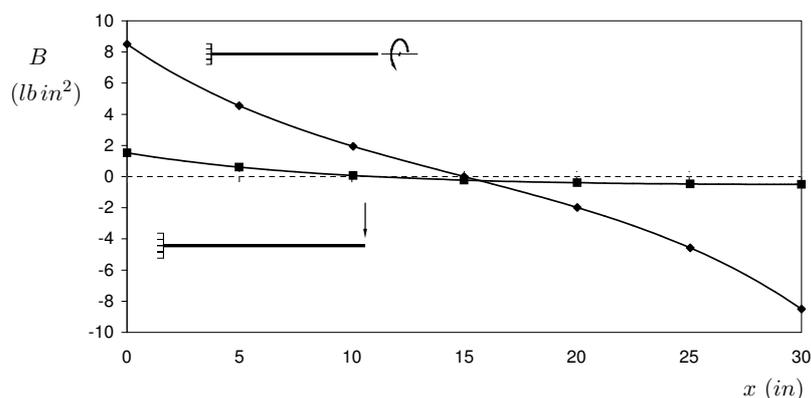


Figura 8. Curvas de bimomento (doble T)

En la Figura 9 se ha representado el valor del bimomento en el empotramiento para distintas orientaciones de las fibras del laminado cuando la barra está sometida a torsión y se permite el alabeo de la sección exterior. Se aprecia que la sección debe desarrollar mayores tensiones normales para hacer efectiva la restricción al alabeo cuando las fibras se orientan a 0° y que el material debe esforzarse menos a medida que va aumentando la inclinación de las fibras. A 45° se tiene un mínimo relativo y para inclinaciones mayores vuelve a crecer el bimomento. Esta conclusión es válida también cuando la configuración del laminado es antisimétrica.

A fin de conocer la influencia de la rigidez torsional en las variables de diseño de este tipo de barras, se ha estudiado también el caso en el que la sección de la barra se obtiene eliminando el ala inferior de la doble T [Figura 4b)]. En las Figuras 10 y 11 se muestran unas comparativas entre ambas secciones. En la primera se ha representado el giro por torsión para distintos ángulos de las fibras del laminado de las alas. Como puede apreciarse, en el perfil en T la torsión es prácticamente del tipo uniforme, mientras que para la doble T la torsión es del tipo no uniforme. Como consecuencia de ello, la ley de alabeo presenta la forma que se indica en la Figura 11. Observando esta figura, junto con la anterior, se comprueba que el perfil en doble T trabaja mejor a torsión, pues tanto el giro como el alabeo son más pequeños.

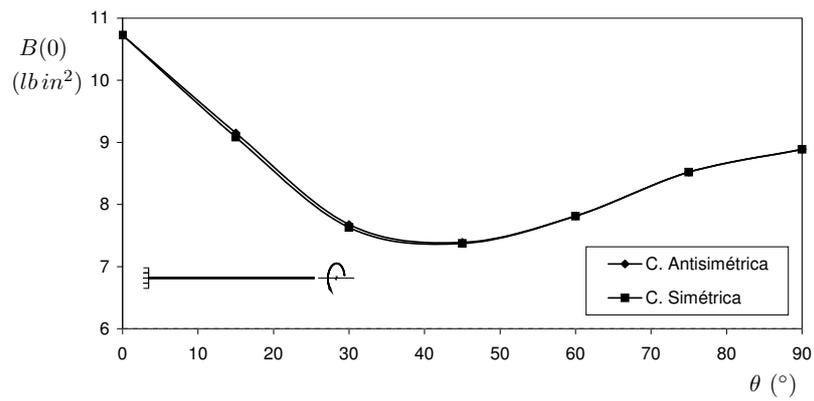


Figura 9. Valor del bimomento en el empotramiento (doble T)

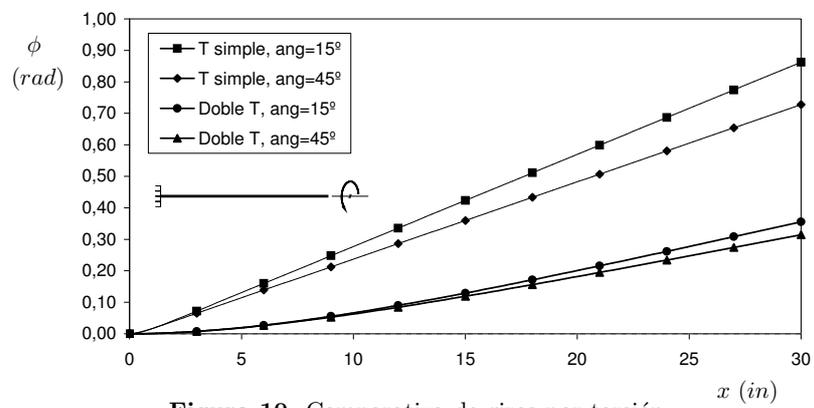


Figura 10. Comparativa de giros por torsión

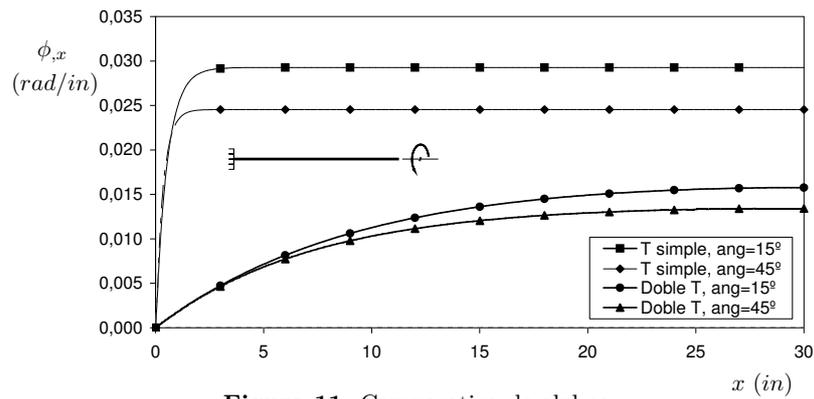


Figura 11. Comparativa de alabeo

Por último, en las Figuras 12 y 13 se muestran, para el problema de torsión con los desplazamientos normales impedidos en la sección extrema libre y fibras orientadas 15° , el alabeo y el bimomento de la barra con sección en T, respectivamente. Al igual que sucede con la sección en doble T, la ley que define el alabeo es simétrica y la del bimomento presenta simetría puntal.

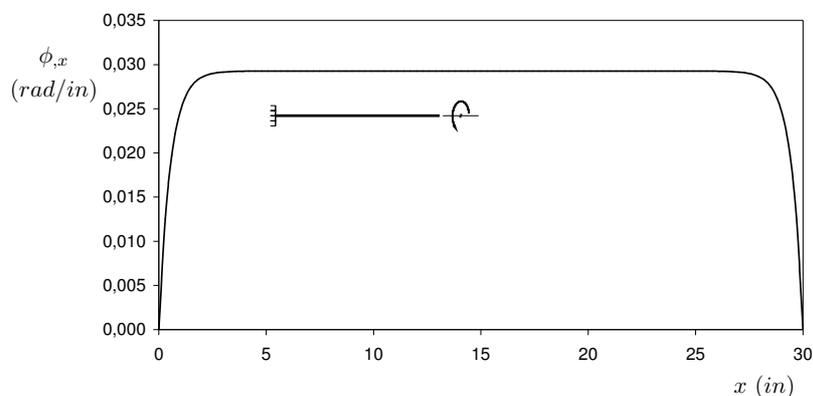


Figura 12. Alabeo en el problema de torsión (sección en T)

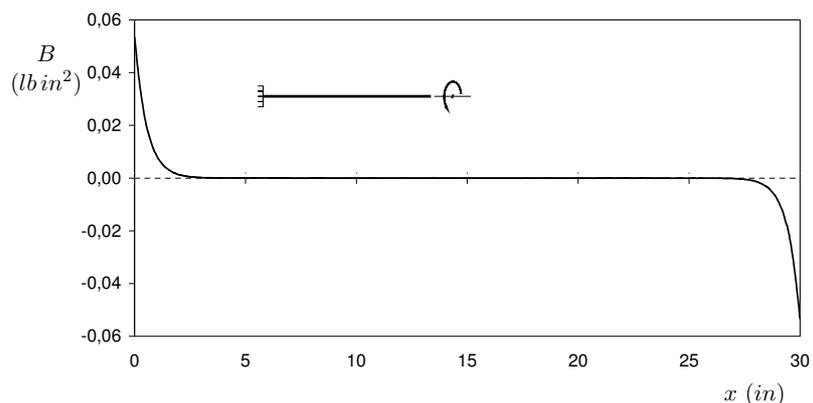


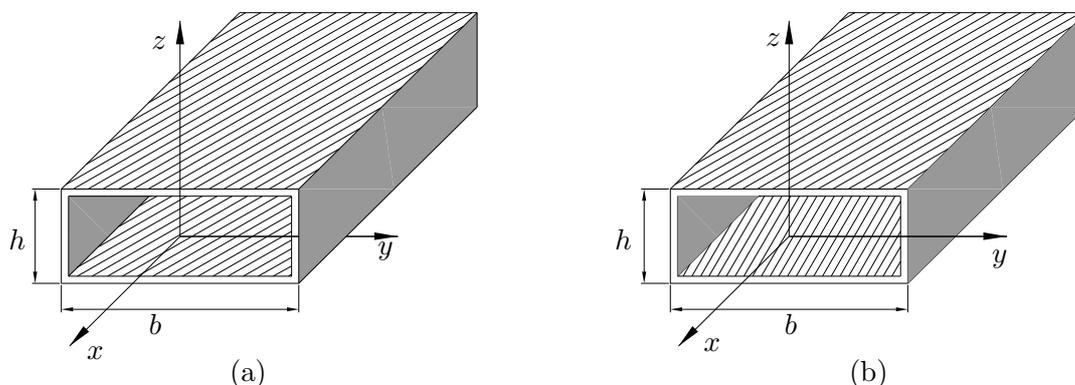
Figura 13. Bimomento en el problema de torsión (sección en T)

Ejemplo 2

Como segundo ejemplo, a continuación se estudia el comportamiento de una barra en voladizo con sección en cajón rectangular como la representada en la Figura 14. Este tipo de sección también es ampliamente utilizada en la construcción de palas de helicópteros. El estudio se realiza tanto para la configuración simétrica [CAS, Figura 14a)], en la cual existe un acoplamiento elástico flexión-torsión, como para la antisimétrica [CUS, Figura 14b)], existiendo en este caso un acoplamiento elástico axil-torsión. Los valores de las constantes elásticas del material (AS4/3501-6 grafito/epoxy) se especifican en la Tabla I. Las dimensiones de la sección son: canto $h = 13,64 \text{ mm}$ ($0,537 \text{ in}$), ancho $b = 24,21 \text{ mm}$ ($0,953 \text{ in}$), espesor de lámina $e = 0,127 \text{ mm}$ ($0,005 \text{ in}$) y longitud de viga $L = 762,12 \text{ mm}$ (30 in).

Con objeto de estudiar los acoplamientos elásticos se han estudiado tres estados simples de carga. En el primero de ellos se aplica una carga unitaria concentrada normal a la directriz de la barra en su extremo libre. En el segundo, la carga se aplica en la misma

sección pero es paralela a dicha directriz. Por último, en el tercero se aplica un momento torsor, también de valor unidad y en el extremo libre de la barra.



Características del laminado				
	Paredes horizontales		Paredes verticales	
Configuración	Superior	Inferior	Izquierda	Derecha
Antisimétrica	[15] ₆	[15] ₆	[15] ₆	[15] ₆
Simétrica	[15] ₆	[-15] ₆	[15/-15] ₃	[-15/15] ₃

Figura 14. Secciones en cajón correspondientes al Ejemplo 2

Configuración antisimétrica (CUS)

En la Figura 15 se muestra la variación del giro por torsión cuando se aplica el momento torsor. Junto a ella se muestra la curva obtenida por Jung, Nagaraj y Chopra¹⁰; si bien se aprecia una pequeña discrepancia, esta puede ser debida a la diferente forma del cálculo del momento torsor de St. Venant. También se han representado los valores experimentales aportados por Chandra, Stemple y Chopra². La forma de la curva pone de manifiesto que la torsión es prácticamente del tipo uniforme.

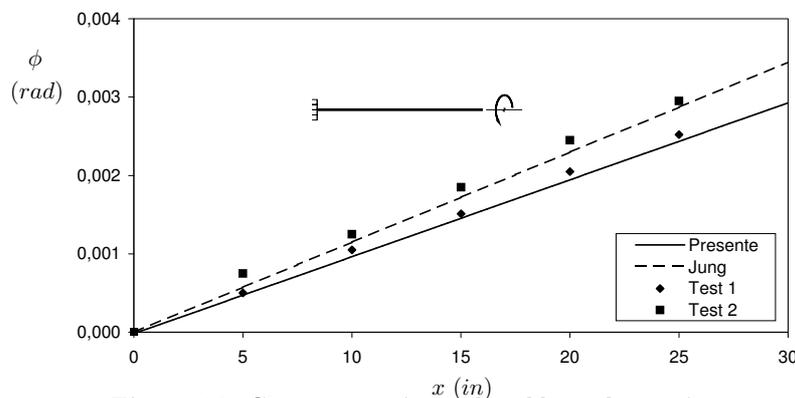


Figura 15. Giro por torsión en el problema de torsión

El desplazamiento longitudinal originado como consecuencia de la carga de tracción aplicada en el extremo libre se representa en la Figura 16, donde también se ha representado el desplazamiento longitudinal inducido por el acoplamiento elástico axil-torsión cuando se aplica el momento torsor. Como se aprecia, un torsor positivo produce acortamientos en la barra. Lógicamente, este resultado depende de la orientación de las fibras del laminado, llegando incluso a invertirse cuando se aumenta el ángulo del mismo en 90°. Además, en el caso que nos ocupa, el valor del acortamiento de la barra sometida a torsión es incluso cuatro veces mayor que el alargamiento producido por la carga de tracción.

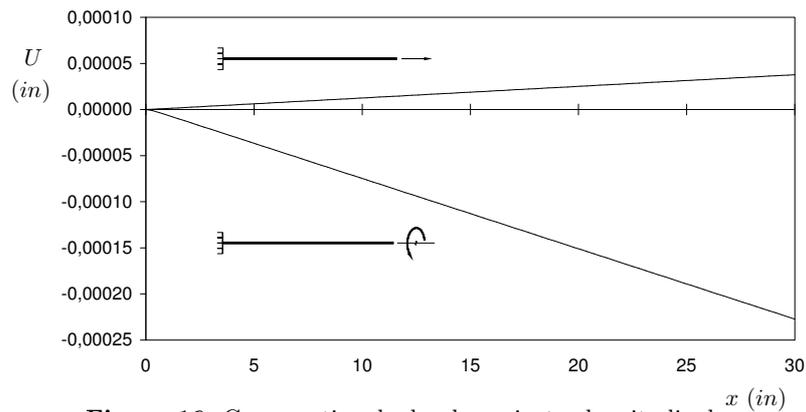


Figura 16. Comparativa de desplazamientos longitudinales x (in)

En la Figura 17 se muestra el giro inducido como consecuencia de los acoplamientos elásticos para el problema de tracción, así como también los resultados experimentales obtenidos por Chandra, Stemple y Chopra² y la curva calculada a partir de la matriz de rigidez deducida por Jung, Nagaraj y Chopra¹⁰ para este mismo problema. Se vuelve a apreciar una pequeña diferencia entre los resultados. Asimismo, debido a la orientación del laminado que se ha utilizado, una carga de tracción produce giros negativos.

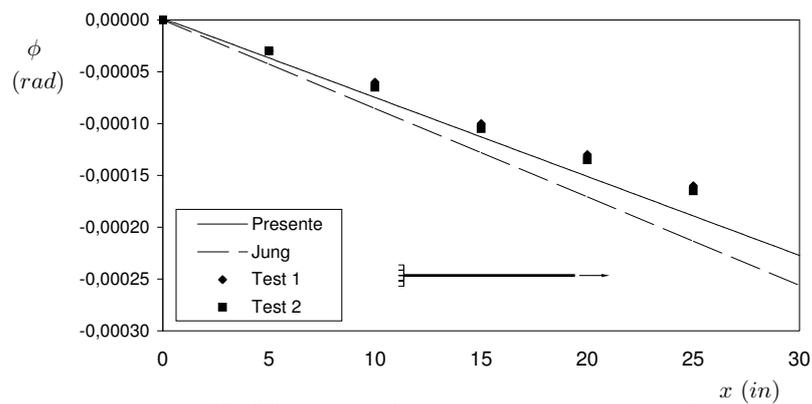


Figura 17. Giro por torsión en el problema de tracción

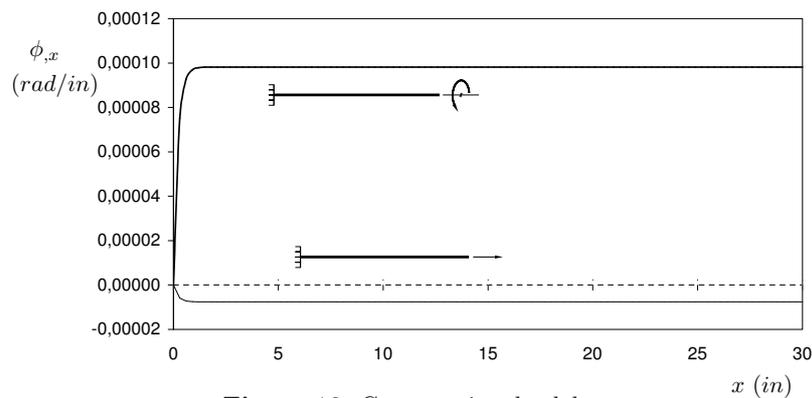


Figura 18. Comparativa de alabeo

Finalmente, en la Figura 18 se representan los desplazamientos de alabeo para los problemas de torsión y de tracción. Dada la forma del giro alrededor del eje Ox de la barra, el alabeo es constante a partir de una sección muy próxima al empotramiento.

Configuración simétrica (CAS)

En la Figura 19 se muestra la variación del giro por flexión alrededor del eje Oz , cuando la barra es sometida a una carga unitaria normal a la directriz en el extremo libre. Se ha representado también la curva obtenida por Jung, Nagaraj y Chopra¹⁰, así como los resultados derivados de los ensayos realizados por Chandra, Stemple y Chopra². La pequeña discrepancia existente entre los resultados puede ser debida a que en el presente análisis no se ha considerado la deformación por cortante.

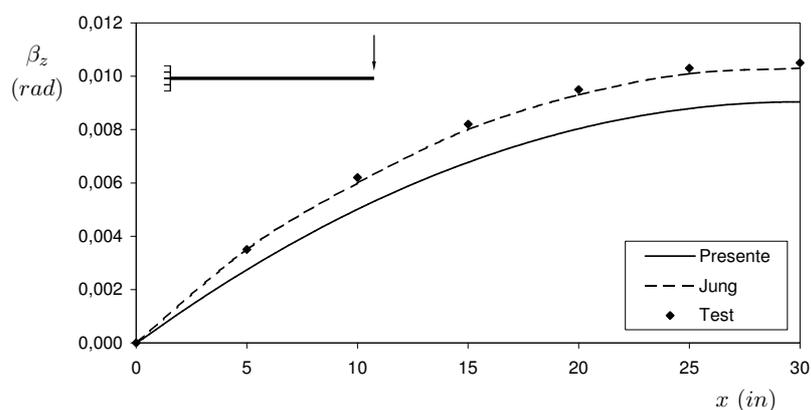


Figura 19. Giro por flexión en el problema de flexión

Como consecuencia del acoplamiento elástico existente para esta configuración, se produce un giro inducido alrededor del eje Ox , el cual se ha representado en la Figura 20. Junto a la curva se ha representado la obtenida por Jung, Nagaraj y Chopra¹⁰ y los resultados derivados de los ensayos realizados por Chandra, Stemple y Chopra², apreciándose una pequeña diferencia en los resultados, debido posiblemente a la diferencia en el cálculo del momento torsor uniforme.

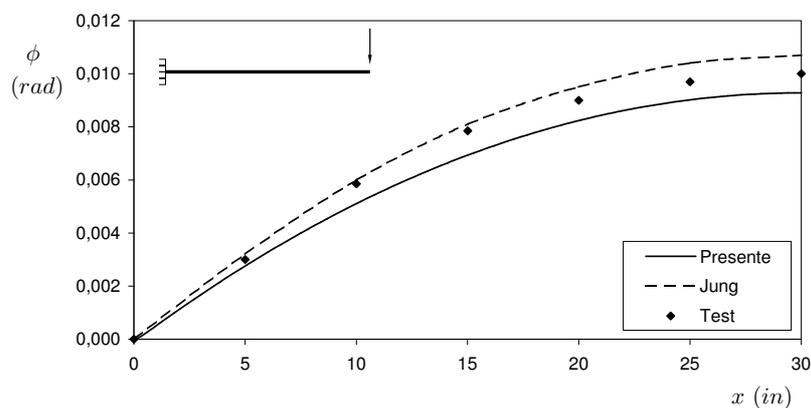


Figura 20. Giro por torsión en el problema de flexión.

En la Figura 21 se muestra el giro por torsión para el problema de torsión. Junto a la curva se han representado los resultados obtenidos experimentalmente por Chandra, Stemple y Chopra², observándose una buena correlación entre los resultados. Se puede ver cómo la torsión es del tipo uniforme prácticamente.

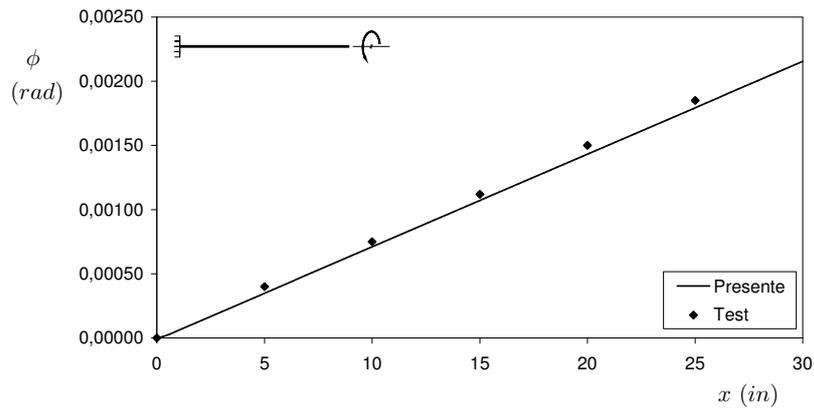


Figura 21. Giro por torsión en el problema de torsión

Debido al acoplamiento elástico característico de este tipo de configuraciones, en el problema de torsión se ocasiona un giro inducido alrededor del eje Oz . Esta ley de giros se muestra en la Figura 22 así como también los resultados experimentales de Chandra, Stemple y Chopra², poniéndose de manifiesto de nuevo una buena correlación entre los resultados.

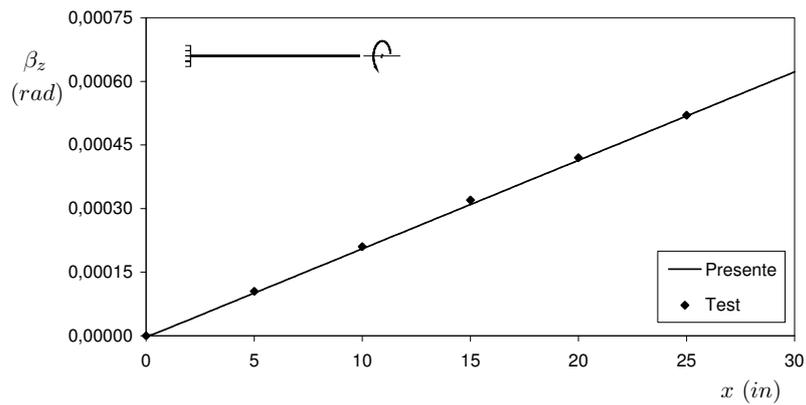


Figura 22. Giro por flexión en el problema de torsión

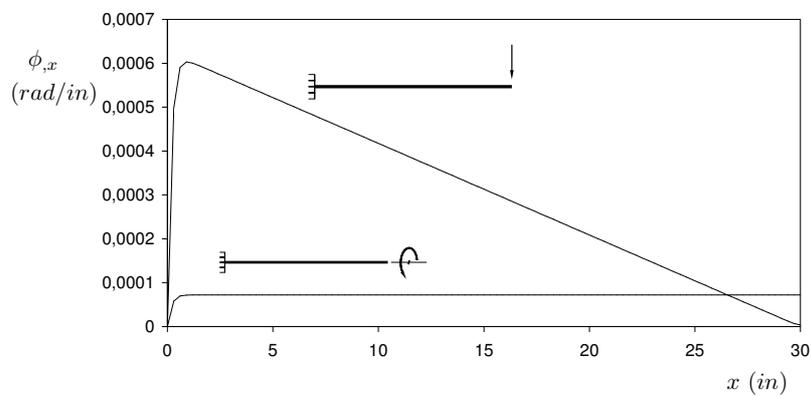


Figura 23. Comparativa de alabeos

Para finalizar, en la Figura 23 se ha representado el alabeo para los problemas de torsión y de flexión. El alabeo debido al momento torsor crece rápidamente para alcanzar un valor constante en una sección próxima al empotramiento, sin embargo el alabeo inducido originado por la carga de flexión crece rápidamente hasta alcanzar su valor máximo (mayor que el debido al momento torsor) en las proximidades del empotramiento, para posteriormente decrecer hasta hacerse prácticamente nulo en el extremo libre.

CONCLUSIONES

A partir del trabajado expuesto se ha conseguido desarrollar un modelo analítico directo monodimensional para el análisis y diseño estructural de barras de pared delgada constituidas por laminados con acoplamientos elásticos, el cual es aplicable tanto a barras de sección cerrada como abierta, teniendo presente en el análisis el tamaño del espesor de la pared, así como también la torsión restringida. El modelo ha sido validado con los resultados aportados por otros investigadores, obteniéndose una buena correlación.

En el análisis planteado no se ha despreciado el momento de lámina M_{ss} , lo cual conduce a una correcta estimación de la rigidez torsional de la barra. En caso contrario, y para ciertos esquemas de laminado, despreciar dicho término conduce a una subestimación de dicha rigidez. El modelo planteado también incorpora el concepto de alabeo secundario.

Entre los resultados obtenidos cabe destacar los referidos al alabeo y al bimomento, pues es difícil encontrar en la literatura este tipo de curvas. Es interesante resaltar cómo para el caso de la sección en doble T, según se muestra en la Figura 9, el bimomento alcanza un valor mínimo cuando las fibras están orientadas a 45° , siendo esta configuración, por tanto, la más adecuada cuando la barra es sometida a torsión.

En definitiva, a partir de un modelo sencillo, junto con una adecuada formulación de elementos finitos, se puede determinar el comportamiento de estructuras de barras de pared delgada constituidas por material compuesto. Está claro que la teoría expuesta también es de aplicación a barras de pared delgada isótropas, constituyendo también una buena herramienta para el estudio de estructuras constituidas por barras de este tipo.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido financiado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) de España, a través del proyecto *Nuevas Herramientas para Análisis y Diseño de Estructuras Ligeras Sometidas a Cargas de Viento (ADEL)*, de referencia BIA2003-09078-C02-02, subvencionado en la *Convocatoria de ayudas de Proyectos de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico (2003)*. Los autores expresan su agradecimiento a la citada Comisión.

REFERENCIAS

- 1 C.E.S. Cesnik y D.H. Hodges, "VABS: A new concept for composite rotor blade cross-sectional modeling", *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. **42**, N° 1, pp. 27-38, (1997).
- 2 R. Chandra, D. Stemple, e I. Chopra, "Thin-walled composite beams under bending, torsional, and extensional loads", *Journal of Aircraft*, Vol. **27**, N° 7, pp. 619-626, (1990).
- 3 R. Chandra e I. Chopra, "Experimental and theoretical analysis of composite I beams with elastic couplings", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **29**, N° 12, pp. 2197-2206, (1991).
- 4 R. Chandra e I. Chopra, "Structural response of composite beams and blades with elastic couplings", *Composites Engineering*, Vol. **2**, N° 5-7, pp.347-374, (1992).

- 5 CIMNE (International Center for Numerical Methods in Engineering), “KRATOS: Free multi-physics finite element method C++ open source code”, <http://www.cimne.com/kratos/default.asp>, (2002).
- 6 P. Dadvand, J. Mora, C. Gonzalez, A. Arraez, P.A. Ubach y E. Oate “KRATOS: An object-oriented environment for development of multi-physics analysis software”, *Proceedings of the WCCM V Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria*, (2002).
- 7 C.H. Hon e I. Chopra, “Aeroelastic stability of a composite blade”, *Journal of American Helicopter Society*, Vol. **30**, N° 2, pp. 57–67, (1985).
- 8 E.R. Johnson, V.V. Vasiliev y D.V. Vasiliev “Anisotropic thin-walled beams with closed cross-sectional contours”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **39**, N° 12, pp. 1389–2393, (2001).
- 9 R. Jones, “*Mechanics of Composite Materials*”, Taylor & Francis, Inc. Philadelphia, (1989).
- 10 S.N. Jung, V.T. Nagaraj e I. Chopra, “Refined structural model for thin- and thick- walled composite rotor blades”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **40**, N° 1, pp. 105–116, (2002).
- 11 S.N. Jung, V.T. Nagaraj e I. Chopra, “Assessment of composite rotor blade modeling techniques”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. **44**, N° 3, pp. 188–205, (1999).
- 12 S.N. Jung e I.J. Park, “Structural behavior of thin and thick-walled composite blades with multi-cell sections”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **43**, N° 2, (2005).
- 13 C. Libove, “Stress and rate of twist in single-cell thin-walled beams with anisotropic walls”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **26**, N° 9, pp. 1107–1118, (1988).
- 14 E.H. Mansfield y A.J. Sobey, “The fiber composite helicopter blade, Part I: Stiffness properties, Part II: Prospects for aeroelastic tailoring”, *Aeronautical Quarterly*, Vol. **30**, N° 2, pp. 413–449, (1979).
- 15 B. Panda e I. Chopra, “Dynamic of composite rotor blades in forward flight”, *Vertica*, Vol. **11**, N° 1–2, pp. 187–209, (1987).
- 16 M. Patil, y E.R. Johnson, *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. 13th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference*, (2005).
- 17 L.W. Rehfield, A.R. Atilgan y D.H. Hodges, “Nonclassical behavior of thin-walled composite beams with Ccosed cross sections”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. **35**, N° 2, pp. 42–51, (1990).
- 18 E.C. Smith e I. Chopra, “Formulation and evaluation of an analytical model for composite box-beams”, *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. **36**, N° 3, pp. 23–35, (1991).
- 19 V.V. Volovoi y D.H. Hodges, “Single- and multi-cell composite thin-walled beams”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **40**, N° 5, pp. 960–966, (2002).
- 20 T. Weisshaar, “Aeroelastic tailoring—creative uses of unusual materials”, *AIAA/ASME/ASCE/AHS 28th Structures, Structural Dynamics y Materials Conference, Monterey, California*, (1987).
- 21 W. Yu, D.H. Hodges, V.V. Volovoi y E.D. Fuchs, “A generalized Vlasov theory for composite beams”, *Thin-Walled Structures*, Vol. **43**, pp. 1493–1511, (2002).
- 22 W. Yu V.V. Volovoi, D.H. Hodges y X. Hong, “Validation of the variational asymptotic beam sectional (VABS) analysis”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. **40**, N° 10, pp. 2105–2113, (2002).
- 23 J. Zhang y E. Smith, “Structural design and optimization of composite blades for a low weight rotor”, *The 2nd International Basic Research Conference on Rotorcraft Technology Nanjing*, (2005).