

Matemàtiques

1 Batxillerat

U11_mates_funcions exponencial i logarítmica. U9_funcions
U5_mates_CS_funcions exponencial i logarítmica. U3_funcions

Activitats competencials

Les mutacions d'un bacteri

En una comarca de la perifèria de la capital, s'ha detectat una mutació d'un bacteri que resulta ser molt nociva. Els infectats pateixen marejos, vòmits i diarrees de forma continuada. A més a més, el bacteri es propaga ràpidament entre la població: poques setmanes després dels primers casos detectats ja hi ha nombroses persones infectades. Els diaris es fan ressò de la notícia i generen certa alarma social entre la població, a vegades a causa d'informacions no del tot certes.

El que sí se sap del cert ara per ara és que es va tenir coneixement de l'existència del bacteri amb l'aparició quasi simultània de 3 persones infectades. Amb el temps i l'aparició de nous casos, s'ha pogut determinar que cadascuna de les persones infectades contagia a una nova persona sana cada setmana.

Aquesta informació és la que, de forma confidencial, la consellera de sanitat trasllada a un gabinet de crisi que ha convocat per tractar el problema. El gabinet està format per metges experts en epidemiologia, catedràtics de comunicació i altres assessors del govern, entre els quals hi ha una matemàtica. La primera decisió que prenen és dotar econòmicament els diferents equips d'investigació de tot el territori perquè, d'ara en endavant, centrin les seves investigacions en trobar un antibacterià. També decideixen redactar un comunicat de premsa per calmar la població.

Per altra banda, un dels experts en epidemiologia demana a la consellera que es faci una previsió de l'evolució del nombre de malalts perquè els equips d'investigació, un cop trobin l'antídot, sàpiguen la quantitat de medicament que han de desenvolupar. L'experta matemàtica s'encarrega d'aquesta tasca, juntament amb un equip de matemàtics a càrrec seu.

- a) Si forméssiu part d'aquest equip de matemàtics, com calcularíeu la previsió del nombre de persones malaltes al cap de 1, 2, ..., x setmanes?
- b) La primera setmana un equip d'investigació obté resultats força esperançadors amb uns tipus de compostos químics, els lisozímics. Les

Matemàtiques 1 Batxillerat – Activitats competencials

reserves de l'Estat d'aquesta substància curarien exactament un màxim de 6 144 persones. Per preveure quan haurien de demanar aquests tipus de compostos a altres països, es pregunta també a la matemàtica quantes setmanes han de passar perquè hi hagi exactament 6 144 persones amb la malaltia. Com ho calcularíeu?

Al cap de poques setmanes, l'equip mèdic sintetitza un medicament aparentment eficaç que tenen els compostos lisozímics com a base. De mica en mica tots els infectats van curant-se amb l'única excepció de 7 casos que no milloren: estan infectats per una nova mutació del bacteri.

Els casos afectats per aquesta segona mutació, a més, segueixen una evolució diferent. Al cap de 8 setmanes d'haver detectat aquesta nova mutació, la hipòtesi amb la qual treballa l'equip mèdic és que una persona afectada contagia a unes altres 3 persones sanes cada 2 setmanes, però després no torna a contagiar a ningú més.

- c) Li pregunten a l'experta matemàtica que, suposant que fos certa la hipòtesi de l'equip mèdic, quants casos de nous afectats hi hauria a la vuitena setmana. Ajuda-la a trobar la resposta.
- d) A la vuitena setmana, hi ha un total de 854 casos afectats, nous i antics. Amb aquesta dada confirmaríeu o descartaríeu la hipòtesi?
- e) Podríeu trobar una fórmula amb la qual, en funció del número de setmana (s), es pogués conèixer el número de persones contagiades?

Orientacions per al professor

Aquesta activitat està relacionada el llibre de Matemàtiques de Batxillerat, concretament amb la unitat 9 *Funcions* i la unitat 11 *Funcions exponencial i logarítmica*.

Les **competències genèriques** de Batxillerat que es treballen amb aquesta activitat són:

- **Competència en el coneixement i interacció amb el món:** la situació de contagi que planteja l'activitat és un tema actual per als alumnes ja que no fa gaire es fa donar una situació similar amb la grip A. Es pot aprofitar l'activitat per mostrar que les matemàtiques també són competents en altres àrees de la ciència, com ara la Medicina. Fins i tot es pot proposar que l'alumnat investigui sobre les pautes de creixement de determinats virus o bacteris i les mesures higièniques per evitar-ne el contagi.

Matemàtiques 1 Batxillerat – Activitats competencials

- **Competència personal i interpersonal:** si l'activitat es fa en equip, els alumnes aprenen a organitzar-se, a valorar les opinions de la resta de companys i a gestionar les possibles diferències d'opinió.
- **Competència comunicativa:** l'aprenentatge cooperatiu implica fer una defensa pública davant dels companys i aprendre a organitzar-se i potenciar el debat entre ells.
- **Competència en recerca:** gràcies a la resolució de l'activitat i si investiguen sobre altres virus o bacteris.

Les situació plantejada ofereixen molts **mètodes de treball** entorn de les funcions exponencials. Per exemple, es pot representar la gràfica de la funció exponencial de l'activitat i fer veure als alumnes que si no s'atura el creixement dels bacteris, aleshores pot acabar morint tota la població ja que la funció tendeix a infinit quan x es prou gran. Es pot aprofitar per parlar o recordar el concepte de límit quan una variable és prou gran (tendeix a l'infinit).

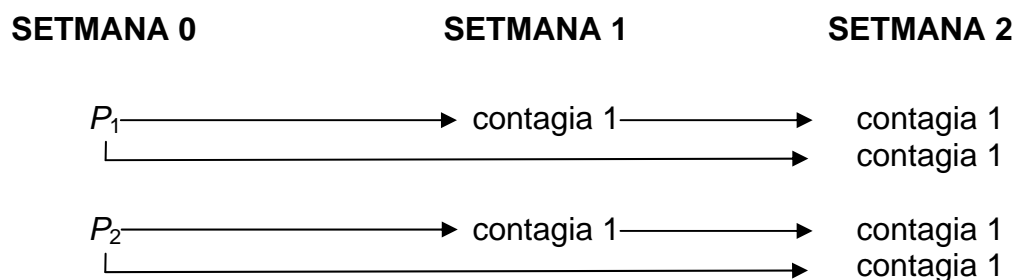
La mateixa situació es pot plantejar suposant que el virus es un troià informàtic que s'introdueix als ordinadors gràcies a les xarxes socials. D'aquesta manera l'activitat es fa més propera encara als alumnes i, per tant, pot ser-los més interessant. Es pot reflexionar sobre el perill de les xarxes socials com a mètode per a la propagació de virus informàtics.

Solució de l'activitat

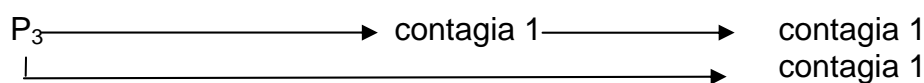
- a) Si forméssiu part d'aquest equip de matemàtics, com calcularíeu la previsió del nombre de persones malaltes al cap de 1, 2, ..., x setmanes?

Hem de construir un model matemàtic per al comportament del bacteri. Inicialment (setmana 0) hi ha tres persones contagiades: P_1, P_2, P_3 .

Representem què passa en dues setmanes:



Matemàtiques 1 Batxillerat – Activitats competencials



Per tant, les tres primeres setmanes tindrem:

	Setmana 0	Setmana 1	Setmana 2	Setmana 3
P_1	1	1	2	4
P_2	1	1	2	4
P_3	1	1	2	4
Nous contagiats	$S_0 = 3$	$S_1 = 3$	$S_2 = 6$	$S_3 = 12$

	Setmana 0	Setmana 1	Setmana 2	Setmana 3
Total infectats	$S_0 = 3$	$S_0 + S_1 = 6$	$S_0 + S_1 + S_2 = 12$	$S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = 24$

El resultat d'infectats per setmana també es pot escriure de la manera següent:

	Setmana 0	Setmana 1	Setmana 2	Setmana 3
Total infectats	$3 = 3 \cdot 2^0$	$6 = 3 \cdot 2^1$	$12 = 3 \cdot 2^2$	$12 = 3 \cdot 2^3$

Amb les consideracions anteriors, aplicant-les per a la setmana s obtindrem: $3 \cdot 2^s$. Per tant, tenim que, per obtenir el nombre total de malats (m) en s setmanes, el model de la funció exponencial és:

$$m = 3 \cdot 2^s$$

- b) La primera setmana un equip d'investigació obté resultats força esperançadors amb uns tipus de compostos químics, els lisozímics. Les reserves de l'Estat d'aquesta substància curarien exactament un màxim de 6 144 persones. Per preveure quan haurien de demanar aquests tipus de compostos a altres països, es pregunta també a la matemàtica quantes setmanes han de passar perquè hi hagi exactament 6 144 persones amb la malaltia. Com ho calcularíeu?

Matemàtiques 1 Batxillerat – Activitats competencials

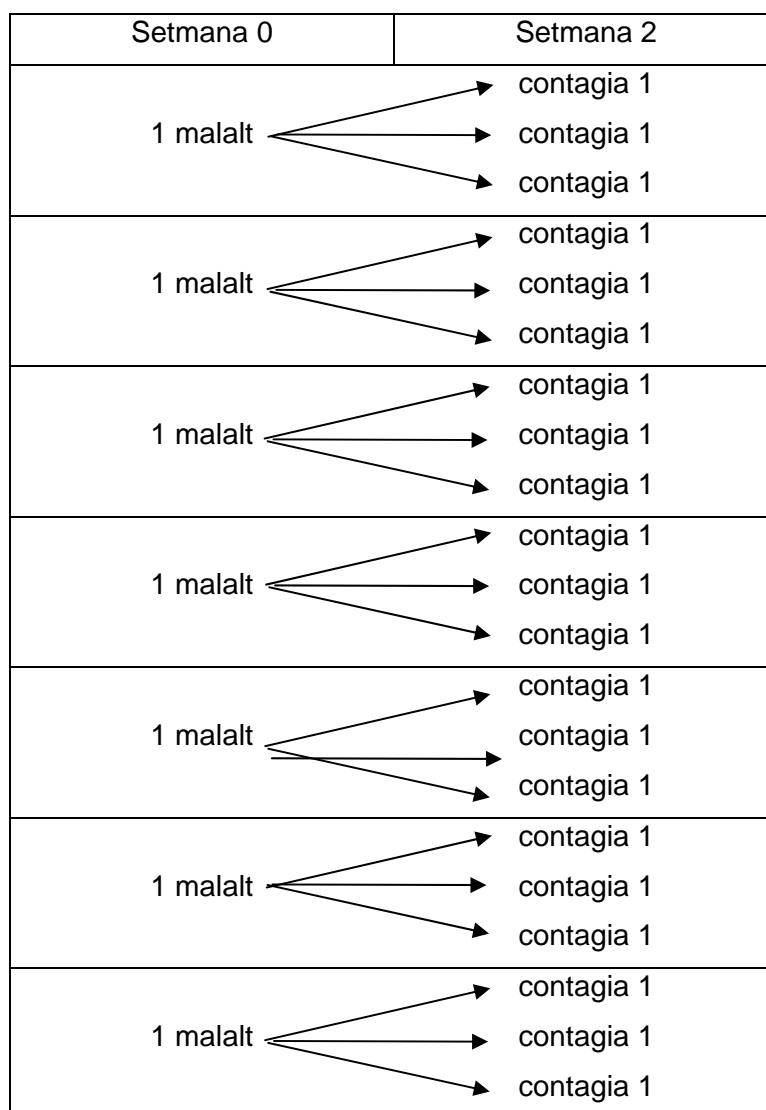
Hem de resoldre:

$$3 \cdot 2^s = 6144 \rightarrow 2^s = \frac{6144}{3} = 2048 \rightarrow 2^s = 2^{11} \rightarrow s = 11$$

Per tant, al cap de 11 setmanes hi hauran 6144 contagiats. A partir d'aleshores s'hauria de començar a comprar compostos lisozímics a altres països.

c) Li pregunten a l'experta matemàtica que, suposant que fos certa la hipòtesi de l'equip mèdic, quants casos de nous afectats hi hauria a la vuitena setmana. Ajuda-la a trobar la resposta.

Gràficament, podem representar el número d'infectats de la manera següent:



Matemàtiques 1 Batxillerat – Activitats competencials

És a dir, que al cap de 2 setmanes hi haurà:

$$7 \cdot 3 = 21 \text{ nous infectats}$$

Al cap de 2 setmanes més (a la quarta setmana), s'hauran detectat:

$$(7 \cdot 3) \cdot 3 = 7 \cdot 3^2 = 63 \text{ nous infectats}$$

Si fem les mateixes operacions, podem obtenir el nombre de malalts que s'hauran detectat la vuitena setmana:

$$7 \cdot 3^4 = 567 \text{ nous infectats}$$

d) A la vuitena setmana, hi ha un total de 854 casos afectats, nous i antics. Amb aquesta dada confirmaríeu o descartaríeu la hipòtesi?

En general, l'operació a seguir és:

Set. inicial	2a set.	4a set.	6a set.	8a set.	s set.
$7 \cdot 3^0$	$7 \cdot 3^1$	$7 \cdot 3^2$	$7 \cdot 3^3$	$7 \cdot 3^4$	$7 \cdot 3^{\frac{s}{2}}$

Calculem el nombre total de malalts en 8 setmanes:

$$7 \cdot 3^0 + 7 \cdot 3^1 + 7 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^4 = 854 \text{ malalts}$$

Per tant, podem verificar que la hipòtesis de l'equip mèdic és encertada.

e) Podríeu trobar una fórmula amb la qual, en funció del número de setmana (s), es pogués conèixer el número de persones contagiades?

Com s'ha vist en l'apartat anterior, a la setmana x hi ha $7 \cdot 3^{\frac{s}{2}}$ malalts contagiats.