

Generación automática de esquemas de bielas y tirantes considerando criterios constructivos

Automatic generation of strut-and-tie schemes adjusted for constructability

Jesús Miguel Bairán García⁽¹⁾

Recibido | Received: 01-10-2011
Aceptado | Accepted: 29-12-2011

Resumen

El método de bielas y tirantes (BT) es de gran utilidad en el dimensionamiento a rotura de elementos de hormigón, particularmente en casos de regiones D donde las hipótesis clásicas de vigas y placas no son aplicables. Aunque el método viene recogido en muchas normativas modernas, existen al menos tres aspectos que limitan un uso más extendido en la práctica: no da información en servicio, la selección de esquemas factibles no es trivial en casos complejos y la solución no es única. En este artículo se propone un método que genera esquemas factibles de BT mediante el uso de análisis lineales y criterios de optimización para modificar la distribución de propiedades del material en la región de estudio. No es necesario disponer un armado inicial y permite considerar criterios constructivos; en particular, se aborda el de armado ortogonal. Se incluyen casos de estudio y ofrecen conclusiones y perspectivas futuras.

Palabras clave: regiones D, método de bielas y tirantes, criterios constructivos, optimización topológica, campos de tensiones

Abstract*

Strut-and-Tie (ST) method is very useful in the Ultimate Limit State design of reinforced concrete elements, particularly in the case of D regions where beam and plate theories cannot be applied. In spite of being included in most modern design codes, there are at least three issues that limit a more extended use of this method in practice: it doesn't provide information in service, the selection of suitable schemes is not trivial for complex cases and the solution isn't unique. In this paper a novel method to produce suitable ST schemes is proposed by combining linear elastic analyses and optimization criteria. It is based on suitable modifications of the distribution of elastic parameters in the structural model. Without requiring initial distribution of reinforcement, it is capable of considering constructability conditions, particularly the condition of orthogonal reinforcement layout is considered in this paper. A series of case-studies are presented and analyzed; finally, conclusions are drawn.

Keywords: D-regions, strut-and-tie method, constructability, topological optimization, stress fields.

* An extensive English language summary of the present article is provided on page 94 of this issue both for the convenience of non-Spanish-speaking readers and inclusion in databases.

(1) Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Prof. Lector. Universitat Politècnica de Catalunya (Barcelona, España).

Persona de contacto / Corresponding author: jesus.miguel.bairan@upc.edu

1. INTRODUCCIÓN

La mayor parte de las estructuras pueden ser asimiladas a una serie de elementos prismáticos o superficiales en los que son aplicables las teorías clásicas de vigas y placas. En éstas se postulan hipótesis sobre la distribución de deformaciones en las secciones transversales; p.e. las teorías de Navier-Bernoulli y Timoshenko en el caso de vigas, o su contrapartida de Love-Kirchoff y Reissner-Mindlin en el caso de placas. Estas hipótesis simplifican notablemente el cálculo y se pueden desarrollar formulaciones analíticas para analizar o dimensionar en situaciones de servicio o rotura.

Sin embargo, ya sea por las condiciones geométricas o de aplicación de las cargas, existen regiones de la estructura donde no son aplicables las teorías clásicas. De esta forma, se identifican dos tipos de regiones en una estructura. Se conoce como región-B (*"Beam region"*), o región viga, las zonas o elementos donde se pueden aplicar las teorías clásicas. Las zonas o elementos donde no se pueden aplicar las teorías clásicas se conocen como zonas de discontinuidad o región-D (*"Disturbed region"*). En la Figura 1a se identifican las diferentes regiones en una estructura porticada típica. Las regiones D pueden ser zonas localizadas de estructuras lineales, e.g. apoyos a media madera, ménsulas, zonas de anclaje de pretensado o próximas a la aplicación de cargas, nudos, etc. o bien constituir toda una estructura global o elemento cuando la geometría no permite su asimilación a un prisma o placa, como la representada en la Figura 1b. En las zonas locales, la extensión de la región D está limitada, en virtud del Principio de Saint-Venant, a dimensiones próximas al espesor del elemento.

En general, el cálculo de las regiones D debe hacerse considerando el problema tridimensional de equilibrio de un medio continuo. Actualmente existen numerosas herramientas comerciales de cálculo que son capaces de resolver dicho problema con cierta facilidad, al menos en rango lineal elástico. No obstante, las soluciones obtenidas no son directamente aplicables para el hormigón armado, ya que éste puede fisurar para cargas relativamente pequeñas. Más aún, de acuerdo a las normativas actuales, basadas en el método de los estados límite, es necesario estimar

las situaciones de Estados Límite de Servicio (E.L.S.) y Estados Límite Últimos (E.L.U.), involucrando cálculos en rotura, lo cual sólo puede hacerse con métodos no-lineales, más complejos y que requieren conocer las armaduras con anterioridad.

El método de bielas y tirantes (BT) fue propuesto formalmente en la década de 1980 por Schlaich et al [1] como un método de dimensionamiento de carácter general aplicable a cualquier tipo de estructuras y, como caso particular, a regiones D. En este método se aproxima el comportamiento resistente al de una celosía equivalente que explica el flujo de sus fuerzas y el equilibrio interno, ya sea de forma estable o indiferente. La celosía equivalente se compone de elementos a compresión (bielas), elementos a tracción (tirantes) y la intersección entre ellos (nudos). Las bases del método y las condiciones que debe reunir la celosía equivalente se resumen en el apartado 2; en las referencias [2, 3, 4, 5] se puede encontrar una exposición más detallada. En las referencias [3, 4, 5, 6] se incluyen además numerosos casos prácticos de aplicación.

El método BT puede considerarse como una generalización de otras teorías clásicas, como la analogía de la celosía o los campos de compresiones, donde las bielas y tirantes representan las resultantes de los campos de compresión y tracción respectivamente. Esta representación es la considerada en la analogía de la celosía de Ritter-Mörsch, tradicionalmente usadas para explicar los mecanismos resistentes a cortante y torsión en el hormigón fisurado. Actualmente el método BT es aceptado por la gran mayoría de normativas de proyecto, entre ellas la EHE-08 [7] en la que se usa como método general de proyecto en rotura. En la literatura se han propuesto otros métodos similares que mantienen el concepto de campo en la distribución de tensiones de tracción y compresión, para aplicaciones similares, ver Ref. [8].

Sin embargo, existen al menos tres aspectos que limitan un uso más extendido en la práctica: no es aplicable en servicio, la elección de esquemas factibles no es trivial en casos complejos y la solución no es única. Los dos últimos puntos son cruciales para la estimación de los esfuerzos internos a ser resistidos y el posterior dimensionado de las armaduras. Es por

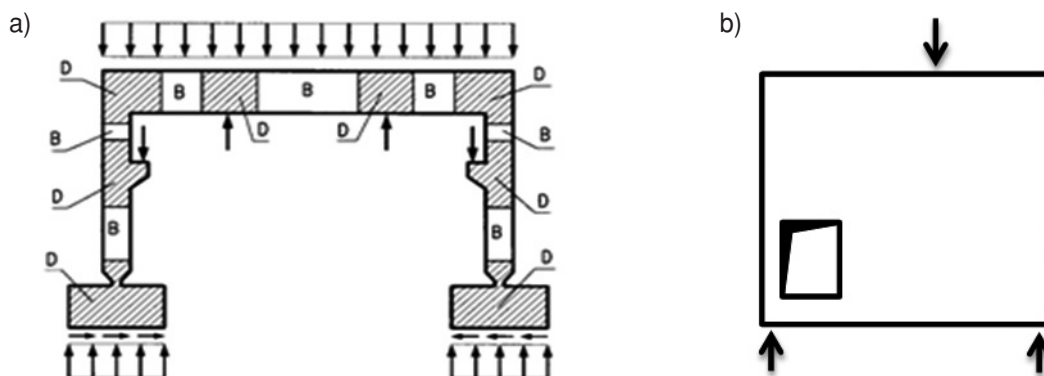


Figura 1. Regiones D en estructuras porticadas (a) y en elementos completos (b)

ello que en la literatura se han propuesto diferentes metodologías para poder obtener esquemas resistentes de forma racional y automática. Entre ellos pueden mencionarse trabajos en los que a partir de una distribución de armaduras conocida (distribución de tirantes) se obtiene la distribución del campo de compresiones (bielas) necesario para la estabilidad. Este tipo de métodos se basa, en general, en una serie de análisis no-lineales, más o menos simplificados, en los que al menos se debe considerar la posibilidad de fisuración del hormigón a tracción. Si el armado es adecuado, el análisis no-lineal converge con una distribución de tensiones en el hormigón que reproduce el campo de compresiones. Entre los trabajos que aplican esta estrategia cabe citar las referencias [9, 10].

La estrategia anterior es especialmente útil para verificar armados propuestos. En el caso de que se busque todo el esquema BT, incluyendo la disposición de tirantes, se ha recurrido a métodos de optimización topológica en los que se busca una forma estructural de mínimo peso o bien de menor energía de deformación, ver [11]. En la Ref. [12] se propone un método que, partiendo de una región sólida modelizada mediante elementos finitos, se van eliminando los elementos que contribuyen menos al sistema, uno por cada paso de iteración, hasta que la forma resultante converge a un esquema que se asemeja a una celosía; una metodología similar se sigue en [13]. En la referencia [14] se plantea el problema de obtener la forma estructural de menor energía pero, en lugar de usar una representación en continuo (sólido), considera directamente la representación en forma de estructura de barras articuladas investigando las diferentes conectividades posibles entre los nudos.

Las técnicas basadas en la optimización topológica tienen la ventaja de que no necesitan proponer una armadura inicial y que el esquema final es una solución óptima en términos de peso o energía. Sin embargo, puede arrojar soluciones no convenientes desde el punto de vista constructivo o de disposición de armaduras, p.e. con armaduras inclinadas que dificultan la construcción.

Por otro lado, cabe destacar que se han realizado estudios experimentales para evaluar la validez del método BT en el caso del hormigón armado y delimitar su campo de aplicación y puntos débiles. En ese sentido, cabe mencionar la referencia [15], así como las recopiladas en [5].

En este artículo se propone un método de generación de bielas y tirantes, basado en optimización topológica que utiliza análisis lineales elásticos de la región D en estudio. El método se basa en modificaciones sucesivas de la distribución de propiedades mecánicas en la estructura de acuerdo a criterios energéticos. Al final del proceso, el campo de tensiones principales de compresión y tracción permite definir el esquema de bielas y tirantes, sin necesidad de dispo-

ner un armado inicial. Esta estrategia tiene la ventaja de que en función de los criterios energéticos usados y de distribución de propiedades mecánicas se pueden obtener esquemas alternativos o introducir condicionantes constructivos. En particular, utilizando propiedades de materiales isotropos y ortotropos es posible producir esquemas con armados ortogonales o no. Adicionalmente se presentan una serie de ejemplos de aplicación que permiten evaluar las bondades del método, analizar su comportamiento y prestaciones. Finalmente se ofrecen conclusiones y perspectivas.

2. BASES DEL MÉTODO DE BIELAS Y TIRANTES

El método BT se basa en el Teorema del Límite Inferior de la Teoría de la Plasticidad, el cual establece que si una estructura se carga con una sollicitación Q^* y se puede encontrar una distribución interna de tensiones que satisfaga las siguientes condiciones: 1) en ningún punto se supera el límite de plastificación del material, 2) satisface el equilibrio interno y externo y 3) satisface las condiciones de contorno, entonces se tiene que la carga Q^* es un límite inferior de la carga de rotura de la estructura, Ec. (1).

$$Q^* \leq Q_u \quad (1)$$

Del teorema anterior puede deducirse que aunque el método BT no arroja soluciones exactas, éste es siempre conservador, lo cual lo hace muy atractivo para el proyecto de estructuras. Sin embargo, la validez del teorema no puede garantizarse matemáticamente en el caso de las estructuras de hormigón armado por las siguientes razones, Ref. [16]:

- La ductilidad del hormigón es limitada y no puede equipararse a un material plástico perfecto como se asume en la teoría de plasticidad. Además, algunos esquemas de BT, aunque cumplan los requisitos del teorema, no se pueden desarrollar al necesitar mucha ductilidad en el hormigón.
- La resistencia a compresión del hormigón no es constante, sino que depende de las tensiones y deformaciones laterales.
- Existe la posibilidad de rotura por anclaje, la cual es de carácter frágil.

La puesta en práctica del método requiere complementar los requisitos formales con otros de carácter técnico y de buena práctica que garanticen que la carga que se está estimando es segura [2, 3, 4, 5, 6]. Éstos incluyen la definición de la capacidad resistente de las bielas, tirantes y nudos para las diferentes situaciones [7], las comprobaciones de anclajes de armadura y recomendaciones sobre los ángulos mínimos de inclinación entre bielas y tirantes para garantizar que la compatibilidad de deformaciones del hor-

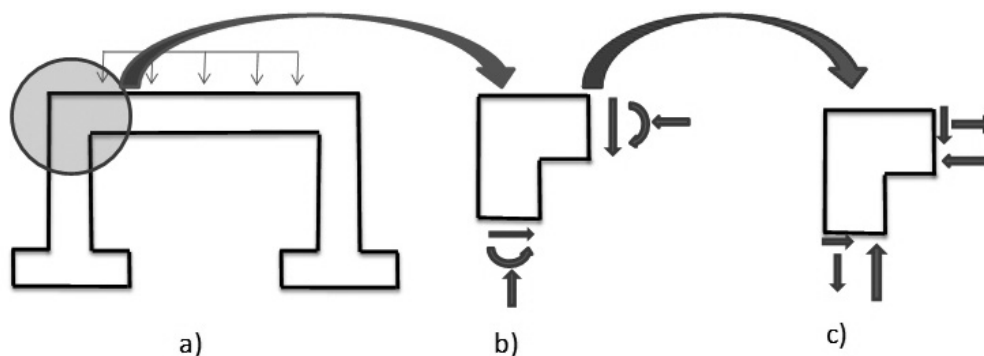


Figura 2. Límites de la región D en el caso de un nudo de un pórtico, diagrama de cuerpo libre y sistema de cargas equivalentes

migón pueda cumplirse sin excesivas demandas de ductilidad en el hormigón [4].

En la definición del esquema de BT no existen reglas generales, ya que en principio cualquier esquema compatible con las condiciones geométricas y de apoyos que explique el mecanismo de transmisión de las cargas (a veces denominado flujo de cargas) es posible. Algunas recomendaciones de buena práctica son: intentar no elegir esquemas muy diferentes de la solución elástica, intentar usar celosías isostáticas para evitar que la solución dependa de la compatibilidad de deformaciones y elegir los esquemas de menor energía de deformación. Teniendo en cuenta que las bielas (hormigón) suelen ser mucho más rígidas que los tirantes (armaduras) y que éstos últimos se dimensionarán para trabajar a una tensión más o menos constante ($f_{yd} \leq 400$ MPa), aproximadamente se obtiene el esquema de menor energía de deformación con la menor longitud de tirantes.

A pesar de la relativa libertad que existe en la elección del esquema de BT, este paso puede influir notablemente en el diseño final. En el apartado siguiente se propone un método que obtiene esquemas de bielas y tirantes en regiones de geometría cualquiera.

Se debe reconocer que el término “flujo” se suele usar de forma incorrecta ya que el esquema BT no representa realmente la integración de un campo vectorial. Sin embargo, en este artículo se mantendrá este término por su amplio uso en este campo. En ese sentido, se hará referencia al flujo de tracción y compresión asociado a dos campos vectoriales de tensiones principales cuyos módulos son respectivamente las magnitudes de las tensiones principales (σ_{11} y σ_{22}) y su dirección viene definida por las direcciones principales. Las bielas y los tirantes, representan la integración (resultante) de dichos campos vectoriales.

3. MÉTODO PROPUESTO PARA GENERAR ESQUEMAS DE BIELAS Y TIRANTES

3.1. Descripción general del proceso

Al igual que en el método general BT, el primer paso en el estudio de una región D es definir la frontera de

la región de estudio y aislar el cuerpo libre de la misma, como se representa en las Figuras 2a y 2b. Posteriormente, en virtud del Principio de Saint-Venant, se sustituyen los esfuerzos internos en los planos de corte del cuerpo libre por cargas puntuales estáticamente equivalentes como se aprecia en la Figura 2c.

El siguiente paso consiste en realizar un cálculo lineal elástico de la región aislada. Para ello se ha desarrollado un programa de análisis mediante el método de elementos finitos. El programa utiliza elementos triangulares de 3 nodos de tipo lagrangeano con interpolación lineal entre nodos y deformación constante. En esta etapa la respuesta a nivel material se considera perfectamente lineal, elástica, isotrópica y homogénea. De igual forma, en esta etapa se construye una malla de elementos finitos de la región D que será la misma en los pasos siguientes.

A partir de la información que proporciona la solución elástica, se definen una serie de factores de eficacia de material que se usarán como base para modificar las características del material en cada punto. Los factores de eficacia cuantifican la importancia relativa de cada elemento y, opcionalmente, identificará su modo de trabajo (tracción, compresión). A partir de aquí se inicia un proceso iterativo cuyo esquema general se muestra en la Figura 3. En cada iteración, tras modificar la distribución de propiedades elásticas en la región, se repite el análisis elástico.

En cada paso de iteración la nueva distribución de propiedades elásticas tiende a reducir la energía de deformación (W) de la estructura. Se considera que el proceso converge cuando entre dos iteraciones seguidas, el cambio relativo en la energía de deformación de la estructura, calculado como se indica en la Ec. (2), es menor que la tolerancia elegida. En los estudios presentados en este artículo se ha usado una tolerancia de 1%.

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{d} \quad (2)$$

En la ecuación anterior, \mathbf{q} y \mathbf{d} son respectivamente los vectores de cargas y desplazamientos nodales del

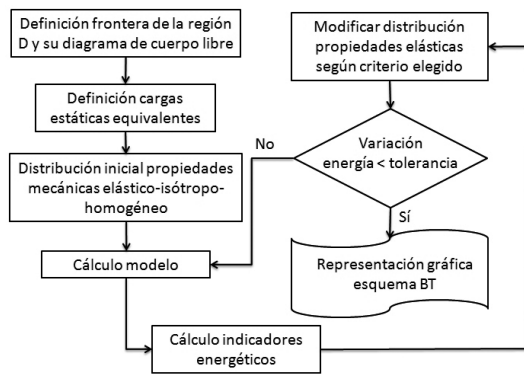


Figura 3. Diagrama de flujo general del método de generación de esquemas BT

modelo de la estructura. El esquema BT queda definido al final de la iteración en función de la distribución de las características mecánicas y el flujo de fuerzas internas. Variando los criterios con los que se modifican las propiedades mecánicas a lo largo del proceso se pueden obtener esquemas de armados distintos. No obstante, resulta evidente que no todos convergerán al mismo valor de energía mínima ya que al cambiar los criterios de toma de decisiones se añaden condiciones nuevas al problema.

En los apartados siguientes se proponen dos criterios de armado distintos: el primero tiende a minimizar la energía sin condicionantes en la orientación del campo de tracciones, que posteriormente será usado para definir los tirantes. Por lo tanto, puede producir tirantes inclinados. Este criterio se ha llamado criterio "isótropo - sin consideraciones constructivas" ya que, como se verá, aplica el mismo tratamiento a las zonas de compresión y a la de tracción y el tipo de matriz constitutiva usado es siempre de esta forma. El segundo criterio, usa matrices constitutivas ortótropas en las zonas de tracción para forzar orientaciones determinadas de los tirantes, por lo que ha sido denominado como criterio "ortótropo - con consideraciones constructivas".

3.2. Criterio 1: Isótropo - sin consideraciones constructivas

En el criterio isótropo se define el factor de eficiencia de cada elemento como el cociente entre la densidad de energía (energía por unidad de volumen) del elemento y la densidad de energía de la estructura completa, como se indica en la Ec. (3.1). Para garantizar la estabilidad numérica, el factor de efectividad no superara los límites superior e inferior que se indican en la Ec. (3.2).

$$f_c = \frac{W_e}{W_m} \tag{3.1}$$

$$0,01 \leq f_c \leq 1,0 \tag{3.2}$$

Donde W_m es la densidad de energía de toda la estructura, definida en la Ec. (4). En esta ecuación, V es

el volumen de la estructura original. W_e es la densidad de energía de cada elemento, como se muestra en la Ec. (5.1); la cual aparece desarrollada en la Ec. (5.2) para problemas 2D, en el sistema de coordenadas global y en el de las direcciones principales.

$$W_m = \frac{W}{V} \tag{4}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \tag{5.1}$$

$$W_e = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{22} \epsilon_{22}) \tag{5.2}$$

Las propiedades mecánicas de cada elemento (i) se modifican al final de cada iteración como se indica en la Ec. (6). Se debe notar que la matriz de rigidez del elemento seguirá siendo de forma isótropa. En estas ecuaciones E y G son respectivamente el módulo elástico y el módulo de cortante del material original y E_e y G_e son las propiedades mecánicas modificadas tras la iteración.

$$E_e = f_e E \tag{6.1}$$

$$G_e = f_e G \tag{6.2}$$

De forma similar, el volumen efectivo de material queda definido como se indica en la Ec. (7), donde $V(i)$ es el volumen de cada elemento.

$$V_e = \sum_{i=1}^{Nde} f_c(i) V(i) \tag{7}$$

3.3. Criterio 2: Ortótropo - con consideraciones constructivas

El criterio anterior aplica igual tratamiento a los elementos dentro de los campos de compresión (bielas) y los de tracción (tirantes). En este apartado se propone un segundo criterio que intenta discriminar entre los elementos que formarán parte de las zonas comprimidas de aquellas que están principalmente traccionadas, las cuales terminarán generando tirantes. Una vez identificados los elementos que formarán parte de tirantes, es posible modificar las propiedades mecánicas del material en esos puntos para potenciar ciertas direcciones en los campos de tensiones. En particular, se usarán matrices de rigidez ortótropas para dirigir las tracciones en sentido vertical u horizontal con la intención de producir esquemas de armado que faciliten la construcción.

Para discriminar si un elemento debe ser considerado como parte de una biela o un tirante se recurre a la Ec. (5) donde se observa que la energía de deformación es invariante con el sistema de coordenadas.

En el caso particular de las direcciones principales, se puede descomponer en dos términos: uno que engloba la energía absorbida por las tensiones principales menores, que tienden a ser de compresión (Ec. 8), y otro que representa la energía absorbida por las tensiones principales mayores, que tienden a ser de tracción (Ec. 9). La suma de ambos términos es igual a la densidad de energía completa del elemento (Ec. 5.2).

$$W_{22} = \frac{1}{2} \sigma_{22} \varepsilon_{22} \quad (8)$$

$$W_{11} = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11} \quad (9)$$

Los casos particulares en que las tensiones principales son del mismo signo: compresión biaxial (σ_{11} es de compresión) y tracción biaxial (σ_{22} es de tracción) no requieren un tratamiento especial ya que se considerarán como elementos del campo de compresiones o de tracciones respectivamente.

La cantidad de trabajo en tracción del elemento se cuantifica mediante el factor f_T definido en la Ec. (10). Así pues, es posible definir un umbral a^* para decidir si un elemento formará parte de un campo de tracciones o de compresiones. A partir de estudios de sensibilidad iniciales se recomienda que este umbral se tome entre 0.7 y 0.9. En este artículo se ha tomado un umbral de 0.8 para todos los ejemplos estudiados.

$$f_T = \frac{W_{11}}{W_e} \quad (10)$$

Elementos en el campo de compresiones: $f_T \leq a^*$

Si la fracción de energía de tracción no supera el umbral, ($f_T \leq a^*$), se considera que el elemento trabaja fundamentalmente a compresión y que forma parte de un campo de compresiones. En este caso se incluyen las zonas solicitadas a compresión biaxial y aquellos en los que la biela está sometida a tracción ortogonal a la dirección de compresión principal. Este último representa el caso de bielas en abanico o en forma de botella. Esta información podrá usarse en una posible etapa de comprobación de la resistencia de la biela, aunque esto no es motivo del presente artículo.

Las propiedades mecánicas de los elementos dentro de los campos de compresiones serán modificadas, de acuerdo al factor de eficiencia (Ec. 3), de la misma forma que en el criterio 1 (Ec. 6). Por lo que las zonas de compresión tendrán comportamiento isótropo y la dirección principal del campo podrá ser inclinada.

Elementos en el campo de tracciones: $f_T > a^*$ ó $\sigma_{22} > 0$

Si f_T supera el umbral a^* , o bien si la sollicitación es de tracción en las dos direcciones principales (biaxial), se considera que el elemento trabaja fundamentalmente a tracción y que forma parte de un campo de tracciones (tirante). En estos casos, la matriz de rigi-

dez del elemento toma una forma ortótropa con direcciones principales del material predefinidas según la dirección de armado deseado, p.e. para forzar las direcciones de las armaduras en sentido vertical y horizontal, la matriz de rigidez será como se indica en la Ec. (11).

$$D = f_{eT} \begin{bmatrix} f_x E & 0 & 0 \\ 0 & f_y E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde f_x y f_y modulan la rigidez del elemento en las dos direcciones de armado potenciando la existencia de un solo tirante, horizontal o vertical, cuando el trabajo tiene una dirección preferente. Por otro lado, el coeficiente f_{eT} afecta la matriz de rigidez en todas las direcciones por igual en función de la importancia del elemento. Estos factores se obtienen en función de la energía de deformación, calculada en el paso anterior como se indica en las las ecuaciones siguientes:

$$W_x = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad (12)$$

$$W_y = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y \quad (13)$$

$$f_x = \frac{W_y}{\max(W_x, W_y)} \quad (14)$$

$$f_y = \frac{W_x}{\max(W_x, W_y)} \quad (15)$$

De las expresiones (14) y (15) se observa que los factores f_x y f_y son cantidades positivas cuya suma es siempre la unidad. Por último, el coeficiente multiplicador a toda la matriz constitutiva (f_{eT}) se define como se indica en la Ec. (16).

$$f_{eT} = f_e f_T \left(\frac{W_x + W_y}{W_e} \right) \quad (16)$$

Se observa que la formulación propuesta incluye como caso particular las zonas armadas con dos tirantes oblicuos en las zonas de tracción biaxial ($f_x > 0$ y $f_y > 0$). En las zonas de tracción en dos direcciones en la que prevalezca una dirección sobre la otra se tendrá que uno de los factores (f_x ó f_y) tiende a cero y se tendrá un solo tirante.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En este apartado se desarrollan y analizan tres ejemplos de aplicación con el primer objetivo de mostrar las capacidades del método propuesto y también para estudiar el funcionamiento y evolución del proceso de generación de BT. En la Figura 4 se muestran los esquemas estáticos de los tres ejemplos conside-

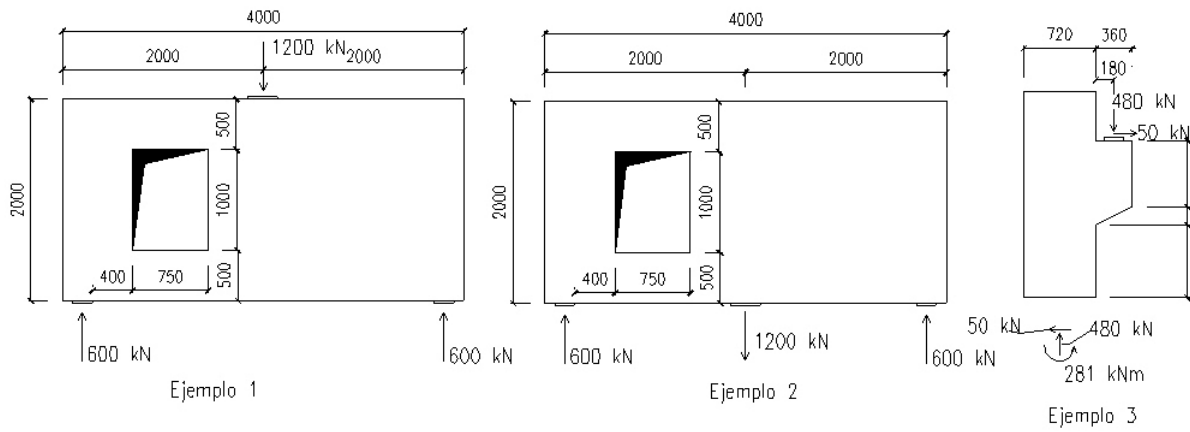


Figura 4. Casos de estudio considerados (cotas en mm)

radios. Los dos primeros consisten en vigas de gran canto con una abertura, teniendo el primero una carga superior y el segundo la carga colgada. El último ejemplo es una ménsula corta con una relación de aspecto (L/h) de 0,43. En todos los casos se analizarán los esquemas de armado obtenidos con los dos criterios expuestos en el apartado 3.

El método parte de la solución elástica del problema, considerando material lineal e isotrópico. La distribución de tensiones principales de tracción (σ_{11}) y compresión (σ_{22}) se muestra en la Figura 5 para los tres casos anteriores. En todos los casos se han usado elementos triangulares de tres nodos con interpolación lineal. El número de elementos usado es de 1.624 para

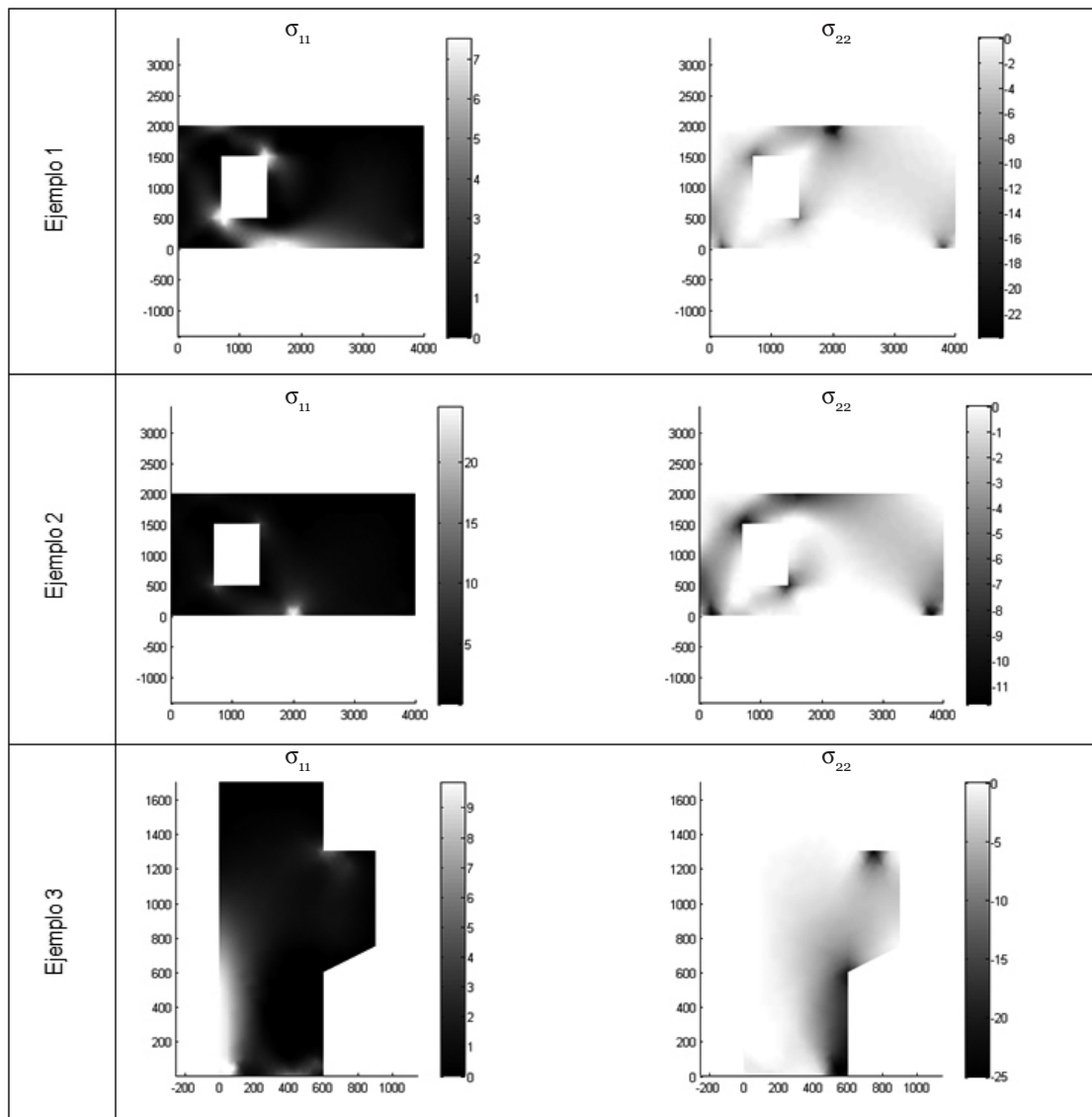


Figura 5. Solución lineal elástica inicial del estado tensional para los tres casos de estudio (MPa)

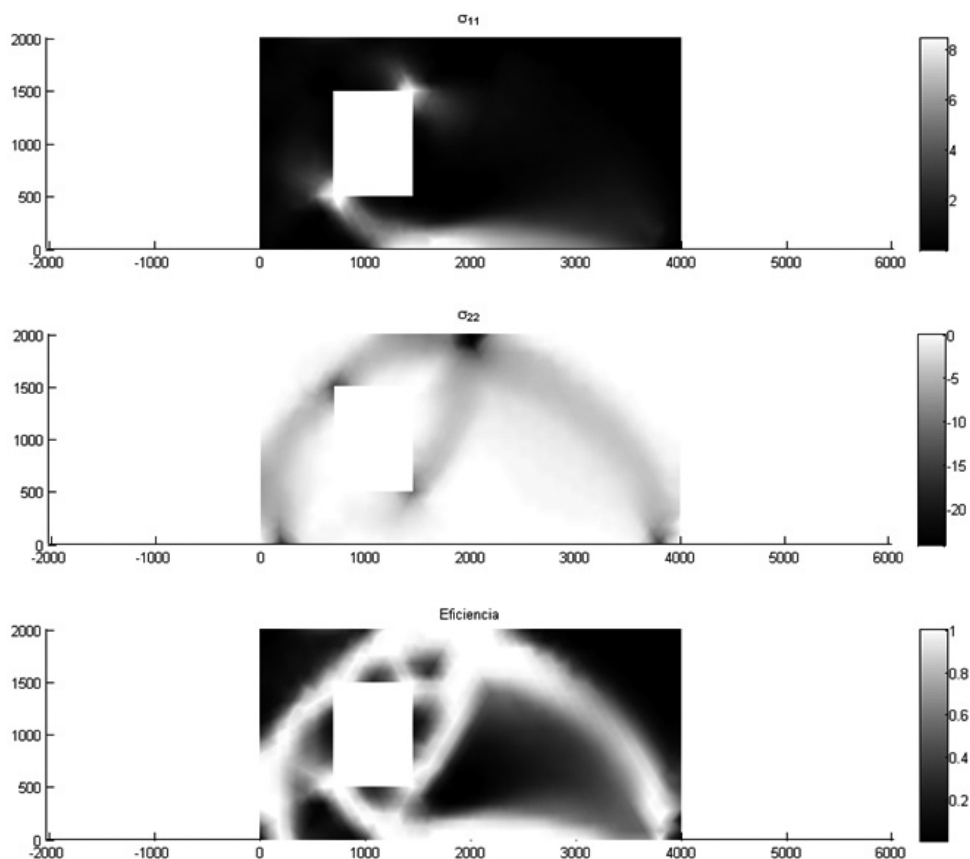


Figura 6. Campos de tensiones principales (MPa) y distribución de factor de eficiencia (adimensional) para el Ejemplo 1 - Criterio 1

los ejemplos 1 y 2 y de 1.032 para el ejemplo 3. Las propiedades elásticas iniciales consideradas en todos los casos son: módulo de elasticidad $E=30$ GPa y coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

4.1. Ejemplo 1: Viga de gran canto con abertura y carga superior

El criterio de armado 1 aplicado en el primer caso de estudio converge tras 15 iteraciones. En la Figura 6 se muestra la distribución de los campos de tensiones de tracción y compresión junto a la distribución del factor de eficacia que determina la forma estructural optimizada. Puede apreciarse que la distribución de eficiencias propuestas tiende a concentrar las tensiones en bandas de tracción y compresión; las resultantes de dichas bandas representan los tirantes y las bielas respectivamente.

En la Figura 7 se indica el flujo de fuerzas internas obtenido de acuerdo a los criterios de armado 1 (isótropo) y 2 (armadura ortogonal). El flujo de fuerzas define con bastante precisión el esquema de bielas y tirantes mediante zonas de compresión y tracción y las respectivas inclinaciones de los campos en dichas zonas. En la misma figura se ha representado una interpretación del esquema BT obtenido directamente a partir del flujo de fuerzas tras la optimización.

En el esquema obtenido según el criterio 1 se destaca la presencia de tirantes inclinados en la cara infe-

rior del elemento que suben hacia los apoyos, con mayor inclinación en la zona del apoyo izquierdo para salvar la abertura de la puerta. En la zona del apoyo derecho el tirante sube con una inclinación más suave para colaborar en el equilibrio vertical del campo de compresiones que allí se desarrolla entre el apoyo y la carga superior. Este esquema puede no ser conveniente desde el punto de vista de la disposición de armadura en obra. El objetivo del criterio 2 es precisamente tener en cuenta estos aspectos para potenciar esquemas de armados ortogonales, lo cual se aprecia en la misma figura. El proceso de iteración de la topología de BT según este criterio ha convergido en 9 iteraciones.

La Figura 7 muestra la capacidad del criterio 2 de generar esquemas con tirantes orientados de forma vertical y horizontal mientras que las bielas se desarrollan en el continuo hormigón adquieren la orientación necesaria para obtener un esquema BT factible. Se resalta que las posiciones y orientaciones de los tirantes son un resultado del modelo propuesto, es decir, no es necesario que el usuario disponga un esquema de armado, lo cual le da al método un valor adicional de cara al estudio de las posiciones óptimas de las armaduras en regiones D singulares.

Las Figuras 8 y 9 muestran, para la aplicación de los criterios 1 y 2 respectivamente, la evolución de la energía elástica total y la densidad de energía durante los procesos de iteración, así como del volumen

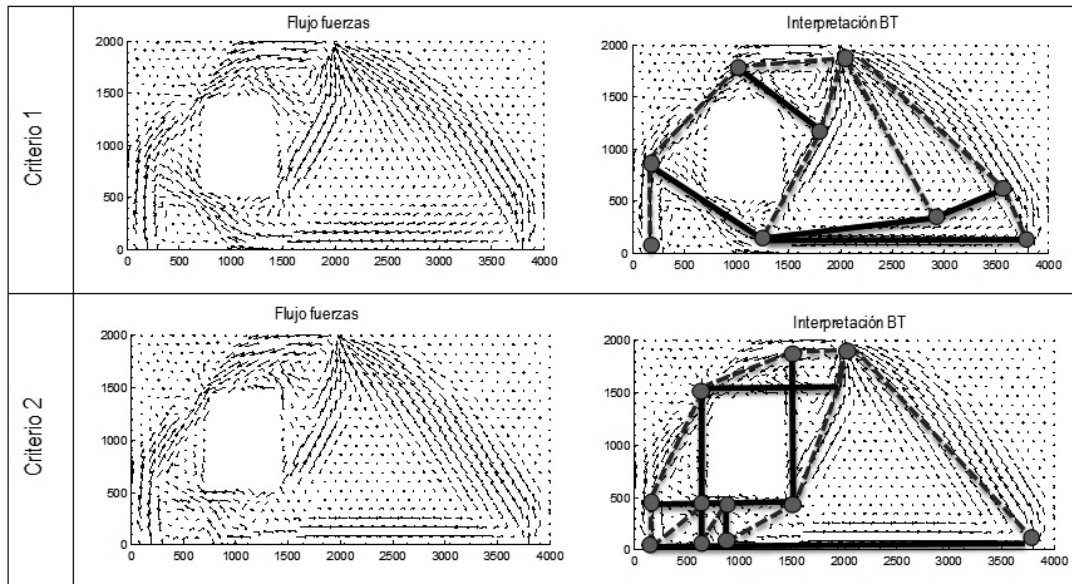


Figura 7. Flujo de fuerzas internas e interpretación como esquema BT para el Ejemplo 1 (adimensional)

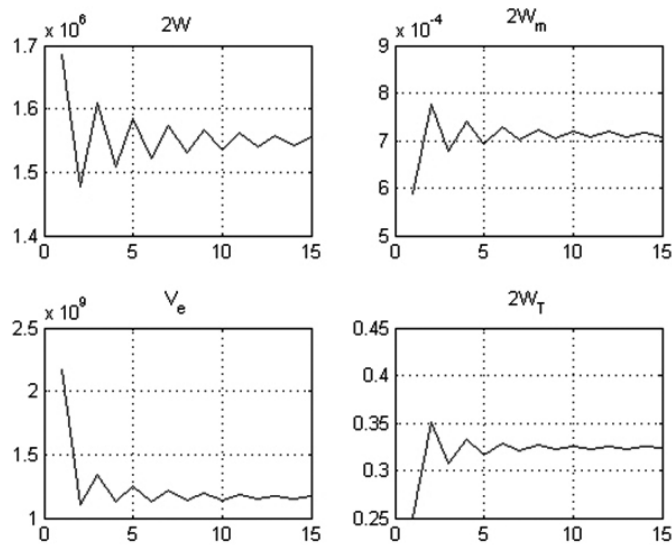


Figura 8. Evolución del problema durante el proceso iterativo para el Ejemplo 1 – Criterio 1: a) doble de la energía total (mJ), b) doble de la densidad de energía (mJ/mm³), c) volumen efectivo (mm³), d) doble de la densidad de energía de tracción (mJ/mm³)

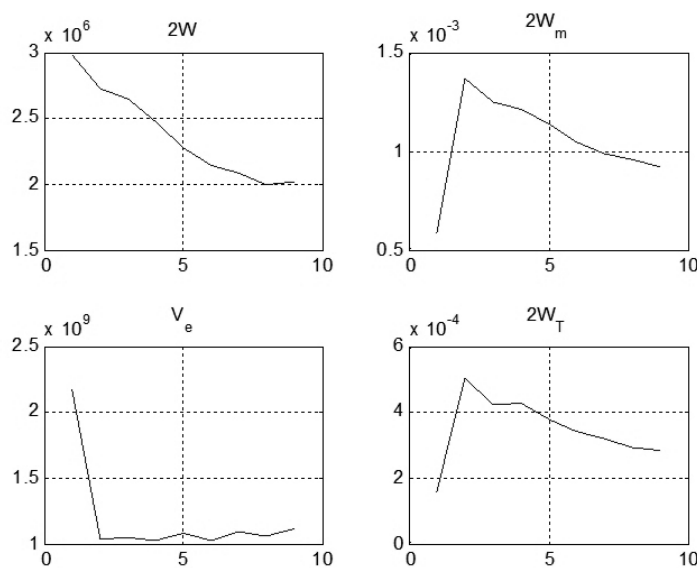


Figura 9. Evolución del problema durante el proceso iterativo para el Ejemplo 1 – Criterio 2: a) doble de la energía total (mJ), b) doble de la densidad de energía (mJ/mm³), c) volumen efectivo (mm³), d) doble de la densidad de energía de tracción (mJ/mm³)

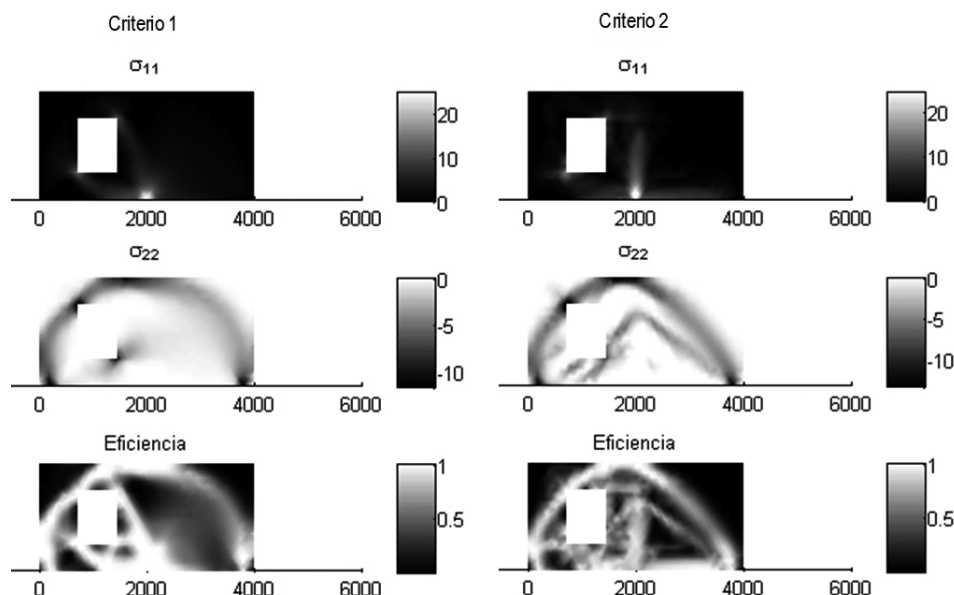


Figura 10. Campos de tensiones principales (MPa) y distribución de factor de eficiencia (adimensional) para el Ejemplo 2

efectivo del material (Ec. 7) y de la energía absorbida por la tracción. Se destaca que en ambos criterios la energía total del sistema tiende a reducirse a medida que avanza la iteración. Al final del proceso se obtiene, por lo tanto, una estructura optimizada en la que se ha minimizado la energía y el volumen del material. No obstante, es evidente que ambos criterios convergen a valores distintos, dadas las condiciones adicionales del criterio 2.

En general, se tendrá que la solución del criterio 2, si bien produce el esquema de armado deseado, absorbe más energía que la solución generada con el criterio 1 al tener que satisfacer las condiciones constructivas adicionales. Por lo tanto, la elección del criterio 2 de generación de esquemas BT implica asumir el compromiso de obtener soluciones que no son energéticamente las más eficientes pero que, además de ser factibles, son constructivamente más adecuadas.

A medida que se minimiza la energía de deformación, se observa que el volumen efectivo de material también se reduce. Si bien los mínimos energéticos y de volumen efectivo no coinciden exactamente en la misma iteración, el volumen efectivo final es en general muy próximo al valor mínimo registrado durante toda la iteración. Como el volumen efectivo es menor, la densidad de energía (energía por unidad de volumen) de toda la estructura crece, indicando un mejor aprovechamiento del material efectivo.

4.2. Ejemplo 2: Viga de gran canto con abertura y carga colgada

Las soluciones de los criterios 1 y 2 para el problema de una viga de gran canto con carga colgada se representan en las Figuras 10 para ambos criterios de

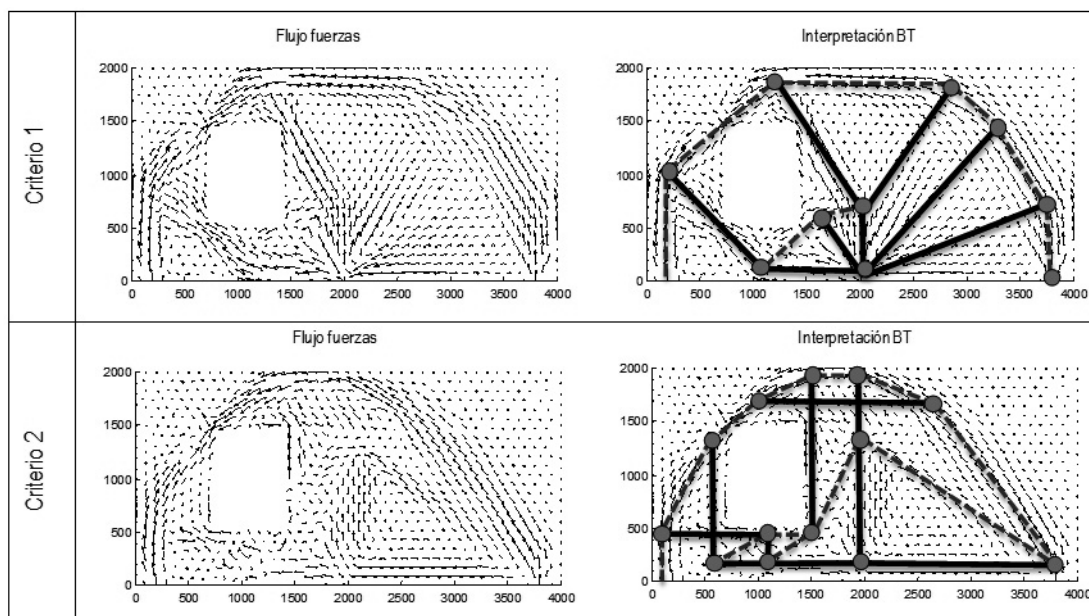


Figura 11. Flujo de fuerzas internas e interpretación como esquema BT para el Ejemplo 2 (adimensional)

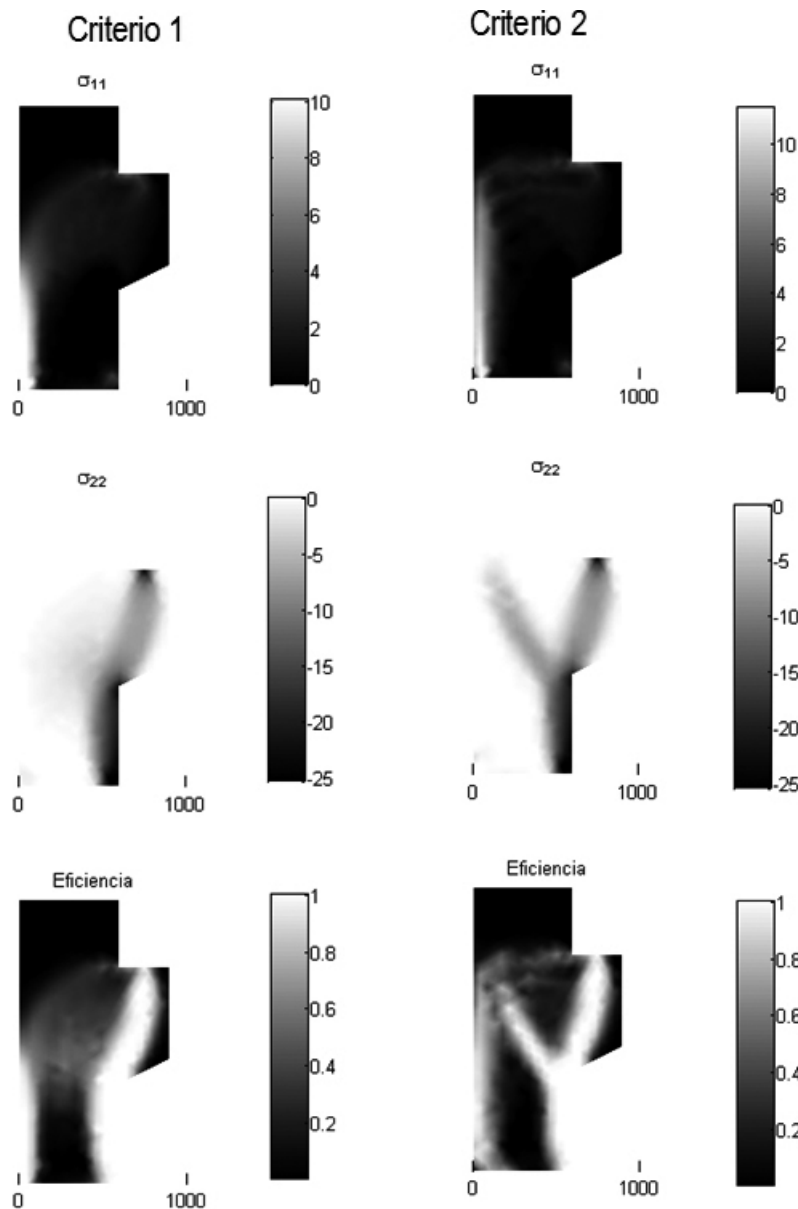


Figura 12. Campos de tensiones principales (MPa) y distribución de factor de eficiencia (adimensional) para el Ejemplo 3

armado. Asimismo, los flujos de fuerzas e interpretación del esquema BT se representan en la Figura 11. En el caso del criterio 1, el esquema BT resultante posee tirantes inclinados en la cara inferior que parten del punto de aplicación de la carga. En el extremo izquierdo, los tirantes se concentran para pasar por las esquinas inferior izquierda y superior derecha de la abertura y terminar anclados en las bielas superiores. En el extremo derecho, se forman dos tirantes que se prolongan hasta la biela de compresión para conseguir que la misma se incline hasta el apoyo.

La aplicación del criterio de armado 2 produce un tirante vertical sobre la carga que se desarrolla hasta el extremo superior de la viga, punto en el que se abren las bielas compresión. En el lado derecho, la biela se desarrolla recta hasta el apoyo, mientras que en el izquierdo, para salvar la abertura, la biela tiene dos cambios de dirección en los puntos en los que se generan tirantes verticales y horizontales bordeando la abertura.

La evolución de las características energéticas y de volumen efectivo sigue tendencias similares a las comentadas anteriormente, por lo que, en general, los esquemas BT propuestos tienden a minimizar la energía de deformación total a la vez que satisfacen los condicionantes de armado.

4.3. Ejemplo 3: Ménsula corta

En la Figura 12 se comparan las distribuciones de tensiones principales y factores de eficacia obtenidos para el problema de la ménsula corta con relación de aspecto (L/h) de 0,43 según los criterios de armado 1 y 2. El flujo de fuerzas internas y la interpretación de las mismas como esquema BT se representa en la Figura 13 para ambos criterios de armado.

La solución del criterio 1 consiste en disponer un tirante inclinado en el interior del pilar para desviar las fuerzas horizontales producidas en la ménsula

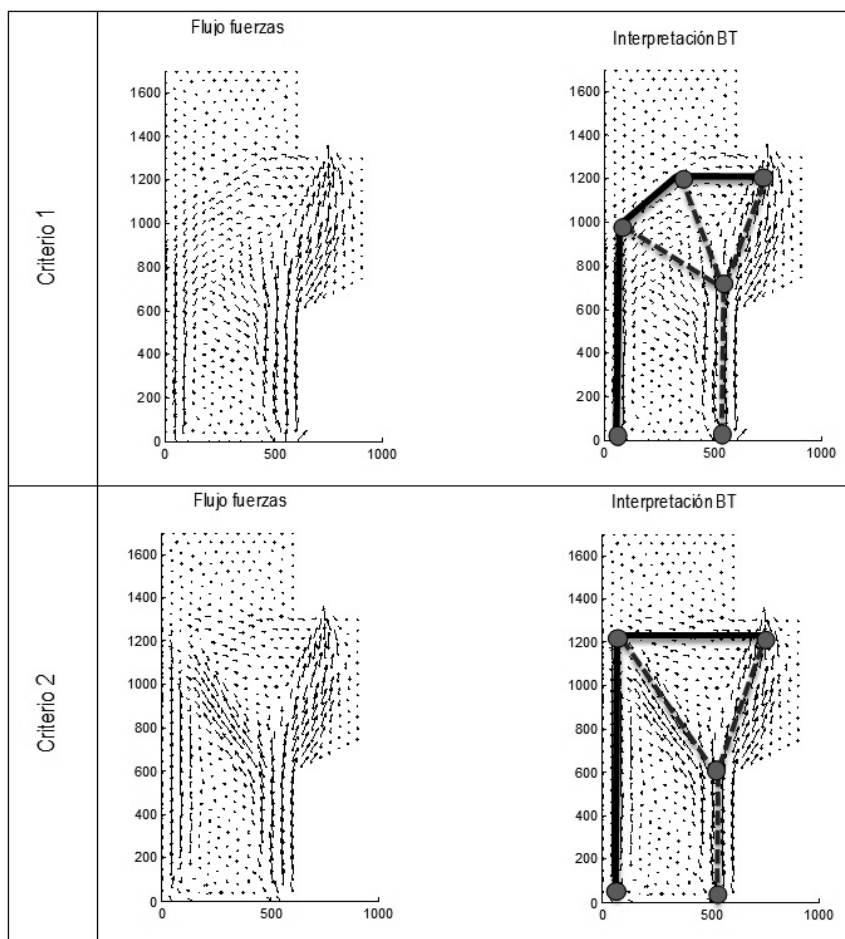


Figura 13. Flujo de fuerzas internas e interpretación como esquema BT para el Ejemplo 3 (adimensional)

hasta las verticales dentro del pilar. Esta armadura inclinada produce dos bielas en el interior del nudo que trabajan a un nivel de tensión relativamente bajo. Por otro lado, el criterio 2 genera dos bielas de compresión claramente delimitadas y rectas; las cuales permiten que se generen solo dos tirantes en el nudo (uno vertical y otro horizontal), ver Figura 13. En este caso, la energía de ambas soluciones convergen a valores más parecidos que en los ejemplos anteriores, siendo la energía de la solución 2 un 18% mayor que la de la solución 1.

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método numérico para la generación de esquemas de bielas y tirantes de regiones D mediante un proceso iterativo de una serie de problemas lineales-elásticos, que pueden resolverse mediante métodos numéricos estándares. En el caso concreto de este trabajo, se desarrolló un programa de elementos finitos planos (tipo membrana) con elementos triangulares de deformación constante.

La estrategia fundamental del método es la modificación de las propiedades elásticas del material de acuerdo a criterios objetivos basados en la distribución de energía de deformación. Los criterios propuestos tienden a mínima energía de deformación.

Al resolver siempre problemas lineales, el método ha demostrado ser estable en cuanto a la convergencia; más aún, el número de iteraciones requerido es en general muy reducido, si se compara con otros métodos de optimización topológica debido, por un lado, a la propia eficacia de los criterios de toma de decisión y, por otro, a que en cada iteración se actúa sobre todo el dominio mediante la distribución del factor de eficiencia.

El método no requiere una disposición inicial de los tirantes o la solución de problemas no-lineales, por lo que resulta de utilidad también para encontrar la mejor ubicación de las armaduras en regiones D singulares en las que no se tenga experiencia previa.

Las modificaciones de las propiedades elásticas se llevan a cabo mediante criterios racionales que utilizan unos indicadores basándose en la distribución de la densidad de energía en el problema resuelto en el paso anterior. Así pues, el parámetro fundamental es el factor de eficiencia. Otros parámetros que se utilizan para guiar la toma de decisiones son la densidad de energía absorbida por las tensiones principales máxima y mínima por separado así como las absorbidas por las tensiones en las direcciones vertical y horizontal. El esquema BT resultante tiende a producir soluciones que reducen tanto la energía de deformación como el volumen del material efectivo

mientras que la densidad de energía de toda la estructura aumenta, lo cual indica que el volumen de material usado tiende a ser aprovechado cada vez más. Se observó que el mínimo de energía y de volumen de material no se dan de forma simultánea, si bien la diferencia entre el volumen para la mínima energía y el volumen mínimo encontrado durante el proceso iterativo es muy pequeña.

La principal ventaja de la estrategia propuesta está en que es posible conseguir esquemas de armado que sean ortogonales para satisfacer así posibles condicionantes constructivos si las propiedades mecánicas del medio se modifican de forma adecuada. Para ello se han desarrollado dos criterios de armado, uno que permite generar tirantes inclinados y otro que obliga a que estos se formen de forma ortogonal. El criterio propuesto para producir armados ortogonales utiliza un material elástico ortótropo en los campos de tracciones o tirantes, de forma que los campos de tracción tienen una dirección preestablecida. Para discriminar entre las zonas que serán tratadas como tirantes frente a las que se considerarán bielas, el algoritmo utiliza el trabajo de tracción del elemento y compara cuando este ha sobrepasado un umbral de la densidad de energía absorbida en el punto. Esta estrategia ha resultado ser satisfactoria como se evidencia en los casos de estudio presentados.

Esta metodología abre la posibilidad de estudio de soluciones de BT más eficientes así como la inclusión de otros tipos de condicionantes, tanto de tipo constructivo como referentes al comportamiento en servicio, funcionales, entre otros.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación mediante del proyecto de investigación BIA- 2009-11764.

REFERENCIAS

[1] SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. "Towards a consistent design of structural concrete". *PCI Journal*. 1987, vol. 32, n° 3, p. 74-150.

[2] ROMO, J. "Cálculo de secciones y elementos estructurales. El método de bielas y tirantes". *La EHE explicada por sus autores*. 338 p. Madrid: Leynfor, 2000. ISBN: 8495560003.

[3] MIGUEL, P.; FERNÁNDEZ, M.; BONET, J.; MARTÍ, K.; NAVARRO, J.; CASTRO, M.C. *Proyecto de estructuras de hormigón mediante el método de bielas y tirantes*. Valencia: Ediciones VJ, 2009.

[4] ACHE. Comisión 1, GT1/3. *Método de las bielas y tirantes*. Madrid: ACHE, 2003. 164 p. (Monografía M-6). ISBN: 84-89670-38-2.

[5] REINECK, K-H. (Ed.) *Examples for the design of structural concrete with strut-and-tie models*. ACI SP-208. Michigan: American Concrete Institute, 2002. 242 p. ISBN: 9780870310867.

[6] REINECK, K-H.; NOVAK, L. (Eds.) *Further examples for the design of structural concrete with strut-and-tie models*. ACI SP-273. Michigan: American Concrete Institute, 2010.

[7] COMISIÓN PERMANENTE DEL HORMIGÓN. *Instrucción de Hormigón Estructural – EHE-08*. Madrid: Ministerio de Fomento, 2008.

[8] MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M. "Dimensionamiento y verificación del hormigón estructural mediante el método de los campos de tensiones". *Hormigón y Acero*. 2007, n° 243, p. 93-102.

[9] MIGUEL SOSA, P.F.; FERNÁNDEZ PRADA, M.A.; BONET SENACH, J.L.; PASTOR VILLANUEVA, J.M. "Modelo automático para determinar el esquema de bielas y tirantes de una región D de forma cualquiera". *II Congreso ACHE de Puentes y Estructuras*. Madrid: Asociación Científico-Técnica de Hormigón Estructural, 2002. p. 857-865. ISBN 84-89670-37-4.

[10] FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A. "On development of suitable stress fields for structural concrete". *ACI Structural Journal*, 2007, vol. 104, n° 4, p. 495-502.

[11] LIANG, Q.Q. "Performance-based optimization of structures". New York: Taylor & Francis Group, 2005. (Spon Research) ISBN: 0-415-33594-9.

[12] KWAK, H.G.; NOH, S.H. "Determination of strut-and-tie models using evolutionary structural optimization". *Engineering Structures*. 2006, vol. 28, n° 10, p. 1440-1449.

[13] BRUGGI, M. "Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization". *Computers and Structures*. 2009, vol. 87, n° 23-24, p. 1483-1495.

[14] BIONDINI, F.; BONTEMPI, F.; MALERBA, P.G. "Stress path adapting strut-and-tie models in cracked and uncracked RC elements". *Structural Engineering and Mechanics*. 2001, vol. 12, n° 6, p. 685-698.

[15] MAXWELL, B.; BREEN, J. "Experimental evaluation of strut-and-tie model applied to deep beam with opening". *ACI Structural Journal*. 2000, vol. 97, n° 1, p. 142-148.

[16] BAIRÁN, J.M. "Nonlinear modelling of reinforced concrete structures". *Earthquake Engineering by the Beach Workshop*, July 2-4 2009, Capri, Italy. [Disponible en: www.reluis.it].