

«Enfoque ráster» del problema hidrodinámico del flujo en lámina libre en 2D.

Joan Soler

Control, Dynamics and Application. CoDALab-UPC.

joan.soler@upc.edu

Ernest Bladé

Instituto mixto de investigación. FLUMEN-UPC.

ernest.blade@upc.edu

Jordi Bofill

Cátedra de programari lliure. CPL-UPC.

jordi.bofill@upc.edu

Manuel Gómez

Instituto mixto de investigación. FLUMEN-UPC.

manuel.gomez@upc.edu

1.- Introducción y objetivos

Los Sistemas de Información Geográfica (SIG) trabajan con información del territorio en dos formatos: formato ráster y formato vectorial. En las plataformas de SIG existen algoritmos independientes para el tratamiento de la información dependiendo del formato original de los datos. Por lo tanto, cualquier información procedente de un modelo hidráulico de flujo de agua en lámina libre circulando por el territorio, puede ser clasificado en estos dos formatos. Y los algoritmos de simulación también pueden ser independientes con lo que son susceptibles de ser clasificados de dos maneras: *Enfoque vectorial* y *Enfoque ráster*.

La mayoría de los modelos numéricos de simulación del flujo de agua en lámina libre en dos dimensiones se basan en unas representaciones geométricas del territorio denominadas mallas. Estas mallas están compuestas de unidades simples denominadas celdas que son polígonos de tres o cuatro lados. La implementación de la malla se hace considerando que en el interior de sus celdas se mantienen constantes las propiedades geométricas y las hidráulicas. Por lo tanto, en el contexto de los SIG, las mallas son cubiertas vectoriales de polígonos con sus correspondientes propiedades. En este trabajo se presenta una herramienta de simulación del flujo basada en un tipo de celdas denominadas *Volúmenes finitos cuadrangulares (VFC)*.

En el contexto de los modelos numéricos, cuando se requiere mayor precisión de los resultados o mayor cantidad de información en determinadas zonas del ámbito de estudio, es necesario crear mallas de volúmenes finitos más densas en dichas zonas y menos densas en el resto. Ello da lugar a mallas de volúmenes finitos no homogéneos, con lo que el *Enfoque vectorial* se mantiene. Pero en determinados casos, no es necesaria una distribución de la información tan irregular, por lo que se puede representar la geometría mediante mallas uniformes de volúmenes finitos homogéneos. Y si además la celda base es cuadrangular, entonces el problema pasa a tener un *Enfoque ráster*.

Un Modelo Digital de Elevaciones (*MDE*) es una representación en formato *ráster* de la geometría de una zona del territorio determinada. Un *ráster* está constituido por un conjunto de *píxeles* o celdas cuadrangulares. Cada *píxel* representa un área cuadrada del plano x/y de una determinada longitud de lado — longitud que se denomina lado del *píxel*— y un valor asignado a esta área. Cuando dicho valor es la cota media de toda la superficie de la celda, el *ráster* se denomina *MDE*. El *Enfoque ráster* en el problema hidrodinámico del flujo en lámina libre resulta el adecuado cuando el problema tiene grandes dimensiones y la información original para la construcción de la malla proviene de un *MDE*. Tal es el caso de los estudios de inundabilidad o modelos para la clasificación de la rotura de un embalse en función del riesgo potencial.

Actualmente existen técnicas numéricas de resolución de las ecuaciones de flujo en lámina libre en dos dimensiones de Saint Venant —también denominadas "Shallow Waters Equations"— mediante esquemas de volúmenes finitos para todo tipo de mallas, bien sean estructuradas y uniformes, bien sean no estructuradas y no homogéneas. En este trabajo se presenta una adaptación de una de estas técnicas numéricas a mallas con celdas cuadrangulares uniformes y estructuradas de tipo *VFC*. Dicho en otras palabras, se trata de una adaptación numérica al *Enfoque ráster* porque se establece una malla homogénea y estructurada de cuadriláteros que hace equivaler —directamente y sin interpolaciones— cada *pixel* del *MDE* con el correspondiente *VFC*.

Como siempre pasa en hidroinformática, cuanto más detallado es el modelo utilizado, mejor es el conocimiento que se obtiene del fenómeno, pero más difícil es su construcción y mayor es su complejidad. Antaño, la utilización de modelos excesivamente simplificados era obligada porque no existían ordenadores suficientemente potentes para el uso de modelos sofisticados. Pero hoy en día, la tecnología informática disponible permite el uso de modelos cada vez más complejos y acordes con la realidad, de manera que el establecimiento de tales hipótesis simplificadoras resultan injustificables.

A lo largo de la historia han ido apareciendo hipótesis simplificadoras que en la actualidad no tienen por qué ser establecidas:

- Régimen uniforme.
- Régimen estacionario y suavemente variable.
- Régimen no estacionario y suavemente variable.
- Unidimensionalidad.
- Bidimensionalidad.
- Distribución hidrostática de presiones.
- Sin pérdidas por infiltración.
- Continuidad espacial del coeficiente de rugosidad.
- Existencia de un flujo mínimo como condición inicial.

Por otro lado, la tecnología LiDAR —del inglés "Light Detection and Ranging"— es una técnica de teledetección que mide la altura del terreno utilizando un escáner láser. Hoy en día LiDAR es la tecnología más precisa para generar *MDE* para grandes áreas con una resolución espacial de 0,5 o 1 m y con una precisión mínima de 15 cm en altura. Esta tecnología ofrece grandes ventajas en la obtención de los *MDE* en contraposición de los sistemas fotogramétricos: permite medir la altura real del terreno de debajo la vegetación puesto que el rayo láser la atraviesa, tiene una precisión homogénea para toda la información del área de estudio y reduce los costos de producción y los plazos de entrega. Por consiguiente, este tipo de material resulta muy adecuado para la generación de mallas estructuradas de *VFC* uniformes para los modelos numéricos de flujo en lámina libre 2D.

Generalmente, los modelos numéricos comerciales de flujo 2D en lámina libre capaces de reproducir el comportamiento del flujo circulando sobre el territorio requieren la generación de complejas mallas para la definición geométrica del problema. Estas mallas, resultan muy tediosas de ser implementadas y comprometen gran parte del tiempo del personal altamente especializado porque se trata de herramientas adaptadas al *Enfoque vectorial*. Además, al crear la malla de volúmenes finitos se pierde precisión por la necesidad de interpolación a partir del *MDE*. En este trabajo se presenta un esquema numérico de volúmenes finitos adaptado a la utilización de mallas estructuradas y homogéneas con celdas de tipo *VFC*. Tal adaptación presenta las siguientes características:

- Establece una malla estructurada y uniforme de cuadriláteros que hace equivaler —directamente y sin interpolaciones— cada *pixel* del *MDE* con el correspondiente *VFC*. Las dimensiones del *VFC* serán las del *pixel* del *MDE* de base.
- Utiliza el esquema explícito de primer orden en volúmenes finitos de Godunov con el *Riemann solver* de Roe y con el tratamiento del término independiente propuesto por Vázquez-Cendón (Bladé y Gómez, 2006). La utilización de un esquema de mayor precisión lleva consigo un incremento del tiempo de cálculo y no mejora la calidad de los resultados dada la gran precisión de la discretización espacial utilizada.
- Esta discretización con malla estructurada y uniforme confiere al estudio hidrodinámico del flujo en dos dimensiones un *Enfoque ráster*, en contraposición a la tradicional de malla de volúmenes finitos no estructurada y no uniforme, que se podría decir que tiene un *Enfoque vectorial*.
- El hecho de que a cada instante de tiempo de integración no sea necesaria la consulta de la base de datos de la topología de la malla por ser conocida de antemano —porque se trata precisamente de una

mallas estructuradas y homogéneas— hace que el proceso numérico mejore enormemente su eficiencia de cálculo, tanto por requerir menor tiempo de cálculo como menor memoria para el almacenamiento de la geometría. Por consiguiente, se pueden abordar problemas de mayor dimensión, dado que se consigue una mayor optimización del código en aras a la obtención de la máxima velocidad de cálculo y el uso de información masiva.

- El *Enfoque ráster* es altamente paralelizable si se desea.
- Con el *Enfoque ráster* se reduce la complejidad del preproceso y del postproceso. Por contra, con geometrías complicadas donde se requiere la precisión del *Enfoque vectorial*, el *Enfoque ráster* resulta inadecuado.
- La sencillez de planteamiento de *Enfoque ráster* se mantiene también en el establecimiento de las condiciones de contorno. Se proponen de dos tipos de condiciones de contorno por defecto: *Pared material* sin flujo para los píxeles tipo *NODATA* —píxeles del *MDE* sin información de cota— y *Salida libre* de agua —para el contorno del *MDE*—. Este planteamiento simplificado presenta el inconveniente de que debe de disponerse de un *MDE* suficientemente extenso como para que no exista influencia en el área de interés de las condiciones de contorno que sean desconocidas.

Después de esta introducción, el presente documento se estructura de la siguiente manera. La segunda parte de *Planteamiento matemático* donde se describe la discretización numérica en volúmenes finitos aplicados a las ecuaciones de Saint-Venant y como las ecuaciones algebraicas resultantes se simplifican cuando se utilizan los *VFC* del *Enfoque ráster*. Y finalmente, antes de las conclusiones, se da un ejemplo práctico de aplicación del *Enfoque ráster*.

2. Planteamiento matemático

En este apartado se repasa la formulación de las ecuaciones de Saint-Venant bidimensionales, se aplica al sistema una discretización en volúmenes finitos en el caso general de mallas no estructuradas y finalmente se muestra como se simplifica la formulación cuando se adapta el esquema a problemas en los que es posible la utilización de mallas estructuradas y homogéneas.

Hay que decir que la presentación de este apartado se ha hecho desarrollando la formulación hasta el último nivel, donde las expresiones algebraicas resultantes finales tienen gran sencillez. Esto se ha hecho de esta manera para mostrar la simplificación a la que se puede llegar en la implementación del *Enfoque ráster* en el *problema hidrodinámico del flujo en lámina libre en 2D*. Se han dejado sin explicación los conceptos teóricos subyacentes que pueden encontrarse en las referencias bibliográficas que se dan.

2.1.- Ecuaciones de Saint-Venant Bidimensionales

Las ecuaciones de Saint-Venant bidimensionales, denominadas en inglés "Shallow Waters equations", se pueden presentar en forma conservativa y notación vectorial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 \quad (1)$$

donde t es el tiempo, \mathbf{U} es el vector de variables de flujo, \mathbf{F} es el tensor de flujo, \mathbf{H}^1 es la componente motriz del término independiente y \mathbf{H}^2 es la pendiente de fricción, que responden a las expresiones:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu & hv \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} & huv \\ huv & hv^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{ox} \\ ghS_{oy} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde h es el calado, u la velocidad en la dirección del eje de abscisas y v la velocidad en la de las ordenadas, g es la aceleración de la gravedad, S_{0x} es la pendiente del fondo en la dirección de las abscisas y S_{0y} en el de las ordenadas y S_{fx} es la pendiente de rozamiento en la dirección de las abscisas y S_{fy} en el de las ordenadas:

$$S_{fx} = n^2 \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} ; S_{fy} = n^2 \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \quad (3)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning. Estas ecuaciones representan los principios de conservación de la masa y de conservación de la cantidad de movimiento en las dos direcciones del plano x/y .

La ecuación consta de tres términos. El primer término representa la variación temporal local de las variables hidráulicas: masa y cantidad de movimiento, el segundo término representa la variación espacial de los flujos de dichas cantidades y el tercer término (término independiente) representa la ganancia o pérdida de masa y cantidad de movimiento por unidad de tiempo en un volumen diferencial que se mueve con el fluido. Evidentemente la variación de masa debe de ser nula por no incluirse la infiltración ni la precipitación, por lo que la primera componente del vector de variables independientes es cero. La contribución exterior a la cantidad de movimiento, con las hipótesis realizadas, tiene dos razones: la variación de energía potencial —reflejada en la pendiente del fondo— y las fuerzas de fricción con el contorno —reflejada en la pendiente motriz—. Las ecuaciones de Saint Venant son un caso concreto de sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico, cuasi-lineal y con termino independiente.

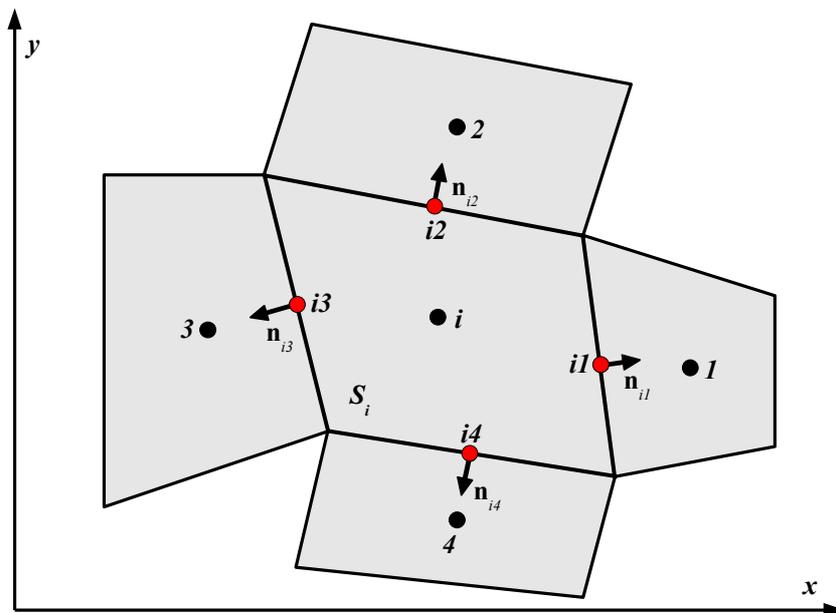


Figura 1: Discretización en volúmenes finitos de un dominio bidimensional. En este caso se representa una discretización con una malla estructurada compuesta de cuadriláteros no homogéneos. Aquí, i representa el índice del elemento donde se aplicará la discretización y la estructura recursiva, $j=1, \dots, 4$, es el conjunto de celdas contiguas a elemento i , S_i es la superficie que encierra el volumen y \mathbf{n}_j es el vector ortonormal a lado correspondiente.

2.2.- Esquema numérico en volúmenes finitos

Aplicando el *Riemann solver* de Roe (1981) para cada lado de la celda de la Figura 1 en un esquema en volúmenes finitos siguiendo los procedimientos mostrados en Toro (2009) y tratando la pendiente del fondo del término independiente según Vázquez-Cendón (1999), se obtiene el esquema numérico de primer orden utilizado en este trabajo. Todo este proceso deductivo completo puede encontrarse detalladamente en Bladé y Gómez (2006), donde se llega al siguiente esquema explícito, presentado sintéticamente a modo de estructura recursiva:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2S_i} \sum_{j=1}^{N_i} \left[\left(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) \right) \mathbf{n}_{ij} - \sum_{k=1}^{k=3} \gamma_k \mathbf{e}_k \right] \Delta l_{ij} + \Delta t \left(\mathbf{H}_i^2 \right)^n \quad (4)$$

donde:

- i y n representan el índice denotativo de celda y el de instante de tiempo de integración.
- j representa el índice denotativo de celda contigua a la i .
- ij representa el lado compartido por las dos celdas i y j de longitud Δl_{ij} .
- Δt es la longitud del paso de tiempo de integración.
- S_i es la superficie en planta de la celda.
- $\mathbf{n}_{ij} = (n_x, n_y)^T$ es el vector ortonormal apuntando hacia afuera de la celda, siendo n_x y n_y sus componentes en las direcciones de los ejes coordenados.
- \mathbf{e}_k :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{pmatrix}_{ij}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -cn_y \\ cn_x \end{pmatrix}_{ij}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{pmatrix}_{ij} \quad (5)$$

- γ_k :

$$\gamma_k = \alpha_k \varphi_k + (1 - \text{signo}(\lambda_k)) \beta_k \quad (6)$$

con:

$$\alpha_{1,3} = \frac{\Delta h}{2} \pm \frac{1}{2c} \left[\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (un_x + vn_y)\Delta h \right]_{ij}; \quad \beta_{1,3} = \mp \frac{c}{2} \Delta z_{ij} \quad (7)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{c} \left[(\Delta(hv) - v\Delta h)n_x - (\Delta(hu) - u\Delta h)n_y \right]_{ij}; \quad \beta_2 = 0_{ij}$$

$$\lambda_{1,3} = un_x + vn_y \pm c \Big|_{ij}; \quad \varphi_k = \begin{cases} |\lambda_k| & \text{si } |\lambda_k| \geq \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & \text{si } |\lambda_k| < \varepsilon_k \end{cases} \quad \text{con: } \varepsilon_k = \text{Max}[0, \lambda_{ij} - \lambda_i, \lambda_j - \lambda_{ij}] \quad (8)$$

En el esquema explícito de primer orden en volúmenes finitos de Gudonov con el *Riemann solver* de Roe utilizado en este trabajo, las expresiones (5) a (8) son evaluadas sobre los lados compartidos mediante las siguientes interpolaciones entre celdas contiguas:

$$c_{ij} = \sqrt{g \left(\frac{h_i + h_j}{2} \right)}; \quad u_{ij} = \frac{u_i c_i + u_j c_j}{c_i + c_j}; \quad v_{ij} = \frac{v_i c_i + v_j c_j}{c_i + c_j}; \quad c_i = \sqrt{gh_i}; \quad c_j = \sqrt{gh_j} \quad (9)$$

2.3.- Formulación en malla estructurada en Volúmenes Finitos Cuadrangulares

En este apartado se describen los cambios necesarios para la adaptación de la formulación propuesta en (4) a (9) para una malla estructurada y homogénea de *VFC* de acuerdo con el *Enfoque ráster*.

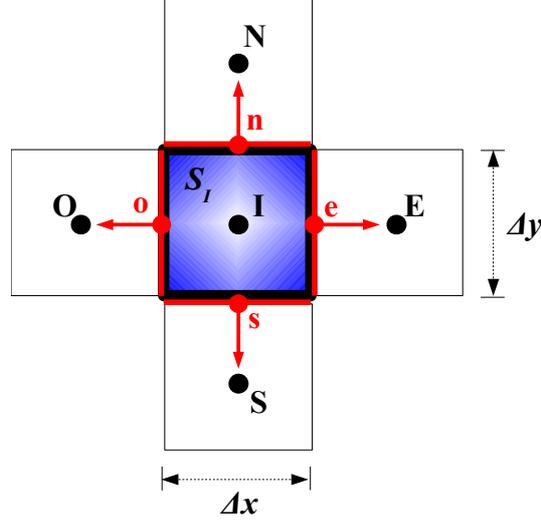


Figura 2: Discretización en volúmenes finitos de un dominio bidimensional mediante *VFC* y nomenclatura local. Cada volumen *I* está rodeado por un volumen Norte denotado en mayúsculas por «*N*», por un volumen Sur denotado por «*S*», por un volumen Este denotado por «*E*» y por un volumen Oeste denotado por «*O*». En rojo, se representan las paredes del volumen finito «*I*» adyacentes con cada uno de los volúmenes que lo rodean denotados en minúscula por «*n*», «*e*», «*s*», y «*o*», respectivamente.

Una malla de *VFC* es una malla en que todas sus celdas son cuadradas y homogéneas y están dispuestas por filas y columnas de manera que cualquier celda del dominio de integración tiene un elemento superior (denominado aquí volumen Norte y denotado por «*N*»), uno inferior (denominado aquí volumen Sur y denotado por «*S*»), uno a la derecha (denominado aquí volumen Este y denotado por «*E*») y uno a la izquierda (denominado aquí volumen Oeste y denotado por «*O*») (Figura 2). Aplicando esta nomenclatura, las variables interpoladas en las caras (9) será:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sqrt{g \left(\frac{h_N + h_I}{2} \right)} ; u_n = \frac{u_N c_N + u_I c_I}{c_N + c_I} ; v_n = \frac{v_N c_N + v_I c_I}{c_N + c_I} ; c_N = \sqrt{g h_N} ; c_I = \sqrt{g h_I} \\
 c_e &= \sqrt{g \left(\frac{h_E + h_I}{2} \right)} ; u_e = \frac{u_E c_E + u_I c_I}{c_E + c_I} ; v_e = \frac{v_E c_E + v_I c_I}{c_E + c_I} ; c_E = \sqrt{g h_E} \\
 c_s &= \sqrt{g \left(\frac{h_S + h_I}{2} \right)} ; u_s = \frac{u_S c_S + u_I c_I}{c_S + c_I} ; v_s = \frac{v_S c_S + v_I c_I}{c_S + c_I} ; c_S = \sqrt{g h_S} \\
 c_o &= \sqrt{g \left(\frac{h_O + h_I}{2} \right)} ; u_o = \frac{u_O c_O + u_I c_I}{c_O + c_I} ; v_o = \frac{v_O c_O + v_I c_I}{c_O + c_I} ; c_O = \sqrt{g h_O}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Las componentes de las expresiones (5) a (8) se pueden particularizar para un volumen genérico I (Figura 2) dando:

$$\begin{aligned}
N_I &= 4 ; l_n = \Delta x ; l_e = \Delta y ; l_s = \Delta x ; l_o = \Delta y ; S_I = \Delta x \Delta y \\
\mathbf{n}_n &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{n}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{n}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \mathbf{n}_o = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_{1n} &= \left. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{1n} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n + c_n \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{2n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_n \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{3n} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n - c_n \end{pmatrix} ; \lambda_{1n} = v_n + c_n \\ \lambda_{2n} = v_n \\ \lambda_{3n} = v_n - c_n \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} \beta_{1n} = -0,5c_n(z_N - z_I) \\ \beta_{2n} = 0 \\ \beta_{3n} = 0,5c_n(z_N - z_I) \end{array} \right\} \\
\mathbf{e}_{1e} &= \left. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{1e} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_e + c_e \\ v_e \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{2e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_e \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{3e} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_e - c_e \\ v_e \end{pmatrix} ; \lambda_{1e} = u_e + c_e \\ \lambda_{2e} = u_e \\ \lambda_{3e} = u_e - c_e \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} \beta_{1e} = -0,5c_e(z_E - z_I) \\ \beta_{2e} = 0 \\ \beta_{3e} = 0,5c_e(z_E - z_I) \end{array} \right\} \\
\mathbf{e}_{1s} &= \left. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{1s} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s - c_s \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{2s} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_s \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{3s} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s + c_s \end{pmatrix} ; \lambda_{1s} = -v_s + c_s \\ \lambda_{2s} = -v_s \\ \lambda_{3s} = -v_s - c_s \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} \beta_{1s} = -0,5c_s(z_S - z_I) \\ \beta_{2s} = 0 \\ \beta_{3s} = 0,5c_s(z_S - z_I) \end{array} \right\} \\
\mathbf{e}_{1o} &= \left. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{1o} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_o - c_o \\ v_o \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{2o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_o \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{3o} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_o + c_o \\ v_o \end{pmatrix} ; \lambda_{1o} = -u_o + c_o \\ \lambda_{2o} = -u_o \\ \lambda_{3o} = -u_o - c_o \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} \beta_{1o} = -0,5c_o(z_O - z_I) \\ \beta_{2o} = 0 \\ \beta_{3o} = 0,5c_o(z_O - z_I) \end{array} \right\} \\
\alpha_{1n} &= \frac{h_N - h_I}{2} + \frac{1}{2c_n} [h_N v_N - h_I v_I - v_n (h_N - h_I)] \left. \begin{array}{l} \alpha_{1e} = \frac{h_E - h_I}{2} + \frac{1}{2c_e} [h_E u_E - h_I u_I - u_e (h_E - h_I)] \\ \alpha_{2n} = -\frac{1}{c_n} [h_N u_N - h_I u_I - u_n (h_N - h_I)] \\ \alpha_{3n} = \frac{h_N - h_I}{2} - \frac{1}{2c_n} [h_N v_N - h_I v_I - v_n (h_N - h_I)] \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} \alpha_{2e} = \frac{1}{c_e} [h_E v_E - h_I v_I - v_e (h_E - h_I)] \\ \alpha_{3e} = \frac{h_E - h_I}{2} - \frac{1}{2c_e} [h_E u_E - h_I u_I - u_e (h_E - h_I)] \\ \alpha_{1s} = \frac{h_S - h_I}{2} - \frac{1}{2c_s} [h_S v_S - h_I v_I - v_s (h_S - h_I)] \\ \alpha_{2s} = \frac{1}{c_s} [h_S u_S - h_I u_I - u_s (h_S - h_I)] \\ \alpha_{3s} = \frac{h_S - h_I}{2} + \frac{1}{2c_s} [h_S v_S - h_I v_I - v_s (h_S - h_I)] \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} \alpha_{1o} = \frac{h_O - h_I}{2} - \frac{1}{2c_o} [h_O u_O - h_I u_I - u_o (h_O - h_I)] \\ \alpha_{2o} = -\frac{1}{c_o} [h_O v_O - h_I v_I - v_o (h_O - h_I)] \\ \alpha_{3o} = \frac{h_O - h_I}{2} + \frac{1}{2c_o} [h_O u_O - h_I u_I - u_o (h_O - h_I)] \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

(11)

Todas las expresiones de (10) y (11) son de tipo algebraico y tienen una marcada sencillez. en su conjunto, solamente dependen de las cotas de los volúmenes finitos contiguos y de sus variables hidráulicas.

Finalmente, resultará muy útil definir el vector de flujo mediante la siguiente transformación del sumatorio sobre los cuatro lados de (4):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} dh \\ dhu \\ dhv \end{pmatrix}_I^n &= \sum_{j=1}^4 \left[\left(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) \right) \mathbf{n}_{ij} - \sum_{k=1}^{k=3} \gamma_k \mathbf{e}_k \right] \Delta L_{ij} = \\
 &= \left[\begin{pmatrix} h_N u_N \\ h_N u_N^2 + 0,5gh_N^2 \\ h_N u_N v_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_S u_S \\ h_S u_S^2 + 0,5gh_S^2 \\ h_S u_S v_S \end{pmatrix} \right] \Delta x + \left[\begin{pmatrix} h_E v_E \\ h_E u_E v_E \\ h_E v_E^2 + 0,5gh_E^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_O v_O \\ h_O u_O v_O \\ h_O v_O^2 + 0,5gh_O^2 \end{pmatrix} \right] \Delta y - \\
 &- \left[\gamma_{1n} \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n + c_n \end{pmatrix} + \gamma_{2n} \begin{pmatrix} 0 \\ -c_n \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_{3n} \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n - c_n \end{pmatrix} + \gamma_{1s} \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s - c_s \end{pmatrix} + \gamma_{2s} \begin{pmatrix} 0 \\ c_s \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_{3s} \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ v_s + c_s \end{pmatrix} \right] \Delta x - \\
 &- \left[\gamma_{1e} \begin{pmatrix} 1 \\ u_e + c_e \\ v_e \end{pmatrix} + \gamma_{2e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_e \end{pmatrix} + \gamma_{3e} \begin{pmatrix} 1 \\ u_e - c_e \\ v_e \end{pmatrix} + \gamma_{1o} \begin{pmatrix} 1 \\ u_o - c_o \\ v_o \end{pmatrix} + \gamma_{2o} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_o \end{pmatrix} + \gamma_{3o} \begin{pmatrix} 1 \\ u_o + c_o \\ v_o \end{pmatrix} \right] \Delta y
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde los valores con subíndices en mayúsculas representa valores tomados en el interior del volumen y en minúsculas representan valores interpolados en el lado correspondiente.

Teniendo en cuenta el vector de flujo (12) y los demás vectores originales, el esquema general de actualización temporal (4) útil para cualquier tipo de malla, queda adaptado para su utilización en el contexto del *Enfoque ráster* mediante la siguiente estructura recursiva:

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_I^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_I^n - \frac{\Delta t}{2S_I} \begin{pmatrix} dh \\ dhu \\ dhv \end{pmatrix}_I^n - \Delta t \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{fx} \\ ghS_{fy} \end{pmatrix}_I^n \tag{13}$$

donde k es ahora el superíndice denotativo de tiempo e I el subíndice denotativo de *VFC* o *pixel*.

2.4.- Condiciones de contorno

En la gran mayoría de casos, la cartografía utilizada para la realización de los estudios de inundabilidad y de clasificación en función del riesgo potencial de balsas presenta grandes zonas donde no se dispone de información altimétrica susceptible de ser utilizada para la creación de los correspondientes *MDE*. Los *VFC* o *píxeles* afectados por esta falta de información se denominan de tipo *NODATA*. La razón de ello es el ahorro que se tiene cuando no se compra zonas donde se supone, en principio, que no debe circular agua.

El tratamiento que se hace sobre los *NODATA* y sobre los contornos delimitados por las edificaciones es establecimiento de una condición de contorno tipo *Pared material* por donde el flujo no puede pasar. Desde el punto de vista numérico, cuando a un *VFC* —denotado por I — se le va a aplicar (13) para actualizar en el tiempo las variables y cuando alguno de los volúmenes N , E , S o O es de tipo *NODATA*, se mantiene el mismo esquema pero asignando a los *NODATA* los siguientes valores:

$$h_j^k = h_I^n \quad ; \quad u_j^n = -u_I^n \quad ; \quad v_j^n = -v_I^n \tag{14}$$

donde j es el índice de *VFC* tipo *NODATA*, I es el índice del *VFC* adyacente al j con el que comparte el lado, h el calado, u la velocidad en el eje de las abscisas y v la velocidad en el eje de las ordenadas en el instante n .

La gracia de (14) está en el hecho de que se anulan los promedios de los valores de las velocidades de (10) en las paredes del lado compartido, siendo nulo el flujo a través de él pero manteniendo inalterado el esquema numérico (12-13).

La presencia de volúmenes *NODATA* adyacentes a un *VFC* da lugar a 15 combinaciones posibles que generan los correspondientes tipos de volumen. En la Figura 3 se muestra un esquema de todas las posibles combinaciones entre volúmenes normales de tipo 1 y los *NODATA*. El tipo de combinación pasa a ser una nueva propiedad de todas las celdas —que describe la estructura topológica de malla— y debe suministrarse con el mismo formato ráster de entrada de datos de las demás propiedades hidráulicas.

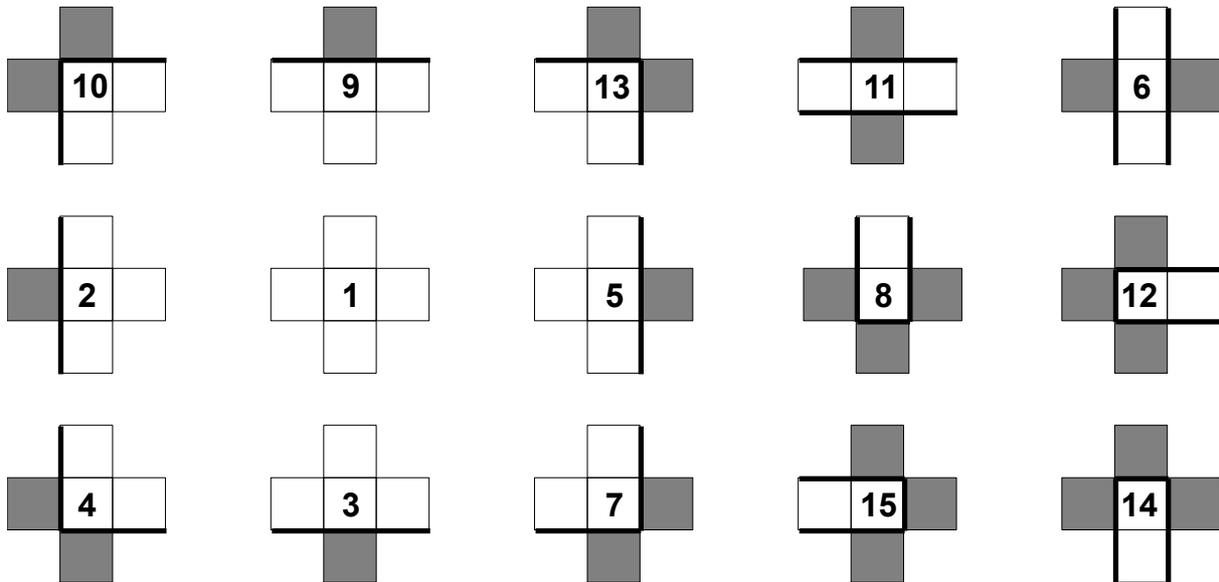


Figura 3: Tipos de volúmenes con condiciones de contorno tipo *Pared material* en algunos de los volúmenes adyacentes. de color gris se representa un *VFC* de tipo *NODATA*. Los 15 tipos de combinaciones representan todas las posibles. De esta forma, la topología de la malla queda definida por un solo número que pasa a ser una propiedad más de la celda.

La existencia de *VFC* de tipo *NODATA* da la posibilidad de utilizar esta figura para simular el comportamiento del flujo al entorno de algunas estructuras, como por ejemplo los pilares de los puentes. Ello puede llevarse a cabo siempre y cuando se pueda componer la sección del pilar mediante cuadrados *NODATA* de la precisión del *MDE* utilizado (longitud del lado de la celda).

El tratamiento que se hace sobre los contornos rectilíneos de los márgenes de la serie cartográfica (digamos la primera y última filas del ráster y primera y última columnas) que constituye el modelo, es tratado como condición de contorno de tipo *Salida libre de agua*:

$$h_j^n = h_I^n \quad ; \quad u_j^n = u_I^n \quad ; \quad v_j^n = v_I^n \quad (16)$$

donde el índice j es cualquier *VFC* perteneciente al contorno de la serie cartográfica e I representa el índice de cualquier *VFC* adyacente al contorno con el que comparte un lado, h el calado, u la velocidad en el eje de las abscisas y v la velocidad en el eje de las ordenadas en el instante n .

3.- Ejemplo ilustrativo

Para ilustrar la aplicación del *Enfoque ráster*, se presentan los resultados de modelización para un estudio de inundabilidad de un municipio ubicado en la cuenca del Ebro en España. El estudio hidráulico fue hecho en condiciones estacionarias para caudales de tres periodos de retorno. Aquí se presentan los resultados de una onda estacionaria cuya zona de inundabilidad se encontró resolviendo las ecuaciones en régimen variable en el tiempo (1) aplicando unas condiciones supercríticas de contorno de caudal constante en una sección del río de aguas arriba hasta la consecución del régimen estacionario (Figura 4).

Se utilizaron dos geometrías que difieren en el grado de precisión y de disponibilidad de la información inicial. Una primera geometría de ámbito «recortado» (Figura 4 a la izquierda) procedente de un vuelo Lidar y

una segunda de ámbito «ampliado» (Figura 4 a la derecha) procedente de un *MDE* elaborado con una cartografía tradicional a escala 1:5.000. Dado que, como se verá, el agua salía del ámbito de la cubierta Lidar, tuvo que ampliarse posteriormente a partir de la cartografía 1:5.000. A parte de los resultados propios de un estudio de inundabilidad, el ejemplo sirve para analizar el efecto de la presencia de elementos tipo *NODATA* en los tiempos de de cálculo.

Muchas veces la cartografía disponible no abarca todo el dominio deseable con grandes zonas con *VFC* tipo *NODATA* y cuando su proporción es grande, lo mejor es realizar los cálculos sobre la selección de los *VFC* con información y tratar a los *NODATA* como paredes materiales. De esta forma, se evita el «barrido» por todas las celdas y solo se pasa los *VFC* con información de cota a cada instante de tiempo.

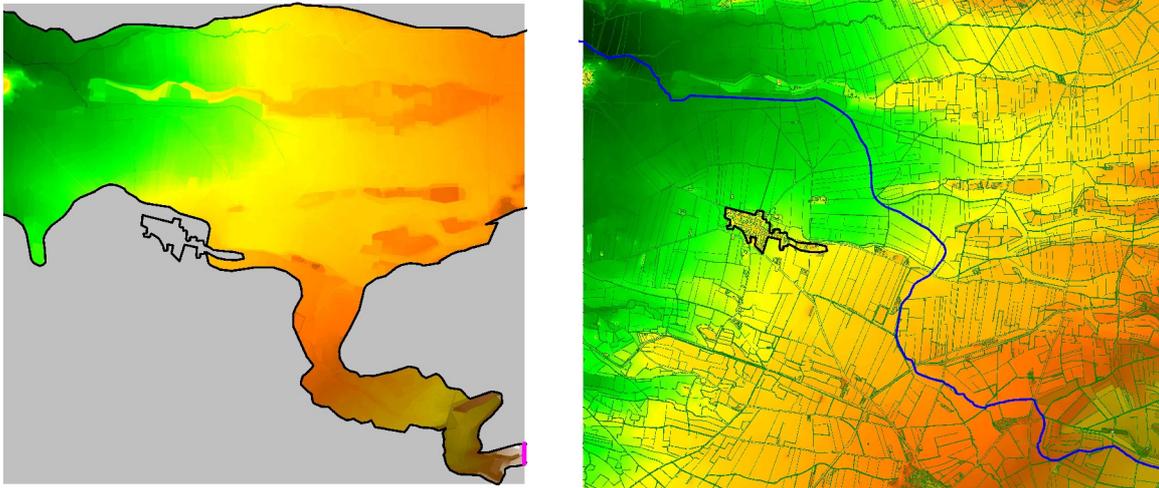


Figura 4: *MDE* de cada uno de los modelos. A la izquierda puede verse el *MDE* (1x1) «recortado» procedente de un vuelo Lidar y a la derecha otro *MDE* (2x2) «ampliado» obtenido a partir de la cartografía 1:5.000 (<http://icc.cat>). Este último también presenta el eje teórico del río de color azul. Por el centro se muestra de color negro, el contorno de una población. Abajo a la derecha de color fucsia, puede verse la sección de aguas arriba donde se imponen las condiciones de contorno.

A la vista de las gráficas de la Figura 4, cabe destacar lo siguiente:

- La densidad de volúmenes finitos es tan grande que la malla no puede ser dibujada, pero se intuye la presencia de las celdas porque se corresponden con los píxeles.
- En la gráfica de la izquierda el *MDE* tiene 5.690 filas y 6.170 columnas, lo que significan 35.107.300 *VFC* o celdas con 1 m de lado, con lo que el ámbito del modelo es de 3.510,73 ha. El número de *VFC* con *NODATA* es 16.819148 (47,9%).
- En la gráfica de la derecha, el *MDE* tiene 2.938 filas y 3.400 columnas, lo que significan 9.989.200 *VFC*. Cada *VFC* tiene 2 m de lado con lo que el ámbito del modelo es de 3.996 ha.
- Abajo a la derecha de color fucsia, puede verse la sección de aguas arriba donde se imponen las condiciones de contorno.
- El polígono cerrado situado aproximadamente en el centro de las gráficas representa el perímetro construido un núcleo urbano población y su tratamiento es de *NODATA*.

Se establece una condición de contorno de entrada de flujo una onda estacionaria de 450 m³/s correspondiente a la avenida de 500 años de periodo de retorno. Se proponen unas condiciones de flujo supercríticas que dan lugar al perfil de calados que muestra la Figura 5, con la componente de la velocidad en el eje de ordenadas nula y con la componente de la velocidad en el eje de abscisas el doble de la correspondiente crítica para asegurar la entrada del caudal consignado. La sección donde se imponen tales condiciones de contorno se ubica suficientemente lejos del contorno urbanizado del municipio, que es donde se desea conocer la afectación, como para no afectar el flujo.

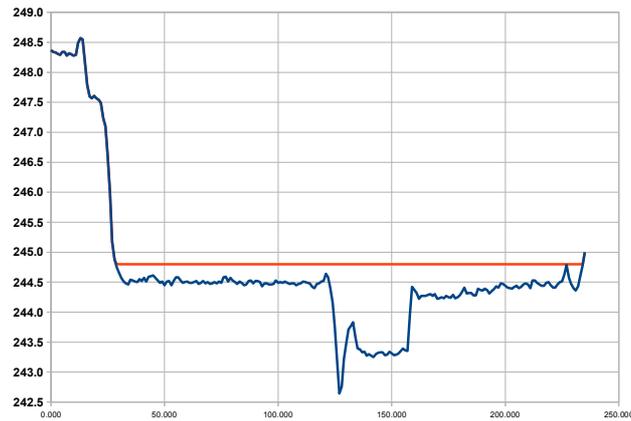


Figura 5: condiciones de contorno aplicadas de calado constantes, en la sección de aguas arriba del río con condiciones supercríticas. La cota absoluta del agua era de $244,8\text{ m}$ para la modelización con el *MDE* «recortado».

Uno de los resultados del modelo hidráulico más representativos de un estudio de inundabilidad es el área de afectación de la avenida (Figura 6). Evidentemente, también se consiguen otros mapas para las componentes de la velocidad en los dos ejes coordenados. A partir de ellos y los de calados, es posible la determinación del mapa de daño que es una combinación de todos ellos.

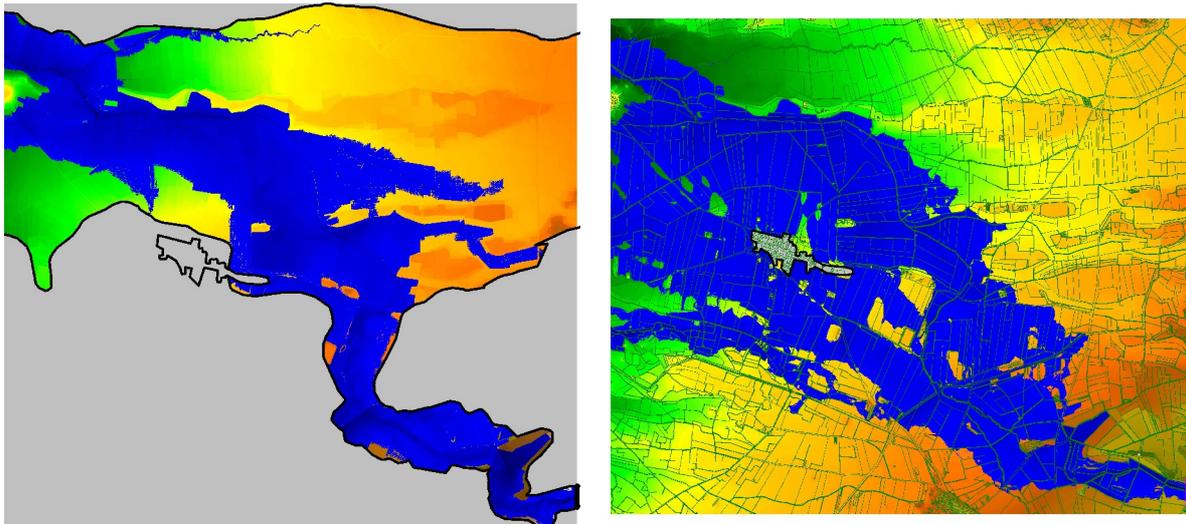


Figura 6: zona de inundabilidad calculada con los dos modelos sobre su correspondiente *MDE*. A la izquierda puede verse como la falta de cartografía «canaliza» el propio caudal. Esta es la razón principal para la que tuvo que realizarse una aplicación del modelo.

A la vista de las gráficas de la Figura 6 cabe destacar los siguiente:

- El área de inundabilidad que presentan ambos modelos son completamente diferentes, básicamente porque el agua circula tanto por la parte norte de la población como por la sur. Ello ocurre así porque se trata de una zona extremadamente plana y el flujo es quien determina su propio camino.
- El paso del modelo «recortado» inicial al segundo «ampliado» supuso un descenso de la lámina de agua en el contorno de la población de unos $0,5\text{ m}$ de promedio.
- Vistos los dos puntos anteriores, queda clara la importancia de implementación de un modelo 2D.
- La zona coloreada de azul respresenta el conjunto de *VFC* mojados en la situación final estacionaria, siendo el azul más intenso a más profundidad.

- La imagen de la izquierda se corresponde con el área de inundabilidad obtenida a los 7.200 s de iniciado el flujo. La imagen presenta un dominio mojado constituido por 8.500.000 VFC (850 ha y 21,2%) y el coste computacional de su obtención fue de 864.000 s (240 h) de tiempo de CPU total transcurrido, es decir, un ratio de 0,00833 sFLO/sCálculo.
- Para la imagen de la derecha, el dominio mojado fue de 3.781.101 VFC (1.512,5 ha y 37,9 %) y el coste computacional de 118.800 s (33 h), lo que significa un ratio de 0,061 sFLO/sCálculo.

Los cálculos se realizaron con un software libre en un computador con sistema operativo Gentoo GNU/Linux, que es una metadistribución altamente configurable para una aplicación concreta y optimizable para una CPU específica, lo que proporciona una velocidad de cálculo superior a otros sistemas operativos habituales. El programa implementado para la resolución de este problema concreto dentro de la filosofía "Do one thing but do it well" (un programa específico para cada problema) ha sido implementado en código Fortran estándar y se ha compilado con gfortran sin paralelización, incluido en la GNU Compiler Collection, compatible con el estándar Fortran 95 y con soporte para F77. Las características hardware fueron: CPU AMD Phenom II 965 X4 Quad Core 3,4Ghz, 6 Gb de memoria DDR3 a 1.600 Mhz y 2x500Gb de disco. Se tratan de componentes electrónicos comerciales de alta gamma en su momento, pero con coste total inferior a los 1.000 dólares. A fecha de abril 2009, esta CPU estaba situada en el puesto 47 del ranking de <http://cpubenchmark.net>.

4.- Conclusiones

Seguidamente se enumeran las conclusiones del trabajo.

- Se ha establecido una clasificación de los problemas de flujo en lámina libre en dos dimensiones de acuerdo con el formato de la información disponible y requerida de los Sistemas de Información Geográfica (SIG): *Enfoque vectorial* y *Enfoque ráster*.
- Se ha presentado el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas de Saint-Venant en dos dimensiones y se describe el método de resolución utilizado que se basa en un esquema explícito de primer orden en volúmenes finitos de Godunov con el *Riemann solver* de Roe y con el tratamiento del término independiente propuesto por Vázquez-Cendón. Dado que dicho esquema sirve tanto para problemas con malla estructurada o no, el problema puede considerarse dentro del *Enfoque vectorial*.
- Se establece una adaptación del método propuesto en el punto anterior a problemas que se describen con una malla estructurada y homogénea de cuadriláteros que hace equivaler —directamente y sin interpolaciones— cada *pixel* o celda del MDE con el correspondiente *Volumen Finito Cuadrangular* (VFC). Las dimensiones del VFC serán las del *pixel* del MDE de base. Por lo tanto, el problema puede considerarse dentro del *Enfoque ráster*.
- En el *Enfoque ráster*, el hecho de que a cada instante de tiempo de integración no sea necesaria la consulta de la base de datos de la topología de la malla por ser conocida de antemano —porque se trata precisamente de una malla estructurada y homogénea— hace que el proceso numérico mejore enormemente su eficiencia de cálculo, tanto por requerir menor tiempo de CPU como menor memoria RAM de almacenamiento de la geometría. Además presenta la propiedad de ser altamente paralelizable.
- La sencillez de planteamiento del *Enfoque ráster* se mantiene también en el establecimiento de las condiciones de contorno. Se proponen de dos tipos condiciones de contorno por defecto: *Pared material* sin flujo para los VFC tipo NODATA —*pixeles* sin información de cota— y *Salida libre* de agua —para el contorno de la serie cartográfica del MDE—.
- El programa utilizado ha sido implementado en código Fortran estándar y se ha compilado con gfortran sin paralelización, incluido en la GNU Compiler Collection, compatible con el estándar Fortran 95 y con soporte para F77. Las características hardware fueron: CPU AMD Phenom II 965 X4 Quad Core 3,4Ghz, 6 Gb de memoria DDR3 a 1.600 Mhz y 2x500Gb de disco. Se tratan de componentes electrónicos comerciales de alta gamma, pero con coste total inferior a los 1.000 \$. A fecha de abril 2009 esta CPU está situada en el puesto 47 del ranking de <http://cpubenchmark.net>.

5.- Referencias bibliográficas

Roe, P.L., (1981), Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *Journal Of Computational Physics*, V. 43, pp. 357–372.

Toro, E.F., (2009), *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*, Springer Verlag.

Vázquez-Cendón, M.E. (1999), Improved Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Waters Equations in Channels with Irregular Geometry, *Journal Of Computational Physics*, V. 148, pp. 497–526.

Bladé, E., Gómez, M., (2006), «Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado en una y dos dimensiones», Monografía CIMNE N°97. Barcelona.