Alexander Grothendieck (1928-2014)

Alexander Grothendieck ha estat un dels matemàtics més importants dels darrers cent anys. La seva producció científica és d'una originalitat i projecció enormes; les idees i camins que ha obert al llarg de la seva vida arrelen en els fonaments de la Geometria Algebraica i són objecte de permanent actualitat entre els especialistes més prestigiosos. Més enllà dels conceptes introduïts i dels teoremes demostrats, Grothendieck és conegut també a causa d'un periple vital i acadèmic convuls, que el va dur a retirar-se de la comunitat científica i passar els darres anys de la seva vida allunyat de l'entorn en el qual havia excel·lit.

A l'hora d'analitzar succintament la vida i l'obra de Grothendieck resulta fonamental el relat autobiogràfic que va escriure l'any 1985 (no publicat, accessible a internet), *Récoltes et Semailles*, *RS*, en el qual repassa algunes vicissituds de la seva vida, de la seva obra i de la manera com entenia la creació matemàtica.

Uns retalls de la biografia de Grothendieck permetran emmarcar la seva trajectòria. Grothendieck neix a Berlín el 1928. El seu pare és un anarquista jueu rus, Alexander Shapiro, que després d'haver participat en les revoltes de 1905 i 1917 ha fugit del creixent antisemitisme de la Unió Soviètica , i la seva mare, una socialista revolucionària alemanya, Hanka Grothendieck. Davant l'ascens d'Adolf Hitler al poder l'any 1933, els pares es traslladen a París, deixant el petit Alexander a cura d'uns amics en una granja del nord d'Alemanya. El caràcter revolucionari de la parella Shapiro-Grothendieck els duu a lluitar a la guerra d'Espanya, al costat de les Brigades Internacionals. Tornen a França l'any 1939, on són internats en els camps oberts pel govern francés per tancar els anarquistes i altra gent "indesitjable". El pare acaba a Auschwitz, on es perd el seu rastre el 1942, mentre que la mare és internada al camp de Rieucros (Lozère), on es retrobarà amb el petit Alexander, que viatja sol des d'Alemanya fins al sud de França. Sens dubte, aquests avatars marcaran el caràcter de Grothendieck.

L'etapa formativa de Grothendieck comença els anys 1942/44, en els quals assisteix al Collège Cévenol, a prop del camp d'internament, en unes condicions gens favorables. En paraules seves: *J'étais le plus âgé, et le seul à aller au lycée, à 4 ou 5 kilomètres de là, qu'il niège ou qu'il vente, avec des chaussures de fortune qui toujours prenaient l'eau.* Després, accedeix a la Universitat de Montpellier, on estudiarà la llicenciatura de matemàtiques, sense destacar especialment en els seus resultats acadèmics o potser sí ... Grothendieck estava descontent amb els càlculs de longituds, àrees i volums que els presentaven, ja que al seu parer mancava una definició prèvia d'aquests conceptes mostrant així el seu esperit matemàtic innat, demanant un *perquè* abans d'un *com calcular-los.* Per satisfer les seves inquietuds, va desenvolupar una versió general de la integral de Lebesgue, sense haver llegit ni conèixer l'obra del mateix Lebesgue. El professor J. Soula li va comentar que aquests problemes havien estat resolts per Lebesgue força anys abans, però lluny de desanimar el jove Grothendieck, aquest episodi li va donar la confiança suficient en si mateix per endinsar-se en la recerca matemàtica. A més, tal com assenyala al *RS*, ens trobem davant d'un tret característic que s'aniria reproduint al llarg de la seva carrera, Grothendieck no estava interessat en llegir llibres, on apareixen les matemàtiques que ja estan fetes, sinó en descubrir les que estan per fer: *Les livres, on ne les lit pas, on les écrit.*

El 1948 el professor J. Soula adreça aquest estudiant tant especial a París, a l'encontre d'Élie Cartan, aleshores en edat molt avançada, per tal que realitzi una tesi doctoral. Allà comença l'etapa més productiva del matemàtic, etapa que s'allarga fins al 1970, uns anys en els que revolucionarà els fonaments de diverses disciplines. Henri Cartan i André Weil acullen Grothendieck, qui troba un ambient excel·lent al París de l'època, incorporant-se al Séminaire Cartan dedicat aquell curs a la topologia algebraica i la teoria de feixos, i gaudint de l'esperit Bourbaki. Després del primer any, els seus mentors l'adrecen a Nancy per desenvolupar una tesi doctoral en l'equip de J. Dieudonné i L.Schwarz, que estan analitzant les propietats generals dels espais localment convexos que reflecteixin les propietats dels exemples més coneguts, essencialment els espais de funcions i de distribucions. Li proposen fins a 14 problemes que se'ls resisteixen, problemes que resol en un any. Dieudonné comenta: *Quand il s'agit en 1953 de lui décerner un doctorat, il fallut choisir entre six mémoires, dont chacun aurait fait une bonne thèse*; com a tesi doctoral presenta la seva memòria sobre els espais nuclears. Defineix els productes tensorials completats entre dos espais localment convexos, $E\hat{\otimes}_{\varepsilon}F$ i $E\hat{\otimes}_{\pi}F$, que en general no coincideixen, i introdueix una categoria d'espais sobre els quals sí que es dóna aquesta coincidència, els espais nuclears. Mostra que la categoria d'espais nuclears té bones propietats d'estabilitat, que bona part dels espais funcionals que apareixen en la teoria de distribucions són nuclears i que és la nuclearitat d'aquests espais la que està a la base del *teorema dels nuclis* de Schwarz.

A partir del mateix 1953 de la defensa de la seva tesi doctoral, Gothendieck perd interés en l'Anàlisi Funcional i s'orienta cap a la Geometria i la Topologia Algebraiques, disciplines en gran efervescència i desenvolupament als seminaris de París del moment. En la seva reorientació científica tindrà una gran influència J.P. Serre, amb qui mantindrà una correspondència abundant i del qui dirà més endavant que va inspirar moltes de les idees que va desenvolupar. En particular, Serre havia promogut la utilització de la teoria de feixos en Geometria Algebraica en el seu article *Faisceaux Algébriques Cohérents*, teoria que Grothendieck va analitzar en un article conegut com el *Tohôku*, en referència a la revista en la que va ser publicat: Grothendieck s'interessa a l'Àlgebra Homològica, ben establerta per als mòduls en el llibre fundacional de Cartan i Eilenberg de l'any 1956, i n'extreu la noció de categoria abeliana i les propietats estructurals que asseguraren l'existència de resolucions injectives en aquest context més general. De cop, unifica l'anàlisi dels functors *Tor* i *Ext* definits per als mòduls i la cohomolgia de feixos (definida fins aleshores de forma *ad hoc*) com a reflexos d'una teoria més general i, en un cert sentit, més fonamental. He esmentat aquest treball perquè mostra, ja en els seus inicis, un dels trets fonamentals de la creativitat de Grothendieck: per tal d'entendre un problema o una teoria (la cohomologia de feixos en aquest cas) se n'allunya en un procés de generalitat cada vegada més gran, però no superflu, fins a situar-lo en un context on les particularitats del problema inicial no destorbin la seva anàlisi, de manera que la solució esdevingui natural. Grothendieck està més interessat en elaborar teories generals que en resoldre problemes concrets, amb el convenciment que aquests trobaran solució com a conseqüència de les propietats estructurals de la teoria que els emmarca. Com dirà P. Deligne, el seu continuador més destacat, referint-se a tota l'obra de Grothendieck, *Il était unique dans sa façon de penser. Il lui fallait comprendre les choses du point de vue le plus général possible et une fois que les choses étaient ainsi compris et posées, le paysage devenait si clair que les démonstrations semblaient triviales.*

L'any 1957 Grothendieck sorprèn a la comunitat matemàtica amb una nova prova, més general, del teorema de Riemann-Roch. L'origen d'aquest resultat és el càlcul de la dimensió de l'espai de funcions meromorfes amb zeros i pols fixats sobre una superfície de Riemann. Després de la introducció dels feixos en Geometria Algebraica, el problema per a les varietats de dimensió arbitrària es transforma en donar una fórmula polinòmica per a la característica d'Euler $\chi(X, \mathcal{F})$ d'una varietat algebraica llisa X i un feix localment lliure $\mathcal{F}$ en funció d'uns invariants numèrics de X i de $\mathcal{F}$. Hirzebruch havia aconseguit donar aquesta fórmula per a les varietats complexes, resultat publicat l'any 1956, utilitzant de forma essencial mètodes transcendents, i més particularment la teoria de cobordisme de Thom. Es plantejava aleshores trobar una prova algebraica que permetés estendre el teorema a les varietats definides sobre un cos arbitrari. Grothendieck no sols proporciona aquesta prova algebraica, sinó que va molt més enllà: introdueix el grup $K(X)$ de classes de fibrats d'una varietat, variacions del qual s'aplicaran amb èxit en la topologia algebraica per part d'Atiyah i Hirzebruch i en l'àlgebra per part de Bass i Serre, per donar lloc a tota una nova teoria, la *teoria* K; i introdueix el punt de vista relatiu, segons el qual l'objecte natural d'estudi de la geometria són els morfismes entre varietats algebraiques, reduint-se aleshores l'anàlisi de les varietats particulars als morfismes constants. La prova procedeix per un mètode recurrent en les demostracions de Grothendieck: les propietats estructurals dels elements que intervenen en la formulació del teorema li permeten anar reduïnt la fórmula que vol obtenir pas a pas, com si de treure'n les capes d'una ceba es tractés, fins a un càlcul senzill que efectua sobre l'espai projectiu i que conclou el teorema. Grothendieck utilitzarà, un cop i un altre, aquesta tècnica de *dévissage* per demostrar teoremes generals per reducció a una situació quasi trivial.

Els resultats obtinguts fins aleshores i les idees que presenta en els diferents seminaris en què participa donen gran renom a Alexander Grothendieck, cosa que li permet adreçar una ponència a l'ICM d'Edinburg de 1958 en la qual esboça un programa visionari i molt ambiciós de refundació de la Geometria Algebraica que li ocuparà bona part del seu temps fins a la seva retirada del l'IHES l'any 1970. En aquells moments, la necessitat de trobar una bona formulació de la Geometria Algebrica estava determinada en part per l'actualitat de les conjectures de Weil sobre el nombre de solucions de les equacions algebraiques definides sobre un cos finit, que suggerien profundes connexions entre l'aritmètica de les varietats definides sobre un cos finit i la topologia de les varietats complexes associades, establint una fusió entre dos móns aparentment molt diferents, l'un discret i l'altre continu. L'objectiu era trobar una *cohomologia de Weil* amb bones propietats, que ara no detallarem. A la introducció, Grothendieck assenyala que *it seems already certain that they [cohomological methods] are to overflow this part of mathematics [algebraic geometry] in the coming years.* Però, prèviament a les conjectures de Weil, Grothendieck es proposar analitzar i profunditzar l'estudi cohomològic dels feixos coherents iniciat per Serre, ja que entén que donaran nous resultats i nous mètodes de demostració de resultats establerts sense mètodes cohomològics, com ara el teorema de les funcions holomorfes de Zariski, situant-los en un context més adequat que permet estendre'ls i generalitzar-los. Aquest programa s'anirà materialitzant en milers de pàgines en les quals els resultats i les construccions més originals se segueixen sense solució de continuïtat. El reconeixement a aquest immens treball comportarà la concessió, l'any 1966, de la medalla Fields a l'ICM de Moscou.

En aquest periode comptarà amb la col·laboració inestimable de col·legues i deixebles destacats: d'una banda Dieudonné i Serre, el primer aporta rigor i tenacitat en l'establiment de la teoria d'esquemes, mentre que el segon inspira moltes de les idees que desenvoluparà Grothendieck; de l'altra, els participants en els *Séminaires du Bois-Marie, (SGA)*, entre els quals M. Artin o deixebles com ara L. Illusie, J.L. Verdier o P. Deligne.

És impossible resumir aquí les aportacions més importants de Grothendieck en el període 1958-1968, per la qual cosa ens cenyirem a comentar succintament tres idees que ell mateix selecciona, en les primeres pàgines de *RS*, com les més importants d'entre les seves contribucions i que obeeixen, en un cert sentit, a una evolució ascendent de la noció d'espai en geometria: *esquema, topos, motiu.*

Esquemes: en els anys '50 es van proposar, bàsicament, dues aproximacions a la definició de varietat algebraica per part de Serre i Chevalley, aproximacions que patien de diverses mancances. A més, ambdues aproximacions suposaven treballar amb un cos base, de manera que eren poc apropiades per algunes de les aplicacions previstes, com ara les propietats diferencials, on intervindran els elements nilpotents, o les aritmètiques, on la base natural és $\mathbf{Z}$. Grothendieck pren com a objecte bàsic de la geometria algebraica un anell commutatiu qualsevol A i el conjunt dels seus ideals primers amb la topologia de Zariski, $SpecA$, associa un feix estructural a aquest espai, $\mathcal{O}$, i defineix un esquema com un espai topològic amb un feix estructural que localment és isomomorf a l'espectre d'un anell. Sembla que aquesta construcció era més o menys coneguda a l'època; el que distingeix Grothendieck és el convenciment de que aquesta és la bona noció i el desenvolupament d'una extensíssima teoria al seu voltant que es concreta en els dos milers de pàgines dels inacabats *Éléments de Géometrie Algébrique* (EGA), redactats amb l'ajut de Dieudonné. Aquesta és una contribució tan fonamental que ha esdevingut el llenguatge bàsic en el que s'insereix la Geometria Algebraica i, a través d'ella, la Geometria Aritmètica i la Teoria de Nombres.

Topos: el procés de construir objectes matemàtics enganxant objectes definits localment que coincideixen sobre les interseccions (*recollement*) és habitual en topologia. La topologia de Zariski dels esquemes permet, en principi, estendre aquest procediment a la Geometria Algebraica, però la pobresa d'aquesta topologia no el fa gaire efectiu. Per remediar aquest problema Grothendieck introdueix el mètode de descens i, anant més lluny, les nocions de *situs* i *topos*. Grothendieck observa que, des del punt de vista de la teoria de feixos, la geometria d'un espai topològic es redueix al reticle dels seus conjunts oberts. Com assenyala Cartier, *l'originatlité de Grothendieck a été de reprendre d'idée de Riemann que les fonctions holomorphes multivaluées vivent en realité, non pas sur les ouverts du plan complexe, mais sur les surfaces de Riemann étalées.* Aquestes superfícies s'apliquen unes en les altres formant una categoria, que generalitza el reticle dels oberts de l'espai. Adaptant aquesta idea a la Geometria Algebraica, Grothendieck defineix el *site étale* d'un esquema, li associa la categoria de feixos (el *topos étale*) i la teoria de cohomologia associada. En particular, per a una varietat algebraica X definida sobre un cos algebraicament tancat i per a cada primer ℓ diferent de la característica del cos, Grothendieck defineix la cohomologia ℓ-àdica $H^*(X, \mathbf{Z}_\ell)$ i demostra que és una bona cohomologia de Weil, al menys fins al punt que les tres primeres conjectures de Weil se segueixen de les propietats generals d'aquesta cohomologia. Faltava l'equivalent de la hipòtesi de Riemann per a la funció zeta d'una varietat algebraica, que demostraria Deligne uns anys més tard, el 1974, aplicant resultats de formes modulars i propietats de monodromia.

Motius: el grups de cohomologia $H^*(X, \mathbf{Z}_\ell)$ per a ℓ variable, i d'altres que no hem introduït, tenen propietats paral·leles. La teoria de motius és una primera tentativa per trobar una cohomologia entera, i racional per extensió d'escalars, de la qual aquests grups serien les realitzacions ℓ-àdiques. Grothendieck, que mai va publicar res referit al ioga dels motius, assenyala que el que cal és entendre la categoria dels motius i analitzar les seves propietats, de manera que les conjectures de Weil se segueixin de l'estructura general d'aquesta categoria. Aquest és un camí no reexit encara, tot i que la influència de la teoria de motius ha estat molt important i, a partir del anys '90, amb el treball de V. Voevodsky sobre la categoria derivada de motius, entre d'altres, ha conegut un gran renaixement.

L'any 1970 Grothendieck decideix abandonar l'Institut d'Hautes Études Scientifics (IHES), el seu hàbitat natural des de la creació d'aquesta institució a finals dels anys '50, en descobrir que part del finançament de la institució prové de fons militars. Això xoca frontalment amb les seves conviccions pacifistes i antimilitaristes. Els qui el coneixien, com Cartier, assenyalen però que la seva crisi existencial i científica comença força abans, l'any 1966. En un moment que la política mundial està dominada pel rebuig a la guerra del Vietnam i per la guerra freda entre els dos grans blocs, Grothendieck es nega a viatjar a la URSS per recollir la medalla Fields l'any 1966, i comença a plantejar-se la importància de les matemàtiques davant d'una realitat tant punyent. Segons Cartier, aquest sentiment no fa sinó augmentar al llarg dels anys, en especial al maig de 1968, pel que la sortida de l'IHES no en és sinó una conseqüència d'un procés interior llargament conreat.

L'ICM de Niça representa el trencament de Grothendieck amb l'entorn matemàtic en el qual s'havia instal·lat els darrers 20 anys. El juliol de 1970 Grothendieck crea *Survivre et vivre*, un grup pacifista que ben aviat esdevindrà ecologista radical, al qual s'incorporen matemàtics prestigiosos com Chevalley i Samuel. Grothendieck, una autoritat científica molt influent, no aconsegueix l'impacte desitjat a través d'aquesta nova experiència i a poc a poc es va tancant en si mateix.

Passa dos anys al Collège de France, en una plaça que li aconsegueix Serre, i el 1973 es trasllada a la Universitat de Montpellier, com a professor de base, universitat en la qual romandrà fins a la jubilació l'any 1988. Això no vol dir, però, que Grothendieck abandoni les seves reflexions científiques. A Montpellier reb a uns pocs matemàtics propers i escriu algunes reflexions matemàtiques, entre les quals destaquen *À la pursuit des champs*, *Esquisse d'un programme* i *La longue marche à travers la théorie de Galois*, que circulen entre un grup de matemàtics de confiança. En aquests textos albira teories i desenvolupaments que són, ara mateix, a la base de la recerca de diversos grups arreu del món. A principis dels anys '90, abans de retirar-se definitivament, llega unes 20.000 pàgines de manuscrits i reflexions a un amic, escrits que romanen en algun indret de la Universitat de Montpellier i que, en bona part, estan encara per descobrir.

El 1988 renuncia al premi Crafoord, que li ha estat atorgat conjuntament amb P. Deligne, per part de l'Acadèmia Sueca en reconeixement a la seva obra. Grothendieck passa els darrers anys de la seva vida apartat de tot entorn científic i acadèmic, en l'anonimat d'un petit poble del Pirineu francés. La seva activitat se centra en la cura de les vinyes i el camp, i en les seves reflexions personals que produeixen el text autobiogràfic *Récoltes et Semailles* i *La clef des songes*, en el que reflecteix les seves inquietuds espirituals. Mor el 13 de novembre de 2014 a l'hospital de Saint Girons.

Per saber-ne més, consulteu el web http://www.grothendieckcircle.org/

Pere Pascual