BLANCO ABELLÁN, M. (coord.) (2014) *Enseñanza e Historia de las Ciencias y de las Técnicas: Orientación, Metodologías y Perspectivas*. Barcelona, SEHCYT, p. 315.

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA EN EL AULA: LA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Mª Rosa MASSA ESTEVE
Departamento de Matemática Aplicada I. Universitat Politècnica de Catalunya

Resumen

El estudio de los orígenes de los polinomios y de las ecuaciones asociadas a ellos nos ofrece una historia de la construcción geométrica de la solución de la ecuación de segundo grado con pasajes muy instructivos y sugerentes para los alumnos, ya sean de secundaria o del grado universitario. En este artículo se analiza una actividad, implementada en el aula de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB), que contiene construcciones geométricas singulares de la solución de la ecuación de segundo grado en el siglo XVII. Estos análisis que relacionan el álgebra con la geometría aportan al alumnado una visión más rica de la matemática y mejoran los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Abstract

The study of the origins of polynomials and their associated equations gives us a history of the geometric construction of the solution of the quadratic equation with instructive and suggestive passages for students, whether high school or college degree. This paper discusses an activity implemented in the classroom of the School of Industrial Engineering of Barcelona (ETSEIB) containing singular geometric constructions solving the quadratic equation in the seventeenth century. These analyses linking algebra to geometry provide students with a richer view of mathematics and improve teaching and learning processes.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, enseñanza, álgebra.
Keywords: History of mathematics, teaching, algebra.

Introducción

Las aportaciones implícitas y explícitas de la historia de la matemática en la enseñanza enriquecen la labor de formación de los alumnos [MASSA ESTEVE, 2003]. Así, el análisis de la génesis y evolución de las ideas y conceptos matemáticos es útil para mejorar el conocimiento matemático del alumnado y para proporcionarle una visión más poliédrica de las matemáticas. Con estas premisas, durante los últimos quince años, hemos

trabajado ya sea elaborando materiales para el aula [MASSA ESTEVE, GUEVARA CASANOVAS, ROMERO VALLHONESTA & PUIG PLA, 2011], impartiendo cursos de formación [MASSA ESTEVE, 2012] o dirigiendo trabajos de investigación sobre la relación entre la historia y su enseñanza. Actualmente, a nivel internacional existen también varias líneas de investigación de historiadores de la matemática que exploran estas relaciones intentando mejorar la enseñanza de las matemáticas y la formación del alumnado [BARBIN, 2000; JAHNKE, KNOCHE, OTTE & ASPRAY, 1996].

El objetivo de este artículo es, por una parte, mostrar la metodología usada en la docencia de la historia de las matemáticas en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona (ETSEIB) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) y, por la otra, analizar una actividad que relaciona álgebra y geometría a través de construcciones geométricas singulares de la solución de la ecuación de segundo grado.

La historia de la ciencia y de la técnica en la formación de los ingenieros

Si se parte de una visión integral de la formación, la enseñanza de la historia de la ciencia y de la técnica en una universidad politécnica es una necesidad. Los técnicos y los científicos han de adquirir una serie de conocimientos y habilidades en ámbitos de especialización pero al mismo tiempo necesitan tener una perspectiva crítica y humanística de su profesión, tanto para entenderla más profundamente como para conseguir un ejercicio profesional digno. Hay otros caminos para conseguir este objetivo como la organización de actividades literarias, musicales, cine, exposiciones, o debates. La historia de la ciencia y de la técnica, sin embargo, tiene algunas ventajas en relación con estas otras alternativas. En primer lugar, la historia de la ciencia y de la técnica trata de temáticas cercanas a los estudiantes, muy a menudo la historia de la profesión o de la disciplina que están tratando en las otras clases. En segundo lugar, la historia es un campo de investigación y, por consiguiente, comparte muchas de las características de los estudios científicos y técnicos; con la historia de la ciencia y de la técnica se pueden llevar a cabo trabajos de investigación, que prepara sin duda a los estudiantes para su profesión. En tercer lugar, analizar la evolución histórica de las ideas proporciona una visión más útil, dinámica, humana, interdisciplinaria y heurística de la ciencia y de la técnica. Finalmente, en la historia se pueden analizar los casos en que se pone en juego la responsabilidad social de la ciencia y la tecnología. Todo ello significa, como insiste el profesor Lusa desde hace varias décadas, que la historia de la ciencia y de la técnica es el camino real hacia la formación humanística en los estudios científicos y técnicos [LUSA & ROCA ROSELL, 2004]. Siguiendo estas ideas los profesores Guillermo Lusa, Antoni Roca-Rosell, Carles Puig-Pla, y yo misma hemos impartido y estamos impartiendo diversas asignaturas optativas de historia de la ciencia y de la técnica en la ETSEIB.[1]

La actividad que analizamos pertenece a una de estas asignaturas, la titulada “Los orígenes y la evolución del álgebra” (Els origens i l’evolució de l’àlgebra). Es una asignatura de libre elección incluida en los planes de estudio de la ETSEIB y de la que soy coordinadora desde el curso 2003/04. La asignatura consta de tres créditos estructurados en sesiones semanales de dos horas, de las cuales una es teórica, dedicada a explicar la evolución histórica, y la otra práctica, dedicada a analizar textos significativos de la historia de la matemática. Los objetivos de la asignatura son: 1) Dar a conocer las fuentes en que se basa el conocimiento de las matemáticas del pasado; 2) Facilitar el análisis de los cambios más significativos en la evolución del álgebra, los que han afectado a su estatus dentro de las matemáticas, sus métodos, sus conceptos fundamentales y su relación con otras ciencias; 3) Mostrar las relaciones socio-culturales de la matemática con las otras ciencias a través de la historia; 4) Conseguir que el alumnado reflexione sobre el desarrollo del pensamiento matemático y las transformaciones de la filosofía natural. El curso se sitúa en la línea de trabajo que intenta entender los procesos dentro de su propio contexto, en términos de conocimiento matemático y de las intenciones con las que se trabajaba más que en términos de lo que sucederá después. El contenido de la asignatura abarca desde

[1] Así por ejemplo se imparten: La història de l’Escola d’Enginyeria Industrial, Tecnologia i Cultura a l’antiga Xina, Enginyeria i Matemàtiques a la Il•lustració, Historia de l’Aeronautica, etc.

los algoritmos numéricos de Babilonia hasta el teorema fundamental del álgebra.[2] La actividad que analizamos corresponde a la onceava sesión después de presentar la geometría de Descartes.

Álgebra y geometría hasta el Renacimiento. Primeras justificaciones geométricas

A fin de contextualizar las construcciones geométricas del siglo XVII que analizaremos en el apartado siguiente presentamos una pincelada histórica de las primeras relaciones entre el álgebra y la geometría [PARSHALL, 1988; BASHMAKOVA & SMIRNOVA, 2000 y MASSA ESTEVE, 2005]. Aunque el algoritmo de resolución de ecuaciones algebraicas de segundo grado ya se puede deducir a partir de los problemas resueltos en las tablas babilónicas, en ellas no se presenta ninguna construcción geométrica de la solución. En la matemática "babilónica" (1500 aC), que fue transmitida por escribas y básicamente utilizada para cálculos relativos a problemas de la vida real, se formulaba un algoritmo consistente en una serie de instrucciones (sin ninguna explicación) para encontrar soluciones concretas a problemas que se pueden describir mediante una ecuación de segundo grado. Es importante señalar que en las tablas babilónicas existen instrucciones numeradas, sin letras, sin signos, y sólo cálculos numéricos.

La matemática griega, de alguna manera, hizo su aportación a la justificación geométrica de las ecuaciones algebraicas con *Los Elementos* de Euclides (300 aC), obra que recoge los conocimientos matemáticos de diferentes escuelas griegas y una de las que más influencia cultural ha tenido a lo largo de la Historia de la Ciencia. Así veamos, por ejemplo, la proposición 6 del libro II que, más tarde, los árabes y algunos autores del Renacimiento utilizaron para justificar geométricamente el algoritmo de la solución de la ecuación de segundo grado.

> "Libro II. Proposición 6. Si se divide en dos partes iguales una línea recta [$b/2$] y se le añade, en línea recta, otra recta [x]; el rectángulo comprendido por la recta entera con la recta añadida y la recta añadida [$(x+b).x$] junto con el cuadrado sobre la mitad [$(b/2)^2$] es igual al cuadrado sobre la recta compuesta por la mitad y la recta añadida [$(x+b/2)^2$]."[HEATH, 1956, I, p. 385]

O sea que en esta proposición se demuestra la igualdad que se expresaría, en lenguaje actual, $(x+b).x + (b/2)^2 = (x+b/2)^2$. La construcción geométrica que acompaña estas proposiciones es un cuadrado de lado "x" completado con dos rectángulos de lados "x" y "$b/2$" y un cuadrado de lado "$b/2$" para obtener un cuadrado de lado "$(x + b/2)$". Cabe destacar que en el texto de Euclides no hay símbolos, ni números, ni expresiones algebraicas, sólo figuras y relaciones entre ellas y sus lados, es decir, sólo hay geometría: segmentos que se añaden y que cuando se multiplican producen figuras geométricas.

El uso conjunto de razonamientos geométricos y algebraicos se puede encontrar en la obra de Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi, matemático, astrónomo y miembro de la Casa de la Sabiduría de Bagdad, que murió en 850 y es considerado como el creador de las reglas del álgebra. Su obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813) fue traducida al latín por Roberto de Chester con el título *Liber algebrae et almucabala* (1145), de donde proviene el nombre actual de álgebra. La obra de al-Khwarizmi, consta de una parte teórica con las reglas para resolver ecuaciones (hasta segundo grado) con coeficientes positivos que clasifica en seis tipos y una parte práctica que contiene problemas ilustrativos de cada uno de los tipos: problemas de números, de comercio, de dotes, del trigo y la avena, de los ejércitos y de los correos.[3] El lenguaje empleado es retórico, sin utilización de símbolos y con justificaciones geométricas de las soluciones encontradas utilizando los cuadrados y los rectángulos de las

[2] Las sesiones de la asignatura son: Los algoritmos numéricos de Babilonia (aprox. 1.800 aC.). Las construcciones geométricas de los griegos (aprox. 300 aC.). Las posibles raíces del álgebra: Diofanto de Alexandria (aprox. 250-350 dC.). El álgebra en el mundo árabe: Mohamed ben Musa Al-Khwarizmi (850 dC.). El albor del álgebra en las aritméticas mercantiles. Los algebristas italianos: Girolamo Cardano (1501-1576). El *Arte Mayor* en la Península Ibérica en el siglo XVI. Los libros de álgebra de Rafael Bombelli (1526-1572). Álgebra y geometría en François Viète (1540-1603). El desarrollo del lenguaje simbólico: Pierre Hérigone (1580-1643). *La Géométrie* de René Descartes (1596-1650). El desarrollo del álgebra de Viète para calcular áreas: Pietro Mengoli (1625-1686). El teorema fundamental del álgebra.

[3] Al-khwarizmi explica al comienzo de la obra: "Mi propósito es componer una obra breve sobre el cálculo por las reglas de compactación y reducción, limitándonos a lo que es a la vez más fácil y más útil en la aritmética, y que los hombres necesitan constantemente en los casos de herencias, legados, particiones, pleitos así como en el comercio y en todas las relaciones de los unos con los otros, o bien donde se necesitan medidas de tierras, excavaciones de canales, cálculos geométricos y otros asuntos de muchos varios tipos." [AL-KHWARIZMI, 1986, p. 3]

proposiciones euclidianas mencionadas antes. Los árabes también presentan otras justificaciones geométricas similares, así construyen un cuadrado de lado "x" y lo completan con cuatro rectángulos de lados "x" y "$b/4$" y cuatro cuadrados de lados "b/4" para obtener un cuadrado de lado "$(x+ b/2)$". Estas construcciones geométricas con rectángulos y cuadrados servían para justificar con la geometría, la ciencia por excelencia, la regla de resolución de la ecuación de segundo grado. Quien difundió en el mundo occidental todos estos conocimientos árabes fue Leonardo de Pisa (1180-1250), hijo de un cónsul, denominado Bonacci, que es conocido con el nombre de Fibonacci. En su obra *Liber abaci* (1202) en el capítulo 15 refleja los problemas que aprendió a calcular en las álgebras árabes así como los métodos de cálculo de la numeración hindú. En su obra también utiliza justificaciones geométricas similares. La época menos fructífera del desarrollo de las ecuaciones algebraicas corresponde a los siglos XIII y XIV, en que florecieron las matemáticas comerciales con las obras que hoy denominamos aritméticas mercantiles.[4] Algunas de estas aritméticas incluían un último bloque de álgebra y otras no, de hecho no se resuelven casos nuevos pero ayudan a la difusión de las reglas algebraicas árabes y de sus justificaciones geométricas. El saber de estas aritméticas mercantiles y de las fuentes orientales usadas por los mercaderes italianos se recoge en la obra enciclopédica de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* (1494) que tuvo gran difusión en su época y que también contiene las justificaciones geométricas euclidianas en la Distinción Octava. En la Italia renacentista del siglo XVI podemos señalar entre otros, a Niccolo Tartaglia (1499-1557) con la obra *Quesiti et inventioni diverse* (1546) y a Girolamo Cardano (1501-1576) con su obra *Artis Magnae sive de Regules Algebraicis* (1545), ninguna de ellas aporta novedades en cuanto a las justificaciones geométricas mencionadas.

Uno de los primeros en cuestionar estas justificaciones geométricas y en proponer otras nuevas fue Pedro Núñez (1502-1578) con su *Libro de Álgebra en Aritmética y Geometría* (1567).[5] Ya desde el título, Núñez indica que el álgebra se presenta relacionada con la geometría al mismo nivel que con la aritmética. En el prólogo expresa también su intención de emplear el álgebra, ciencia muy aprovechable, para encontrar la cantidad desconocida en cualquier cuestión aritmética o geométrica.[6] Núñez utiliza el álgebra para resolver problemas de geometría, pero también emplea las construcciones geométricas euclidianas para justificar las soluciones de las ecuaciones y para demostrar resultados aritméticos.[7] Bajo el título "Siguen se otras demostraciones nuevas y más perfectas" Núñez presenta nuevas demostraciones expresando sus dudas sobre la certeza de las demostraciones anteriores, puesto que en ellas se está suponiendo que existe un número que verifica la ecuación, y esto no siempre es cierto. En palabras del autor, "Más estas demostraciones de las tres reglas postreras puesto que sean muy claras, podrá el adversario impedir, diciendo, que en la demostración de la primera presuponemos que un censo (x^2) con las cosas (bx) en cualquier número que ellas sean, pueden ser iguales a cualquier número, tomado número como habemos definido en principio de este libro y que este presupuesto no es cierto. Por lo cual será necesario demostrarlo." [NÚÑEZ, 1567, p. 14r]. Aunque Núñez fue pionero en buscar otras construcciones geométricas de la solución de la ecuación de segundo grado, las construcciones más singulares aparecerán un poco más tarde con François Viète (1540-1603) y con René Descartes (1596-1650) como analizamos en el siguiente apartado.

Álgebra y geometría en el siglo XVII. Otras justificaciones geométricas

El año 1591, con la aparición de la obra *In artem analyticen isagoge de Viète*, se hizo patente la ventaja de utilizar símbolos dentro de la matemática, no sólo para representar la incógnita, sino también para las

[4] Hay muchas aritméticas mercantiles en el periodo 1300-1500, de las cuales más de trescientas en manuscritos italianos y sólo treinta en franceses. La aparición de la imprenta a mitad del siglo XV ayudó a su difusión. Estaban escritas normalmente en lengua vulgar (no en latín) y algunos historiadores consideran que muchos comerciantes las tenían en las estanterías porque daban prestigio. Véase MASSA ESTEVE [2005, p. 9].

[5] Sobre el álgebra y la geometría en el libro de Núñez, consultar ROMERO [2010] y MASSA [2010].

[6] El autor lo expresa de este modo, "De todollos Livros que nas Sciencias Mathematicas tenho composto, muito alto &excelente Principe, nenhum he de tanto proveito como este de Algebra, que he conta fácil & breve para conhecer a quantidade ignota, em qualquer propósito de Arithmetica& Geometría." [NÚÑEZ, 1567, sin paginar]

[7] A lo largo de toda la obra Núñez va describiendo las operaciones aritméticas entre las cantidades que define, ya sean números enteros, quebrados, raíces, binomios y a continuación justifica estas operaciones mediante construcciones geométricas. Por ejemplo, Núñez presenta demostraciones geométricas para la suma de raíces, véase NÚÑEZ [1567, p. 44r- 44v], para la diferencia de raíces, véase NÚÑEZ [1567, p. 56v-57r] y para la multiplicación de raíces, véase NÚÑEZ [1567, p. 50v-52v], siempre utilizando proposiciones euclidianas.

cantidades conocidas, de forma que se podía trabajar con ecuaciones en forma general ($ax^2 + bx + c = 0$). Viète intentó explicar el camino que empleaba para resolver las ecuaciones enmarcándolo dentro del análisis griego.[8] El álgebra de Viète fue la guía para resolver ecuaciones en la aritmética, en la geometría, en la trigonometría... Con Viète las expresiones algebraicas se convierten en modernas, en el sentido de que el rigor y la generalidad con la que son empleadas son similares a los actuales, aunque utiliza una simbología primitiva, sin signo de igualdad, sin exponentes, ni signos radicales.

Cuando el trabajo de Viète se conoció, durante los primeros años del siglo diecisiete, algunos matemáticos empezaron a valorar la utilidad de los procedimientos algebraicos para resolver problemas geométricos [MAHONEY, 1980 y BOS, 2001]. De hecho, la edición de la obra de Descartes titulada *La Géométrie* (1637), que aparece como un apéndice del *Discours de la Méthode*, es considerada uno de los puntos fundamentales en la evolución del álgebra y, en concreto, para la resolución de las ecuaciones. La obra está dividida en tres libros: el primero titulado "sobre los problemas de construcción que requieren sólo líneas rectas y círculos", el segundo titulado "sobre la naturaleza de las líneas curvas" y el tercero titulado "sobre la construcción de los problemas que son sólidos o quasisólidos". Descartes empieza el libro I construyendo un álgebra de segmentos y muestra cómo sumar, multiplicar, dividir y extraer la raíz cuadrada de segmentos haciendo construcciones geométricas. Este trabajo de Descartes supuso un punto de partida para contemplar la geometría desde otra perspectiva. Además, la obra de Descartes contiene la notación actual con dos variantes menores: escribe xx, aa,... en lugar de x^2, a^2,... y no usa el signo nuestro de igualdad.

Después de esta breve pincelada histórica presentamos las justificaciones geométricas de Viète y de Descartes por separado para reflexionar sobre el significado de sus construcciones y los teoremas básicos usados.

Una de las características más importantes de la obra de Viète es que identificó las ecuaciones algebraicas con las proporciones mediante el producto de medios y extremos de una proporción. Veamos pues como trataba Viète la justificación geométrica de la solución de la ecuación de segundo grado en 1646, en la obra *Effectionum Geometricarum Canonical Recensio*. Esta es una de las construcciones que analizamos con los alumnos (ver fig. 1),

> "Proposición XII. Dada la media proporcional de tres cantidades y la diferencia de los extremos, encontrar los extremos."[9]

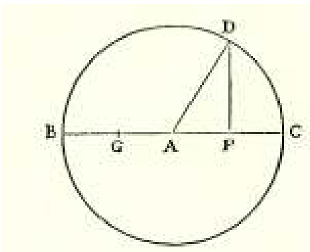

Figura 1. Construcción de Viète.

Dice Viète: "Sea FD la media proporcional de tres cantidades y sea GF la diferencia entre los extremos. Encontrar los extremos. Trazaréis GF y FD formando ángulo recto y dividiréis GF por la mitad en A. Describiréis

[8] El objetivo de su "arte analítico" era proporcionar un método para resolver todos los problemas mediante tres procesos. El primero consistía en transformar el problema en una ecuación compuesta de cantidades conocidas y desconocidas (zetética). El segundo en probar los teoremas conocidos a partir de la ecuación planteada (porística). En el último proceso, que era el más importante para Viète, se estudiaba la estructura de las ecuaciones planteadas para poder encontrar la solución (exegética). Así resumía Viète estas ideas al final de su obra: "Finalmente, el arte analítico, dotado de sus tres formas zetética, porística y exegética, reclama para él mismo la solución del problema más grande de todos que es SOLUCIONAR TODOS LOS PROBLEMAS". [VIÈTE, 1646, p. 12]

[9] "Propositio XII. Data media trium proportionalium & differentia extremarum, invenire extremas." [VIÈTE, 1646, p. 234]

un círculo de centro A e intervalo AD y extenderéis la circunferencia AG y AF dando los puntos B y C. Digo que hecho esto los extremos que buscamos son BF y FC, entre los cuales la media proporcional es FD."[10]

Análisis con los alumnos: Hay que señalarles que aquí Viète plantea la ecuación $x^2 + bx = c$ mediante una proporción, en lenguaje actual, $(x + b) : c^{1/2} = c^{1/2} : x$. Traza b y $c^{1/2}$ formando un ángulo recto y divide b por la mitad. Describe un círculo de radio la hipotenusa del triángulo formado por $b/2$ y $c^{1/2}$, y, utilizando el teorema de Pitágoras, deduce que las soluciones serán los segmentos FC y BF. Viète puede asegurar que la figura se identifica con la ecuación a través del teorema de la altura, aunque no lo menciona. Las cuestiones que se plantean a los alumnos son del tipo: Resuelve el problema de Viète introduciendo números en el enunciado. Reproduce la construcción geométrica y razona el procedimiento. ¿Puedes utilizar esta construcción para cualquier ecuación? Razona. ¿Qué ocurre con las soluciones negativas? ¿Cómo se utilizan el teorema de Pitágoras y el de la altura? Explicita su relación con la solución de la ecuación. ¿Qué diferencia sustancial tiene esta construcción con la euclidiana?, etc.

Analicemos ahora la construcción geométrica de la solución en una ecuación de segundo grado en *La Géométrie de Descartes* (ver Fig. 2),

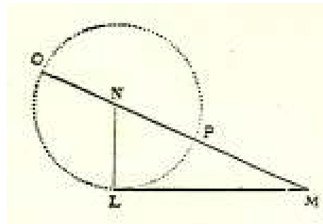

Figura 2. Construcción de Descartes

Descartes explica: "Pero si tengo por ejemplo $z^2 \infty az + bb$ construyo el triángulo rectángulo NLM, donde el lado LM es igual a "*b*", raíz cuadrada de la cantidad conocida "*bb*", y la otra LN es "*½ a*", la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por "*z*" que se supone ser la línea desconocida. Entonces prolongando MN, base de este triángulo, hasta O, de forma que NO sea igual a NL, la línea total OM es la línea buscada "*z*". Y ella se expresa de este modo $z \infty 1/2\, a + (¼aa + bb)^{1/2}$".[11]

Análisis con los alumnos: Hay que destacar que en la obra de Descartes ya aparece explícitamente la fórmula simbólica que empleamos actualmente en el aula. La construcción de Descartes corresponde a la construcción de una línea desconocida en función de las líneas conocidas. Descartes identifica los términos de la ecuación con las líneas y les asigna una letra, opera con las letras tanto si representan líneas conocidas como desconocidas. Así la solución de la ecuación viene expresada por la suma de una línea y una raíz cuadrada que se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras. Descartes puede afirmar que la figura y la ecuación se pueden identificar a través de la propiedad geométrica de la potencia de un punto exterior a una circunferencia, aunque no lo menciona. Las cuestiones planteadas a los alumnos son similares a las de Viète, aunque también se puede reflexionar sobre el significado de las dos construcciones. Las diferencias con Viète son importantes dado que Descartes escribe explícitamente en el margen "cómo se resuelven" y en cambio Viète soluciona un problema

[10] "Sit data FD media trium proportionalium, data quoque GF differentia extremarum. Oportet invenire extremas. Inclinentur GF, FD ad angulos rectos, &secetur GF bifariam in A. Centro autem A intervallo AD, describatur circulus, ad cujus circumferentiam producantur AG, AF, in punctis B, C. Dico factum esse quod oportuit. Extremas enim inveniundas esse BF, FC inter quas media proportionalis est FD." [VIÈTE, 1646, p. 234]

[11] "Car si i'ay par exemple $z^2 \infty az + bb$ ie fais le triangle rectangle NLM, dont le costé LM est esgal à *b* racine quarrée de la quantité connue *bb*, & l'autre LN est 1/2*a*, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par *z* que ie suppose estre la ligne inconnue puis prolongeant MN la baze de ce triangle, iusques a O, en sorte qu'NO soit esgale a NL, la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte $z \infty 1/2\, a + (¼\, aa + bb)^{1/2}$." [DESCARTES, 1637, pp. 302-303]

geométrico con una figura en la que identifica una proporción con una ecuación. Otro punto importante a considerar con los alumnos es el método analítico y/o sintético usado en cada una de las construcciones.

Reflexiones finales

Las valoraciones de los alumnos respecto a la parte práctica son todas muy positivas, por ejemplo, a la pregunta sobre la metodología de la asignatura un alumno responde: "La mezcla entre una primera parte teórica donde se explica el contexto histórico y se va avanzando en la evolución del álgebra y una segunda parte práctica con pequeñas demostraciones hace que la asignatura sea dinámica e interesante." Nuestros análisis y las respuestas de los cuestionarios de evaluación de las actividades implementadas permiten concluir que es esencial trabajar con fuentes primarias para enseñar historia de las ciencias y de las técnicas, y que, además, el conocimiento de las diversas culturas y sociedades proporciona al alumnado una formación más integral. De hecho, con estas actividades se ofrece a los alumnos una dimensión intelectual de la matemática que la incluye en la historia del pensamiento científico, de la cual ha sido y sigue siendo una parte fundamental.

En lo que concierne a la contribución de esta actividad concreta a la formación del intelecto del alumnado se requiere alguna reflexión más. La geometría, que estudia las figuras del plano y del espacio, tiene un gran valor visual estético y la belleza y elegancia de sus construcciones la convierten en uno de los recursos más apropiados para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumnado tanto en la visualización intuitiva (clasificar y analizar propiedades de las figuras), como en los procesos deductivos de sus demostraciones (teoremas de Pitágoras o de Tales, construcción de mediatrices y/o del baricentro de un triángulo). Sin embargo, los razonamientos geométricos adquieren su excepcional potencial al relacionar el álgebra con la geometría, o sea al establecer conexiones entre fórmulas y figuras, entre cálculos algebraicos simbólicos y operaciones geométricas y construcciones. Esta fusión del razonamiento geométrico con el algebraico permite además al alumnado la exploración de razonamientos inductivos, de generalización de resultados y de demostraciones más rigurosas, sistemáticas y abstractas. Así el análisis y la reflexión de estas construcciones geométricas de expresiones algebraicas en la historia, ayudan también a desarrollar el pensamiento analítico y sintético del alumnado y a mejorar su formación científica.

Bibliografía

AL-KHWARIZMI (1986) *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Hildesheim, Zürich, Nueva York, Georg Olms Verlag. Rosen, F. (ed. I trad.), (1ª ed. Londres, 1831).

BARBIN, E. (2000) "Integrating history: research perspectives". En: J. Fauvel & J. Van Maanen (eds.) *History in mathematics education: the ICMI study*, Dordrecht, Kluwert, 63-66.

BASHMAKOVA, I. y SMIRNOVA, G. (2000) *The Beginnings and Evolution of Algebra*. Washington, USA, The Mathematical Association of America. Trad. del ruso por Abe Shenitzer.

BOS, H. J. M. (2001) *Redefining Geometrical Exactness*. "Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences", Nueva York, Springer-Verlag.

DESCARTES, R. (1637) *La géométrie*. Trad. y edit. "The geometry of René Descartes" por Smith, D. E. , Latham, M. L. Nueva York, Dover, 1954.

HEATH, T. (ed.) (1956) *Euclid. The thirteen Books of The Elements*. Nueva York, Dover.

JAHNKE, H. N.; KNOCHE, N.; OTTE, M. & W. ASPRAY (eds.) (1996) *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht.

LUSA, G. y ROCA ROSELL, A. (2004) "El lugar de la historia de la ciencia y de la técnica en el espacio europeo de educación superior". En: *Actes de la Jornada de reflexió i debat sobre el Model Docent de la UPC en l'Espai Europeu d'Educació Superior*, Barcelona, UPC, sin paginar.

MAHONEY, M. S. (1980) "The beginnings of algebraical thought in the seventeenth century". En: S. Gaukroger

(ed.) *Descartes' philosophy, mathematics and physics*. Totowa/Brighton, Barnes and Noble/Harvester, 141-156.

MASSA ESTEVE, M. R. (2003) "Aportacions de la història de la matemática a l'ensenyament de la matemática". *Biaix, 21*, 4-9.

MASSA ESTEVE, M. R. (2005) "Les equacions de segon grau al llarg de la història". *Biaix, 24*, 24-15.

MASSA ESTEVE, M. R. (2010) "Àlgebra I geometria al Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria (1567) de Pedro Núñez". *Quaderns d'Història de l'Enginyeria, XI*, 101- 125.

MASSA ESTEVE, M. R.; GUEVARA CASANOVAS, I.; ROMERO VALLHONESTA, F. & PUIG-PLA, C. (2011) "Understanding Mathematics using original sources. Criteria and Conditions". En: E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (eds.) *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Sixth European Summer University*. Vienna, Verlag Holshausem GmbH, 415-428.

MASSA ESTEVE, M. R. (2012) "The Role of the History of Mathematics in Teacher Training Using ICT". En: O. Bruneau, P. Grapi, P. Heering, S. Laubé, M. R. Massa Esteve &T. de Vittori (eds.) *Innovative Methods for Science Education: History of Science, ICT and Inquiry Based Science Teaching*. Berlin, Frank & Timme, 81-107.

NUÑEZ, P. (1567) *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*. Anvers, Herederos de Arnoldo Birckman.

PARSHALL, K. H. (1988) "The art of Algebra from Al-Khwarizmi to Viète: a study in the natural selection of ideas". *History of Science, 26*, 129-164.

ROMERO VALLHONESTA, F. (2010) "Les quantitats irracionals a l'álgebra de Pedro Núñez". *Quaderns d'Història de l'Enginyeria, XI*, 53-77.

VIETE, F. (1646) *Opera Mathematica*. Schooten, F. A. (ed.) Hildesheim-Nueva York, Georg Olms Verlag. Reimpreso 1970.

Esta investigación se incluye en los proyectos: HAR 2010-17461/HIST y HAR 2013-44643-R