

---

# Propiedades estructurales en 2-digrafos de Cayley óptimos sobre grupos abelianos finitos <sup>\*</sup>

F. Aguiló<sup>1</sup>, A. Miralles<sup>2</sup> y M. Zaragoza<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ETSETB, UPC [matfag@ma4.upc.edu](mailto:matfag@ma4.upc.edu)

<sup>2</sup> EETAC, UPC [almirall@ma4.upc.edu](mailto:almirall@ma4.upc.edu)

<sup>3</sup> EPSEVG, UPC [marisa@ma4.upc.edu](mailto:marisa@ma4.upc.edu)

**Resumen.** En este trabajo se presentan algunas propiedades estructurales de los digrafos de Cayley de grado dos con diámetro óptimo, sobre grupos finitos abelianos. En particular, cuando el grupo no es cíclico, todos los digrafos cociente tienen diámetro óptimo. También se dan condiciones para obtener expansiones de estos digrafos con diámetro óptimo. La herramienta principal para obtener estos resultados es una forma geométrica plana, asociada al digrafo, conocida como diagrama de distancias mínimas.

**Palabras clave:** Digrafo de Cayley, digrafo cociente, diámetro óptimo, L-forma.

## 1 Introducción

Sea  $G_N$  un grupo abeliano finito de  $N$  elementos y generado por el conjunto  $S = \{a, b\} \subset G_N \setminus \{0\}$ . El 2-digrafo de Cayley  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$  es el grafo dirigido con conjunto de *vértices*  $G_N$  y conjunto de *arcos*  $\{g \rightarrow g + a, g \rightarrow g + b : g \in G_N\}$ . Por comodidad, vamos a llamar a estos digrafos 2-Cayley. Los conceptos de *camino* (dirigido), *distancia*, *camino mínimo* y *diámetro*  $D(G_N, \{a, b\})$  son los habituales.

**Definición 1.** Para  $N \geq 3$  fijado, se definen las funciones

$$D_1(N) = \min\{D(G_N, \{a, b\}) : G_N \text{ cíclico}, \langle a, b \rangle = G_N\},$$

$$D_2(N) = \min\{D(G_N; \{a, b\}) : G_N \text{ no cíclico}, \langle a, b \rangle = G_N\}.$$

*Ejemplo 1.*  $D_1(8) = D(\mathbb{Z}_8, \{1, 3\}) = 3$ ,  $D_2(8) = D(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \{(0, 1), (1, 1)\}) = 4$ ,  $D_1(12) = D(\mathbb{Z}_{12}, \{1, 4\}) = 5$  y  $D_2(12) = D(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \{(0, 1), (1, 2)\}) = 4$ .

Para estudiar propiedades métricas de los 2-Cayley, se les asocia un tipo de formas geométricas planas llamadas *diagramas de distancias mínimas* (DDM). Santos y Sabariego [6] dieron su definición algebraica en el caso general (damos aquí la particularización al grado dos).

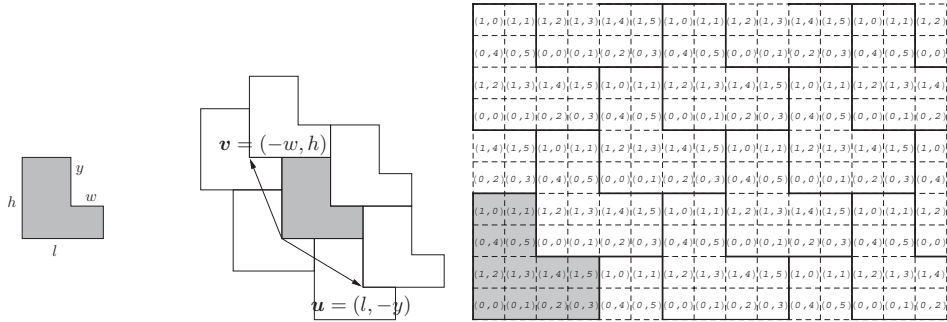
---

<sup>\*</sup> Trabajo financiado por MTM2011-28800-C02-01 y 2009SGR1387.

**Definición 2 ([6]).** Un DDM asociado a  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$  es una aplicación  $\psi : G_N \rightarrow \mathbb{N}^2$  cumpliendo

- (a) para cada  $\eta \in G_N$ ,  $\psi(\eta) = (i, j)$  satisface  $ia + jb = \eta$  y  $\|\psi(\eta)\|$  es mínimo sobre todos los vectores en  $\mathbb{N}^2$  con esa propiedad ( $\|(i, j)\| = i + j$ ),
- (b) para cada  $\eta \in G_N$ , y para cada  $(s, t) \in \mathbb{N}^2$  que es menor que  $\psi(\eta)$  coordenada a coordenada, se tiene que  $(s, t) = \psi(\gamma)$  para algún  $\gamma \in G_N$  (con  $sa + tb = \gamma$ ).

Los DDMs se suelen representar en el plano por las imágenes de  $\psi$ , donde cada vector  $\psi(\eta) = (i, j)$  se asocia al cuadrado  $\llbracket i, j \rrbracket = [i, i + 1] \times [j, j + 1] \in \mathbb{R}^2$ . Cada cuadrado  $\llbracket i, j \rrbracket$  tiene asociada la etiqueta  $ia + jb = \eta \in G_N$ . Se sabe que estos DDMs son L-formas que embaldosan el plano y se denotan mediante las longitudes de sus lados  $\mathcal{L} = L(l, h, w, y)$ , con  $0 \leq w < l$ ,  $0 \leq y < h$  y  $lh - wy = N$ , como en la Figura 1.



**Figura 1.** L-forma genérica y  $L(4, 4, 2, 2)$  asociada a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \{(0, 1), (1, 2)\})$

Se conoce una cota inferior ajustada,  $\text{lb}(N)$ , de las funciones  $D_1(N)$  y  $D_2(N)$ . Wong y Coppersmith [7] la dieron a conocer en 1974:

$$D_i(N) \geq \text{lb}(N) = \lceil \sqrt{3N} \rceil - 2, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Algunos autores han utilizado los DDMs para estudiar problemas discretos métricos, ver por ejemplo [3] y [5].

**Definición 3.** Se dice que  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$  es  $k$ -tight si  $D(G_N, \{a, b\}) = \text{lb}(N) + k$  y se definen las funciones  $\kappa_i(N) = D_i(N) - \text{lb}(N)$ , para  $i = 1, 2$ .

Los digrafos 0-tight suelen llamarse tight (y son óptimos por definición). El siguiente resultado caracteriza las L-formas asociadas a un 2-Cayley que también son DDMs.

**Teorema 1 ([2]).**  $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$  es un DDM asociado a  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$  si, y solo si,  $\mathcal{H}$  cumple las condiciones de compatibilidad

$$lh - wy = N, \quad la = yb \text{ en } G_N \quad y \quad hb = wa \text{ en } G_N \quad (1)$$

y las condiciones de minimalidad

$$(l - y)(h - w) \geq 0 \quad (2)$$

donde los dos factores no se anulan a la vez.

Dado un 2-Cayley,  $C = \text{Cay}(G_N, \{a, b\})$ , las L-formas que cumplan las condiciones de compatibilidad (1) se dice que están *asociadas* a  $C$ . Sin embargo, estas L-formas pueden no ser DDMs. Si, además, cumplen la condición de minimalidad (2), sí lo son.

Dado un 2-Cayley, podemos obtener sus DDMs asociados mediante una exploración adecuada de cuadrados en  $\mathbb{N}^2$ , descartando regiones del plano mediante los filtros (1) y (2). El paso inverso, es decir obtener un 2-Cayley a partir de un DDM asociado  $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$ , también es posible usando la *Forma Normal de Smith* (FNS) de la matriz  $M = M(l, h, w, y) = \begin{pmatrix} l & -w \\ -y & h \end{pmatrix}$ .

La FNS de la matriz  $M$  es una matriz diagonal,  $S = \text{diag}(s_1, s_2)$ , con  $s_1 = \text{mcd}(l, h, w, y)$ ,  $s_1 \mid s_2$  y  $s_1 s_2 = N$ , que verifica  $S = UMV$  con  $U, V \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  unimodulares. Concretamente, si  $\mathcal{H}$  es un DDM, entonces está asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{s_1} \times \mathbb{Z}_{s_2}, \{(U_{11}, U_{21}), (U_{12}, U_{22})\})$ . Los detalles pueden verse en [4].

*Observación 1.* Dada una baldosa  $L(l, h, w, y)$  asociada a  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$ , el grupo  $G_N$  es cíclico si, y solo si,  $\text{mcd}(l, h, w, y) = 1$ .

*Observación 2.* Por razones evidentes (ver Figura 1), se define el diámetro de la L-forma  $\mathcal{L} = L(l, h, w, y)$  como

$$d_{\mathcal{L}} = l + h - \min\{w, y\} - 2.$$

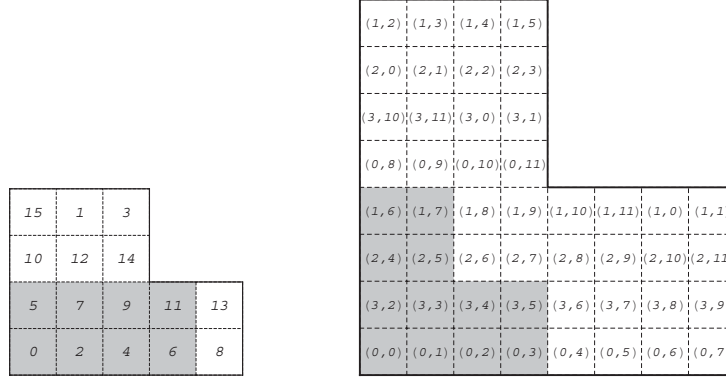
Así, si  $\mathcal{L}$  es un DDM asociado a  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$ , se cumple  $d_{\mathcal{L}} = D(G_N, \{a, b\})$ . Por analogía, diremos que  $\mathcal{L}$  es  $k$ -tight si  $d_{\mathcal{L}} = \text{lb}(lh - wy) + k$ .

*Observación 3.* Fijado  $N$ , para hallar un grupo abeliano  $G_N$  y los generadores  $\{a, b\}$  que dan el diámetro óptimo, buscamos un DDM  $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$  de área  $N$  que cumpla el Teorema 1 y tenga diámetro óptimo. La FNS de la matriz  $M(l, h, w, y)$  nos recupera el digrafo deseado. En [1] se da un algoritmo eficiente para hallar DDMs óptimos de área fijada  $N$ .

## 1.1 Motivación del trabajo

La motivación de este trabajo aparece a partir de algunas observaciones numéricas. A continuación comentamos algunas de estas evidencias.

*Ejemplo 2.* Consideremos  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{16}, \{2, 5\})$ . Su DDM asociado es  $\mathcal{H}_{16} = L(5, 4, 2, 2)$  y puede verse en la Figura 2. Este digrafo es óptimo, de diámetro  $D(\mathbb{Z}_{16}, \{2, 5\}) = d_{\mathcal{H}_{16}} = 5$ . Notemos que  $\mathcal{H}_{16}$  contiene al DDM  $\mathcal{H}_8 = L(4, 2, 1, 0)$  asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{2, 5\})$  (re Etiquetando los cuadrados módulo 8). Este último digrafo tiene diámetro  $D(\mathbb{Z}_8, \{2, 5\}) = d_{\mathcal{H}_8} = 4$  pero no es óptimo ya que  $D(\mathbb{Z}_8, \{1, 3\}) = 3$ .



**Figura 2.**  $\mathcal{H}_{16} \leftrightarrow \text{Cay}(\mathbb{Z}_{16}, \{2, 5\})$  y  $\mathcal{H}_{48} \leftrightarrow \text{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 1), (3, 2)\})$

*Ejemplo 3.* Consideremos ahora  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 1), (3, 2)\})$  que tiene asociado el DDM  $\mathcal{H}_{48} = L(8, 8, 4, 4)$  de diámetro óptimo  $d_{\mathcal{H}_{48}} = 10$ . Como podemos ver en la Figura 2, el DDM  $\mathcal{H}_{48}$  contiene al DDM  $\mathcal{H}_{12} = L(4, 4, 2, 2)$  asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \{(0, 1), (3, 2)\})$  y con diámetro óptimo  $d_{\mathcal{H}_{12}} = 4$ .

Los dos ejemplos anteriores son significativos. En el Ejemplo 2, al tomar el 2-Cayley óptimo  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{16}, \{2, 5\})$  y hacer cociente por  $\mathbb{Z}_2$ , resulta el digrafo  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{2, 5\})$  que no es óptimo. Por otro lado, en el Ejemplo 3, al hacer cociente por  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , sí resulta un 2-Cayley óptimo. En la Sección 2 veremos que esta propiedad siempre se cumple con grupos no cíclicos.

Podemos preguntarnos por un proceso inverso al de hacer cociente? Desde el punto de vista de los DDMs sí, además es un proceso natural usando estos diagramas.

*Observación 4.* A partir de un DDM óptimo,  $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$  de área  $N = lh - wy$ , podemos considerar la L-forma  $m\mathcal{H} = L(ml, mh, mw, my)$  de área  $m^2N$ . Notemos que  $m\mathcal{H}$  está asociado a un cierto 2-Cayley respecto de un grupo no cíclico. Además, si  $\mathcal{H}$  es DDM, también lo es  $m\mathcal{H}$ .

*Ejemplo 4.* Para  $N = 12$ , el DDM  $\mathcal{H}_{12} = L(4, 3, 0, 2)$  tiene diámetro óptimo  $d_{\mathcal{H}_{12}} = 5$ . A partir de la FNS de  $M(4, 3, 0, 2)$ ,

$$\text{diag}(1, 12) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} M(4, 3, 0, 2) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

obtenemos el 2-Cayley óptimo  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 1), (-1, -4)\}) \cong \text{Cay}(\mathbb{Z}_{12}, \{1, -4\})$ , del mismo diámetro 5. El DDM  $2\mathcal{H}_{12} = L(8, 6, 0, 4)$  está asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{24}, \{(0, 1), (-1, -4)\})$ . Este digrafo tiene diámetro  $d_{2\mathcal{H}_{12}} = 12$  y no es óptimo ya que  $D(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 1), (3, 2)\}) = D_2(48) = 10$ . Tomemos ahora el digrafo óptimo  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{11}, \{1, 4\}) \cong \text{Cay}(\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_{11}, \{(0, 1), (-1, 4)\})$ , con diámetro 4 y DDM asociado  $\mathcal{H}_{11} = L(4, 3, 1, 1)$ . Mediante ordenador, podemos comprobar que los DDMs  $m\mathcal{H}_{11}$ , asociados a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{11m}, \{(0, 1), (-1, 4)\})$ , tienen diámetro óptimo  $D_2(11m^2) = 6m - 2$ , para  $2 \leq m \leq 7$ .

En el Ejemplo 4, los digrafos óptimos iniciales (antes de su expansión) tienen grupo cíclico como conjunto de vértices. Las pruebas numéricas revelan que si partimos de 2-Cayley óptimos con grupos no cíclicos asociados, obtenemos comportamientos similares en los digrafos expandidos. Unas veces obtenemos expansiones óptimas y otras no. En la Sección 3 se trata el proceso de expansión y se dan condiciones suficientes para obtener expansiones óptimas tight.

## 2 Optimalidad en cocientes de 2-Cayley no cíclicos

El Teorema 1 caracteriza las L-formas asociadas a un 2-Cayley dado. Son todas las que cumplen (1). Si además cumplen (2), también son DDMs. Vamos a dar algunos resultados técnicos que nos ayudarán a manejar los DDMs con más comodidad.

**Proposición 1.** *Supongamos que  $\mathcal{L}$  es una L-forma asociada a  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$ . Entonces,  $\mathcal{L}$  es un DDM si, y solo si,  $d_{\mathcal{L}} = D(G_N, \{a, b\})$ .*

**Corolario 1.** *Supongamos que  $\mathcal{L}$  es una L-forma de área  $N$  y  $\text{mcd}(\mathcal{L}) = g \geq 1$ . Si  $d_{\mathcal{L}} = D_1(N)$  cuando  $g = 1$  o  $d_{\mathcal{L}} = D_2(N)$  cuando  $g > 1$ , entonces  $\mathcal{L}$  es un DDM.*

A partir de ahora, para una L-forma  $\mathcal{L} = L(l, h, w, y)$  y  $m \in \mathbb{N}$  dados, usaremos la notación  $\text{mcd}(\mathcal{L}) = \text{mcd}(l, h, w, y)$ ,  $m\mathcal{L} = L(ml, mh, mw, my)$  y  $\mathcal{L}/m = L(l/m, h/m, w/m, y/m)$ . También usaremos la notación  $U_{ij}$  para la componente  $(i, j)$  de la matriz unimodular izquierda  $U$  de la FNS de la matriz  $M(l, h, w, y)$ .

**Proposición 2.** *Sea  $\mathcal{L}$  una L-forma de área  $N$  con  $\text{mcd}(\mathcal{L}) = g \geq 1$ . Sea  $f \in \mathbb{N}$  un divisor de  $g$ . Entonces,  $\mathcal{L}$  es un DDM asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_g \times \mathbb{Z}_{N/g}, \{(U_{11}, U_{21}), (U_{12}, U_{22})\})$  si, y solo si,  $\mathcal{L}/f$  es un DDM asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{g/f} \times \mathbb{Z}_{N/(fg)}, \{(U_{11}, U_{21}), (U_{12}, U_{22})\})$ .*

Si en la proposición anterior también imponemos optimalidad y  $g > 1$ , resulta el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Sea  $\mathcal{H}$  una  $L$ -forma de área  $N$  y  $\text{mcd}(\mathcal{H}) = g > 1$ . Si  $d_{\mathcal{H}} = D_2(N)$ , entonces  $d_{\mathcal{H}/g} = D_1(N/g^2)$  y  $d_{\mathcal{H}/f} = D_2(N/f^2)$  para cualquier  $f < g$  divisor de  $g$ .*

Este teorema asegura que cualquier 2-Cayley que sea cociente de otro óptimo, con grupo asociado no cíclico, también es óptimo. En este sentido, el Ejemplo 3, es sensible al caso genérico.

### 3 Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

Dado un 2-Cayley  $\text{Cay}(G_N, \{a, b\})$  óptimo con DDM asociado  $\mathcal{H}$ , estamos interesados en la posible optimalidad de  $\text{Cay}(G_{m^2N}, \{a, b\})$  con DDM asociado  $m\mathcal{H}$ , para un cierto  $m \geq 2$ . Es importante notar la identidad entre diámetros

$$d_{m\mathcal{H}} = m(d_{\mathcal{H}} + 2) - 2.$$

El Ejemplo 4 de la introducción, deja claro que la optimalidad no queda asegurada cuando  $G_N$  es cíclico. Tampoco en el caso de  $G_N$  no cíclico, como muestra el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 5.* El digrafo  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \{(0, 1), (1, 1)\})$  es óptimo. Tiene el DDM asociado  $\mathcal{H}_8 = L(2, 4, 0, 2)$  y diámetro 4. La expansión asociada, con  $m = 2$ ,  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8, \{(0, 1), (1, 1)\})$  tiene DDM asociado  $2\mathcal{H}_8 = L(4, 8, 0, 4)$  y diámetro 10. Esta expansión no es óptima puesto que  $D_2(32) = 8 = D(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}, \{(0, 1), (1, 3)\})$ .

Vamos a centrarnos en el comportamiento de los 2-Cayley óptimos tight, es decir, expansiones óptimas tight de digrafos óptimos tight.

**Proposición 3.** *Sea  $\mathcal{H}$  un DDM tight y  $m \geq 2$ . Entonces,*

$$m\mathcal{H} \text{ es tight si, y solo si, se verifica } m\lceil\sqrt{3N}\rceil = \lceil m\sqrt{3N}\rceil. \quad (3)$$

**Lema 1.** *La identidad (3) es cierta para todo  $m \geq 2$  si, y solo si,  $N = 3t^2$  para cualquier  $t \in \mathbb{N}$ .*

Este lema tiene una continuación natural precedida por la pregunta: ¿Es cierto que todos los valores de  $N = 3t^2$  tienen asociado un 2-Cayley óptimo tight que es expansión de un digrafo óptimo tight con 3 vértices? El siguiente teorema confirma esta sospecha.

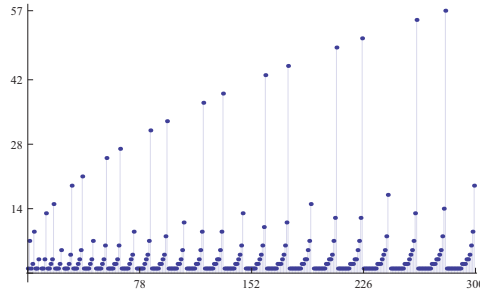
**Teorema 3.** *Consideremos el digrafo tight  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_3, \{2, 1\})$  con DDM asociado  $\mathcal{H}_3 = L(2, 2, 1, 1)$ . Entonces, para todo  $t \geq 2$  tenemos*

- (a)  $t\mathcal{H}_3 = L(2t, 2t, t, t)$  es un DDM de área  $N_t = 3t^2$ ,
- (b)  $t\mathcal{H}_3$  está asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_{3t}, \{(1, -1), (0, 1)\})$ ,
- (c)  $d_{t\mathcal{H}_3} = 3t - 2 = D_2(N_t) = \text{lb}(N_t)$ .

El Lema 1 asegura que, para  $N \neq 3t^2$ , el número de expansiones tight de un 2-Cayley de orden  $N$  es finito. De hecho, el siguiente teorema nos dice qué valores de  $m$  podemos tomar para obtener una expansión tight.

**Teorema 4.** *Sea  $\mathcal{H}$  un DDM tight de área  $N \neq 3t^2$ . Entonces,  $m\mathcal{H}$  es un DDM tight si*

$$2 \leq m \leq c(N) = \left\lfloor \frac{1}{\lceil \sqrt{3N} \rceil - \sqrt{3N}} \right\rfloor.$$



**Figura 3.** Valores de  $c(N)$ , para  $4 \leq N \leq 300$  y  $N \neq 3t^2$

Claramente podemos elegir valores naturales de  $N \neq 3t^2$  que hagan la diferencia  $\lceil \sqrt{3N} \rceil - \sqrt{3N}$  pequeña. La Figura 3 pone de manifiesto este hecho.

Así pues, gracias al Teorema 4, sabemos que existen 2-Cayley tight, de orden  $N \neq 3t^2$ , que generan un número de expansiones consecutivas tan grande como queramos. Además, observando los valores máximos que aparecen en la Figura 3, parece que este número máximo de expansiones puede llegar a ser del orden  $O(\sqrt{N})$ .

A continuación damos una familia infinita de valores de  $N$  que confirma la sospecha anterior. Los correspondientes 2-Cayley iniciales, que generan las expansiones, tienen todos un grupo asociado cíclico.

**Teorema 5.** *Sea  $N_t = 3t^2 + 2t$  para  $t \geq 1$ . Entonces,*

- (a)  $\mathcal{H}_t = L(2t, 2t + 1, t, t)$  es un DDM de área  $N_t$ ,
- (b)  $\mathcal{H}_t$  está asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{N_t}, \{2t + 1, t\})$ ,
- (c)  $d_{\mathcal{H}_t} = D_1(N_t) = \text{lb}(N_t) = 3t - 1$ ,
- (d)  $m\mathcal{H}_t$  es un DDM tight para  $2 \leq m \leq c(N_t) = 6t + 1$ ,
- (e)  $m\mathcal{H}_t$  está asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{mN_t}, \{(2, 2t + 1), (1, t)\})$ ,
- (f)  $d_{m\mathcal{H}_t} = 3mt + m - 2 = D_2(m^2N_t) = \text{lb}(m^2N_t)$  para  $2 \leq m \leq 6t + 1$ .

También damos una familia con propiedades similares, pero con grupo inicial asociado no cíclico.

**Teorema 6.** *Sea  $N_s = 27s^2 + 18s$  para  $s \geq 1$ . Entonces,*

- (a)  $\mathcal{H}_s = L(6s + 3, 6s, 3s, 3s)$  es un DDM de área  $N_s$ ,
- (b)  $\mathcal{H}_s$  está asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{9s^2+6s}, \{(1, -3s), (0, 1)\})$ ,
- (c)  $d_{\mathcal{H}_s} = D_2(N_s) = \text{lb}(N_s) = 9s + 1$ ,
- (d)  $m\mathcal{H}_s$  es un DDM tight para  $2 \leq m \leq c(N_s) = 2s$ ,
- (e)  $m\mathcal{H}_s$  está asociado a  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{mN_s}, \{(1, -3s), (0, 1)\})$ ,
- (f)  $d_{m\mathcal{H}_s} = 9ms + 3m - 2 = D_2(m^2N_s) = \text{lb}(m^2N_s)$  para  $2 \leq m \leq 2s$ .

## Referencias

- [1] F. Aguiló and M.A. Fiol. An efficient algorithm to find optimal double loop networks. *Discrete Math.*, 138:15–29, 1995.
- [2] F. Aguiló, A. Miralles and M. Zaragoza. Using Double-Loop digraphs for solving Frobenius' Problems. *ENDM*, 24:17–24, 2006.
- [3] J.-C. Bermond, F. Comellas and D.F. Hsu. Distributed loop computer networks: A survey. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 24:2–10, 1995.
- [4] P. Esqué, F. Aguiló and M.A. Fiol. Double commutative-step digraphs with minimum diameters. *Discrete Math.*, 114:147–157, 1993.
- [5] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra, I. Alegre and M. Valero. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. *IEEE Trans. Comput.*, C-36:702–713, 1987.
- [6] P. Sabariego and F. Santos. Triple-loop networks with arbitrarily many minimum distance diagrams. *Discrete Math.*, 309(6):1672–1684, 2009.
- [7] C.K. Wong and D. Coppersmith. A combinatorial problem related to multimode memory organizations. *J. ACM*, 21:392–402, 1974.