



Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria

Lorena Sierra Galdón¹; M. A. Juan Blanco²; L. M. Garcia-Raffi²; Joan Gómez Urgellés³

email: sierragaldon@gmail.com; majuabl1@mat.upv.es;

imgarcia@mat.upv.es; joang@ma4.upc.edu

¹IES Moixent. Moixent (Valencia),

²Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. Universitat Politècnica de València

³Matemàtiques IV Escola Politècnica Superior D'enginyeria De Vilanova I La Geltrú. Universitat Politècnica de Catalunya

RESUMEN

En este trabajo presentamos una experiencia llevada a cabo en el Instituto de Educación Secundaria de la Población de Moixent durante el curso 2009-2010. En el trabajo se presentan una serie de herramientas diseñadas para la implantación de la modelización matemática en el aula como una herramienta didáctica más que ayude a la consecución de los objetivos de la etapa y la adquisición de competencias. Se analiza en detalle la adecuación del material diseñado y se establecen unas conclusiones generales que nos permitirán en este curso la realización de la experiencia de forma más amplia.

Modelización Matemática, Educación Secundaria Obligatoria, Prácticas de modelización, Guiones de Prácticas, Guías Didácticas.

1. Introducción

Es un hecho constatable que la educación en los países desarrollados ha experimentado una evolución importante en estos últimos años. La preocupación social por el nivel de competencia en las diferentes disciplinas de los estudiantes, es consecuencia directa de este hecho, y ejemplos concretos de esta preocupación, son las reformas en los sistemas educativos o la puesta en marcha de programas internacionales como PISA [1].

Es precisamente en el último informe PISA [1] en el que se encuentra una clara apuesta por el conocimiento útil para la vida, evaluándose por primera vez el grado de competencia en la aplicación del conocimiento adquirido al mundo real: *“se incorpora la evaluación del concepto de competencia básica que tiene que ver con la capacidad de los estudiantes para extrapolar lo que han aprendido y aplicar sus conocimientos ante nuevas circunstancias y su relevancia para el aprendizaje a lo largo de la vida”*. El informe del estado español se hace también eco de esta circunstancia: *“PISA trata de valorar hasta qué punto los alumnos son capaces de usar los conocimientos y destrezas que han aprendido y practicado en la escuela cuando se ven ante situaciones en las que esos conocimientos pueden ser relevantes”*.

Una de las disciplinas que se considera esencial en la formación de un ciudadano y que sirve de referencia para medir el grado de desarrollo de una sociedad es la asignatura de matemáticas. Ni que decir tiene que de ella se espera que sea instrumento para describir y entender el mundo que nos rodea.

Mucho se ha avanzado en los últimos años respecto a qué se entiende por competencia matemática, cuál es la mejor forma de introducir los conceptos, cuál es el papel que deben jugar los problemas, etc... pero aún queda mucho por hacer. Es un hecho comprobable durante el trabajo diario en las aulas, que los métodos tradicionales no son efectivos. Los alumnos se convierten en una única entidad pasiva y global (*“Técnicas de aprendizaje colaborativo”*, 2007 [2]), receptores de una única transmisión de conocimientos sin opción a deducirlos por ellos mismos, en que se prima la ejecución de una serie de contenidos puramente matemáticos sin ninguna vinculación con la realidad. Por este motivo hay que apostar por nuevas herramientas de aprendizaje que busquen despertar el interés y la motivación de nuestros estudiantes por las matemáticas y que muestren su vínculo de unión con el mundo real, sin dejar de lado el aprendizaje de conceptos matemáticos y la capacidad de interiorizar las ideas que se esconden tras ellos.

Desde el ICMI XIV [3], la modelización se ha establecido como una herramienta útil para aproximar las matemáticas al ciudadano. Además de ser la herramienta de la Ciencia y la tecnología, se ha convertido en una herramienta muy útil para trabajar desde las matemáticas el binomio Ciencia-Sociedad, así como para afianzar la dimensión cultural y antropológica de esta disciplina. Experiencias que llevan la modelización a las aulas de matemáticas pueden encontrarse en trabajos de investigación en enseñanza superior (L. M. García-Raffi [4], J. Gómez [5,6], J.A. Montero [7] entre otros) y en enseñanza secundaria (Grup Zero [8], Grupo Cero [9], Grup VILATZARA [10], M. Sol [11,12], entre otros).

La experiencia que presentamos en este trabajo se suma a esta corriente, utilizando como herramienta fundamental la modelización y planteando elementos para una renovación tanto en las metodologías utilizadas en el aula, como en el tipo de habilidades evaluadas en los estudiantes. Buscamos motivar con el tándem matemáticas-realidad, hacer de la modelización una herramienta didáctica que atienda además a la diversidad en el aula e introducirla además como herramienta de aprendizaje. Es eje fundamental del trabajo, la preparación de materiales adecuados a esta propuesta.

1.1.-Marco teórico

1.1.1.- Modelización matemática. Antecedentes

Ya a principios de la década de los sesenta se produce dentro de la enseñanza de las matemáticas un proceso de revisión crítica de las llamadas “Matemáticas Modernas”. Matemáticos como L. Alhfors, M. Kline o G. Polya (1962) defendieron la teoría constructivista [13] frente a los excesos formales de la anterior.

En los años 70, Freudenthal impulsó la Educación Matemática Realística, teoría que se caracteriza por dos ideas fundamentales:

- las matemáticas, que han de tener un valor humano, deben estar conectadas con la realidad, ser cercanas a los alumnos y con valor relevante en la sociedad [14];
- la educación matemática no debe presentar las matemáticas como un sistema cerrado sino como una actividad, como un proceso de matematización [11].

La primera idea recoge claramente una de las bases de la modelización, conectar las matemáticas que estudian nuestros estudiantes con su propia realidad y trabajar en contextos cercanos al alumno relacionados con su entorno diario. La segunda plasma la convicción de que los estudiantes deben ir descubriendo las matemáticas por ellos mismos (guiados por el profesor) encontrando su utilidad en la vida diaria.

En el ámbito español, la llegada de la democracia trajo consigo los primeros movimientos de renovación educativa en todos los ámbitos del sistema. En la década de los setenta emergieron grupos de profesores preocupados por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El Grupo Cero en la Comunidad Valenciana (1975) o el grupo Zero en Cataluña (1975) y las asociaciones de profesores Newton en Canarias (1978) o Thales en Andalucía (1981) son un claro ejemplo de ello [8,15,13,16].

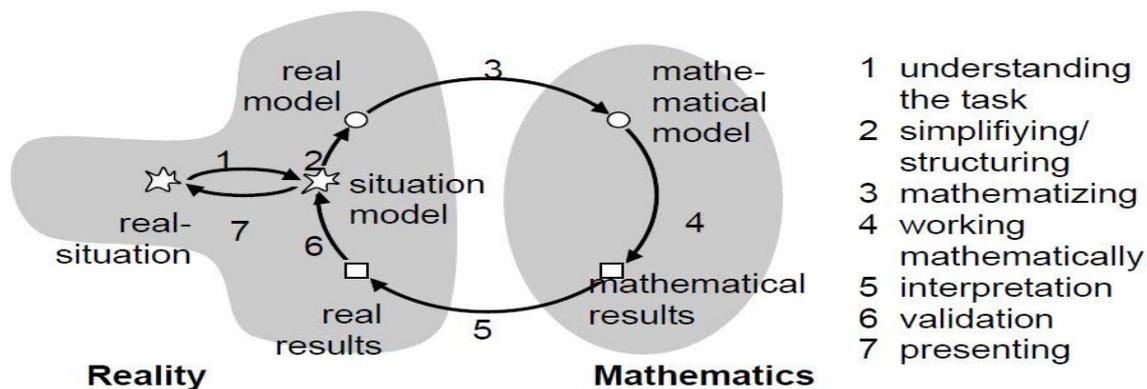
Desde la década de los setenta hasta la actualidad, España ha experimentado grandes avances en el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas, del mismo modo que también lo ha hecho la modelización matemática. En los últimos años por ejemplo, se han escrito varias tesis doctorales en educación matemática usando la modelización como herramienta didáctica. Las tesis doctorales de Joan Gómez (1998) [5], María Aravena (2001) [17] y J. Antonio Montero (2007) [7] a nivel universitario y las de Manel Sol (2008) [11] y Lluís Albarracín (2011) [18] a nivel de enseñanza secundaria, son ejemplos de este avance. Artículos recientes como [19,20,14] entre otros, son también señal inequívoca de que la investigación en modelización matemática en España está evolucionando rápidamente siguiendo además la estela de lo que sucede en el resto de Europa ([3,21] entre otros).

1.1.2. ¿Qué entendemos por modelización matemática?

En la literatura, podemos encontrar numerosas definiciones de **modelización matemática**:

- o según el ICMI XIV [3], por ejemplo, la Comisión Internacional de Enseñanza Matemática usa el término “Aplicaciones y Modelización” para indicar cualquier relación, sea la que sea, entre el mundo real y las matemáticas (*We use the term “Applications and modelling” to denote any relation whatsoever between the real world and mathematics*);
- o para Joan Gómez, tal como escribe en su libro “Per un nou ensenyament de les matemàtiques”, (2000) [22], la modelización matemática consiste en formular un problema real en términos matemáticos, resolverlo si es posible e interpretar los resultados en los términos del problema y de la situación estudiada (*modelatge matemàtic: consisteix a formular un problema real en termes matemàtics, resoldre'l si és possible i interpretar-ne els resultats en termes del problema i de la situació estudiada*);
- o y para Morgen Niss (1989), la modelización matemática se define como el arte de aplicar las matemáticas a la vida real.

Cualquiera de ellas se ajusta a nuestra forma de entender la modelización, si bien por su carácter más explícito, seguimos en este trabajo la definición de Joan Gómez. Del mismo modo, existen diferentes maneras de entender el proceso de modelización en base a un esquema lógico de estructura de pensamiento. El **esquema de modelización** propuesto por Blumm se concreta del siguiente modo:



y el que seguimos nosotros, acortándolo en 5 pasos de los 7, se estructura como sigue:

- simplificar el problema real a un modelo real
- matematizar el modelo real a un modelo matemático
- buscar una solución, trabajando matemáticamente, a partir del modelo matemático
- interpretar la solución del modelo matemático
- validar la solución en el contexto real,

entendiendo por **modelo matemático** la terna (A, M, f) , donde A representa un conjunto de objetos del mundo real, M un conjunto de expresiones matemáticas y f una correspondencia entre A y M (M. Niss, 1989).

En el planteamiento de la modelización matemática está implícito el proceso de **matematización**. En palabras de M. Niss (1992), “traducir un problema real a términos matemáticos” y según Jan de Lange (1993), “transformación mental en términos matemáticos de situaciones de la realidad”. Para Freudenthal, existen dos tipos de matematización: “la matematización horizontal, implica ir del mundo real al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical, significa desenvolverse en el mundo de los símbolos”.

Durante los procesos de modelización matemática, se utilizan ambos tipos de matematización: en un primer momento la matematización horizontal, ajustando el problema real a un modelo matemático, para después, en el proceso de matematización vertical, manipularlo y llegar a su resolución.

Finalmente, por **prácticas de modelización** (proyectos para Aravena [22] o proyectos matemáticos realistas para Sol [11]), entendemos una actividad matemática realizada en grupos reducidos (tres o cuatro alumnos), de larga duración, donde se resuelven problemas reales cercanos al alumno. Se podría decir, que el alumno es el protagonista, puesto que él elige la práctica que quiere realizar y se organiza para poder llevarla a cabo. El profesor adquiere el papel de orientador, ayuda a los alumnos cuando tienen dificultades, pero no les dice qué deben hacer, son ellos los que tienen que descubrirlo [7].

Según afirma Aravena (2001) [17], trabajar mediante proyectos facilita:

- contribuir al desarrollo de la autonomía,
- ayudar al desarrollo de la motivación,
- poder estimular el uso de capacidades cognitivas (conocimiento y contenidos) y metacognitivas en los alumnos y alumnas,
- favorecer, en la formación del estudiante, la capacidad para enfrentarse, con flexibilidad y confianza, a problemas nuevos y complejos en un mundo que está en cambio permanente,
- reflejar una integración del contenido aprendido y permitir reconocer y mejorar concepciones del alumnado sobre el propio papel del contenido matemático como ayuda a la modelización, promoviendo un proceso de regulación importante.

1.1.3.- Modelización matemática. Herramienta de enseñanza-aprendizaje

A través de la modelización se puede "hacer matemática para todos". Esta frase de M. Niss (1992), la podemos trasladar a la enseñanza actual, puesto que la modelización puede utilizarse como una herramienta didáctica para atender a la diversidad en el aula. Como hemos comentado, las prácticas de modelización se realizan en grupos, esta forma de trabajo, ayuda a la integración social y a que cada uno pueda aportar su granito de arena en función de sus capacidades. Por tanto, podemos considerar la modelización matemática, como una herramienta de aprendizaje.

Esto no significa, que la enseñanza de las matemáticas se tenga que reducir a esto (Kaiser y Schwarz, 2006), simplemente, es otra forma de mostrar y enseñar las matemáticas a tener en cuenta. Como dice Joan Gómez [23]: "la modelización matemática tiene que ser una metodología que es necesario incluir en la enseñanza de las matemáticas".

La enseñanza de las matemáticas tiene que ser abierta, buscar qué metodología se adapta mejor a cada tipo de alumnado y a los conceptos y objetivos que queremos que adquieran.

1.1.4.- Relación competencial

El papel de la modelización en la adquisición de las competencias básicas de secundaria, entendiendo el término competencia como la capacidad de poner en práctica e integrar los conocimientos, habilidades y actitudes adquiridas para resolver problemas y situaciones en contextos diversos, es claro. La manera en la que modelización guarda relación con dichas competencias podría argumentarse del siguiente modo:

- competencia matemática: a través de la modelización se desarrolla la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con el fin de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella formando parte del propio aprendizaje;
- competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico: lleva a la distinción de formas, relaciones y estructuras como herramientas básicas para desarrollar representaciones abstractas del mundo;
- competencia digital y tratamiento de la información: la búsqueda y selección de la información necesaria para cada trabajo tanto en medios escritos como en digitales, es en ocasiones requisito indispensable para la modelización;
- competencia aprender a aprender: a través de las prácticas de modelización, los alumnos aprenden qué deben hacer para aplicarlo después a nuevas situaciones, integrando los procesos originales como herramienta futura de actuación;
- competencia en comunicación lingüística: la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de ideas se utiliza continuamente. Aprender a transmitir, ayuda a la comprensión y se hace necesario convencer con argumentos científico-matemáticos,
- competencia de autonomía e iniciativa personal: hay que planificar estrategias, asumir retos y controlar los procesos en la toma de decisiones, así como interpretar la información a través de las matemáticas, de forma numérica o funcional;
- competencia social y ciudadana: el trabajo en grupo crea una interrelación entre los estudiantes que deben compartir opiniones, escuchar, debatir ...;
- competencia artística y cultural: escogiendo adecuadamente las prácticas de modelización es sencillo introducir las matemáticas en el ámbito cultural.

2.- La experiencia realizada

2.1.- Tema elegido.

A la hora de plantearnos la actividad de modelización, hemos elegido un tema que está presente en todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria como es el de funciones. En los primeros cursos, se empieza con la construcción de tablas de valores y la interpretación de datos y gráficos, y se acaba en los últimos, con el estudio de funciones no lineales y su interpretación en el mundo real [24]. Este hecho, nos proporciona perspectiva y comparación a la hora de evaluar los objetivos y contenidos que nuestros alumnos han ido adquiriendo a lo largo de toda la etapa.

Este tema en concreto, en el curso de cuarto de la ESO, se da en la tercera evaluación, lo cual nos proporciona algunas ventajas como el hecho de que los alumnos ya se han acostumbrado al ritmo de las clases, a lo que cada profesor exige en su asignatura o la conexión creada entre los alumnos a la hora de trabajar y convivir en la clase. Todos estos aspectos son importantes a la hora de llevar a cabo un trabajo en equipo como es el nuestro.

En las prácticas de modelización los contenidos curriculares que se han trabajado (todos ellos incluidos en el Decreto 112/2007¹), son los siguientes:

- Construcción de una tabla de valores. A partir de una situación real, los alumnos tienen que entender el problema y encontrar cuáles son las variables que necesitan para poder empezar a buscar datos y construir las tablas.
- Definición de una función de forma explícita. Una vez construidas las tablas y analizadas las variables que intervienen en el problema, llegar a la definición explícita de una función lineal.
- Uso de las TIC. Utilización de una hoja de cálculo para construir tablas y gráficas. Ayudándose de los programas informáticos adecuados, los alumnos calculan los valores de las funciones que han definido y pueden realizar su representación gráfica.
- Representación gráfica de las funciones.

Para la realización de estas prácticas, los alumnos necesitan procedimientos de cálculo y conceptos que se han dado en este curso o en cursos anteriores, como son:

- Resolución de ecuaciones con dos incógnitas, por tanteo o expresando una variable en función de las otras.
- Construcción de tablas de valores. Utilización de una hoja de cálculo para la construcción de tablas y gráficas de funciones.
- Concepto de mínimo absoluto, crecimiento y continuidad.
- Cálculo de la ecuación de una recta a partir de dos puntos dados.
- Concepto y cálculo de la media aritmética.
- Uso de procesadores de textos para la presentación de los trabajos.

2.2.- Material diseñado.

Las prácticas de modelización requieren un guión que introduzca a los alumnos en las diferentes partes del proceso, especialmente para poder separar las habilidades:

¹ DECRETO 112/2007, del 20 julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana

- ✓ Reconocimiento de los elementos importantes de un problema.
- ✓ Selección de la información relevante para la resolución.
- ✓ Formalización matemática: definición de variables y construcción de las ecuaciones que resuelven el modelo.
- ✓ Resolución del problema matemático.
- ✓ Interpretación del resultado y validación del modelo.

Uno de los objetivos de este proyecto es establecer la modelización como una herramienta práctica, que sea posible llevar a cabo en el aula en condiciones estándar y equiparable a cualquier otra de las que habitualmente se desarrollan en ella, como son la clase magistral, las sesiones de resolución de problemas (bien individuales o bien grupales), la clase dialogada, ... Por lo tanto la premisa a la hora de elaborar el material es que las actividades basadas en la modelización tienen que poderse implantar por cualquier profesor de matemáticas de secundaria. Es por lo que se ha desarrollado un "Material del profesor" y también un "Material del alumno", además de diseñar herramientas que nos permitan conocer los resultados obtenidos:

- ⇒ Test de modelización.
- ⇒ Cuestionario de intereses.
- ⇒ Cuestionario de opinión.

A continuación se mostrará cuál ha sido el material elaborado, de forma detallada, para llevar a cabo las prácticas de modelización en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

2.2.1.- Material del profesorado

Si queremos que las prácticas de modelización se conviertan en un elemento más dentro del aula y la actividad en una más de las que se puedan realizar, debemos de definir cuidadosamente el tipo de material con el que vamos a apoyar el desarrollo de la misma. Es por ello que hemos considerado que debía de existir una **guía didáctica del profesorado**. En ella se especifican cuáles son los objetivos que los alumnos deberían alcanzar a través de la modelización y los diferentes puntos que se han de tener en cuenta a la hora de poner la actividad en marcha. Estos puntos se detallan a continuación:

- Presentación del problema que se quiere estudiar: buscar preguntas que despierten el interés de los alumnos sobre el tema a tratar, para, a continuación, presentar los problemas que se plantean en las prácticas, relacionándolos con las preguntas que se les han realizado.
- Organización de la actividad: se cuenta a los alumnos cómo se va a llevar a cabo la actividad, en grupos reducidos de dos o tres personas como máximo, donde una parte del trabajo se realizará en sesiones colectivas dentro del horario escolar y otra parte, fuera de este horario.
- Recursos con los que cuentan los alumnos: en este trabajo los alumnos van a tener que buscar información y para ello, tendrán que utilizar todos los recursos que encuentren a su alcance, como internet, revistas, facturas,...
- Metodología: es un trabajo en grupo, como se ha comentado anteriormente, donde contarán con la ayuda del profesor. El trabajo se divide en tres partes: una, el seguimiento del guión de prácticas, familiarizándose con el lenguaje empleado, así como entendiendo cada tabla o cada resultado obtenido; dos, creación de un trabajo escrito, donde se mostrará el tipo de investigación y el modelo que han empleado; y, por último, una exposición oral del trabajo.
- Evaluación de las prácticas: a partir de la plantilla de evaluación, de la que hablaremos en los párrafos siguientes.

También se elaboró la **guía didáctica específica** de cada una de las prácticas que se realizaron. En ésta se recogen cada uno de los puntos mencionados anteriormente, haciendo referencia a los contenidos específicos en cada una. Esto es, a la guía general se añadirían los contenidos y la temporalización particulares de cada práctica y un anexo donde aparecería la práctica resuelta. Con este material, lo que se pretende es facilitar la tarea del profesorado que se enfrenta por primera vez a este tipo de trabajos en el aula.

Para realizar un seguimiento detallado de cada una de las sesiones empleadas en las prácticas de modelización, se ha elaborado un **diario del profesor**, donde se anotan las dificultades que sesión a sesión los alumnos van encontrando a la hora de realizar el trabajo. Además, este diario recoge también los errores que se van detectando y las propuestas de mejora que surgen para la elaboración de futuras prácticas. M. Aravena y J. Giménez [22] utilizan también un diario del profesor en sus trabajos de modelización, como un instrumento de regulación del trabajo, en el artículo citado, no se especifica cuáles son sus contenidos.

La evaluación no es una tarea sencilla. De hecho es la parte que menos gusta a la mayoría del profesorado, como afirman Millis y Cottell (1998), ya que requiere dos cosas fundamentales, objetividad y justicia. La objetividad se puede conseguir seleccionando desde el principio cuáles van a ser los puntos que se van a evaluar del trabajo. Así pues, para la evaluación de las prácticas se ha elaborado una **plantilla de evaluación**, donde se recogen todos los puntos que se van a tener en cuenta a la hora de evaluar los trabajos, tanto a nivel grupal como individual.

En otros trabajos de modelización, como podrían ser los de Manel Sol [12] o Joan Gómez [23], aparecen materiales similares para la evaluación de las prácticas.

Esta plantilla se proporciona también a los alumnos, ya que conocer el qué y el cómo de lo que se les va a evaluar, sirve para orientarlos y centrarlos en la elaboración de sus trabajos.

2.2.2.- Material del alumno

Para la realización de las prácticas, se ha elaborado un material específico para los alumnos de manera que les facilite la realización de las mismas. Se les proporciona el **guión de las prácticas** de modelización, que les ayuda en la traducción del problema real al lenguaje matemático. En él aparece una portada (sirve de presentación del tema tratado), con el título de la práctica, el índice de su contenido y los pasos a seguir en el proceso de modelización. A continuación, se muestra de una manera atractiva, un ejemplo de una modelización sencilla, que les sirva a los alumnos para la construcción de su propio modelo. A lo largo de la práctica, se van mostrando datos y resultados que los alumnos tienen que ser capaces de reproducir. También aparecen preguntas, relacionadas con los resultados obtenidos, que tienen que contestar. Para finalizar la práctica, se les presenta un cuestionario relacionado con todo lo que han hecho a lo largo de ella. Además, se les hacen propuestas para ampliar el trabajo y se muestran opciones de prácticas similares donde poder aplicar el mismo modelo.

El guión de prácticas, también llamado práctica de modelización, es utilizado por otros profesores (L. García-Raffi [25,4], Joan Gómez [5]) en sus trabajos de modelización matemática en el ámbito universitario.

Al igual que se ha elaborado un diario del profesor para llevar un seguimiento detallado de las prácticas, también se ha confeccionado un **diario del alumno**, donde cada grupo anota todo el trabajo realizado en cada sesión, las dificultades que han ido encontrado, los contenidos que

han trabajado y las conclusiones que han obtenido. Esto les sirve, tanto como reflexión sobre el trabajo que han ido realizando, como de asentamiento de los contenidos y metodologías utilizadas.

En un artículo de M. Aravena y J. Giménez (2002) [22], se muestra un material similar, la "*Tabla de análisis de tareas realizada*" y la "*Carta de orientación*", donde los alumnos han de contestar también a una serie de preguntas planteadas en cada uno de los talleres realizados.

Los alumnos no están habituados a realizar trabajos en grupo y menos en la asignatura de matemáticas, así que se les proporciona la plantilla de evaluación de la que se ha hablado anteriormente, para que tengan un conocimiento a priori de qué es lo que se espera de ellos a nivel de evaluación, de adquisición de contenidos y habilidades.

2.2.3.- Test de modelización

La metodología propuesta depende de la capacidad que tienen los alumnos de relacionar situaciones reales de la vida cotidiana con el conocimiento previo en matemáticas. Es por ello que, antes de pasar por las prácticas de modelización se elaboró un test de modelización donde se realizaban preguntas sencillas relacionadas con su vida cotidiana que tenían que contestar, aplicando las matemáticas que hasta ese momento conocían (Katja Maaß, 2006) [21].

Algunas de las preguntas del test estaban relacionadas con el uso de la proporcionalidad. Por ejemplo, se les preguntaba cuánto tiempo estaban hablando por el móvil en un día, con el objeto de que ellos hicieran un cálculo aproximado del tiempo que invertían en un día y lo multiplicaran por 7 para contestar al tiempo invertido en una semana o por 30 en el caso de un mes. También aplicaron este mismo criterio cuando se les preguntó por las medidas de un pupitre para un solo alumno, dos, tres, cuatro o cinco. Tomaron las medidas de un pupitre (largo y ancho) y debían calcular el doble, el triple, y así sucesivamente.

Una de las preguntas hacía referencia al cálculo de una estimación: La altura del campanario de Moixent. La respuesta dada por la mayoría de los alumnos fue de 45 metros y todos coincidieron en esta cifra. La dieron sin dar ninguna explicación alguna de cómo había sido hecho su cálculo. Así pues, se les preguntó que cómo lo habían averiguado y unos contestaron que lo habían buscado por internet, pero la mayoría contestó que habían ido a preguntarle al sacerdote del pueblo, y él les había dicho que medía aproximadamente 45 metros. De aquí surgió un *trabajo de campo* (L. Sierra, 2011 [20]) que resultó muy interesante para los alumnos.

2.2.4- Cuestionario de intereses

Antes de comenzar las prácticas, se elaboró un cuestionario, que contaba con una serie de preguntas, a través de las cuales, se quería obtener la información necesaria acerca de cuáles eran los intereses y motivaciones de nuestro alumnado, para así, después, poder elaborar unas prácticas de modelización, con temáticas cercanas a ellos, que pudieran conectar con sus intereses. **Motivar**, es uno de los ejes principales de nuestra propuesta metodológica. Como afirma Claudi Alsina (1995): "*Los estudiantes quieren aprender, pero de forma agradable y entretenida, con ganas de volver el próximo día a clase. Por eso sería interesante cambiar la mecánica tradicional por una de más nueva adecuada a las necesidades de los interesados*".

2.2.5.- Cuestionario de opinión

Una vez finalizadas las prácticas de modelización, se elaboró un cuestionario donde se preguntaba a los alumnos; qué les habían parecido las prácticas, qué dificultades habían encontrado o si los temas que se habían tratado les habían resultado interesantes, así como, cuáles proponían ellos, para futuras prácticas.

La información proporcionada por este cuestionario, es útil a la hora de volver a poner en práctica una experiencia como ésta, ya que, refleja lo que ha funcionado bien y lo que no. También nos puede aportar nuevas ideas para la elaboración de futuras prácticas de modelización, de manera que conecten mejor con los intereses de nuestros alumnos.

2.3.- Descripción de las prácticas: tarifa móvil y deporte de forma científica.

- a) **Tarifa de móvil:** se realiza un estudio entre el gasto mensual y el consumo realizado en una compañía en concreto, Yoigo, que se eligió porque solo tenía dos tarifas y resultaba sencillo realizar la comparativa. A partir de este ejemplo sencillo de modelización los alumnos tenían que generar sus propias prácticas, pudiendo elegir otras compañías y diferentes tarifas.
- b) **Deporte de forma científica:** se realiza un estudio de las calorías consumidas durante la realización de un deporte. En el guión de prácticas se muestra el consumo de calorías durante la realización combinada de dos deportes, el ciclismo y caminar. A partir de este ejemplo los alumnos generaban y modificaban las prácticas en función de sus propios intereses. Hubieron alumnos que eligieron un deporte fijo de estudio, el ciclismo, y a partir de ahí realizaron un estudio de las calorías ingeridas durante una semana y las consumidas durante la realización del mismo, también realizaron una tabla detallada de cual había sido la dieta seguida y los ejercicios realizados durante esta semana. Otro grupo, eligió dos deportes, la natación y el ciclismo y realizaron un estudio de cual de ellos resultaba más rentable a largo plazo si ambos deportes se practicaban partiendo de cero, es decir, sin ningún tipo de material.

2.4.- Implementación en el aula.

Durante toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria, la asignatura de Matemáticas tiene un carácter obligatorio con unos contenidos que son prácticamente los mismos a lo largo de toda la etapa [24]. Esto nos lleva a plantearnos la utilización de nuevas metodologías que ayuden a nuestros estudiantes a adquirir las habilidades y conceptos que durante toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria tenían que haber ido adquiriendo.

El grupo elegido para la realización de la experiencia objeto de este trabajo, fue un curso de cuarto de la ESO, opción A, del IES Moixent. Éste estaba formado por 27 alumnos, de los cuales cinco tenían las matemáticas de tercero pendientes, había un alumno repetidor de tercero y dos repetidores de primero, entre todos representaban casi un 30 % de la clase. Estos datos dan una visión general de las características del grupo donde se realizó la experiencia. Se eligió este curso porque tenía los conocimientos y las habilidades necesarias a priori para poder llevar a cabo las prácticas. Estas prácticas se plantearon como una actividad complementaria de clase evaluable y puntuable en la nota final de curso.

El desarrollo de la actividad se realizó en grupos reducidos de dos o tres alumnos. Esto permitiría el trabajo y la colaboración entre ellos a la hora de enfrentarse al problema

planteado: es lo que se conoce como trabajo cooperativo (E.F.Barkley y otros, 2007) [2]. Esta forma de trabajar les permite la opción de debatir, intercambiando puntos de vista, comparar y elaborar los resultados conjuntamente, facilitando de esta manera la integración de alumnos que tienen diferentes niveles académicos y socioculturales. John Dewey (1938) afirma "que se aprende haciendo". Los alumnos se convierten en los protagonistas de su propio aprendizaje.

La formación de los grupos se realiza libremente, según la elección de los alumnos. El profesor podrá orientar a los alumnos para que los grupos sean heterogéneos, y que la elección de compañeros se rija por criterios realistas: disponibilidad de horario y además que los horarios de todos los miembros del grupo sean compatibles, la situación geográfica de los domicilios, responsabilidad frente al trabajo y atendiendo a condicionamientos del tipo cultural y socioeconómico (valorar la concentración cultural). Esto podría llevarlos a un trabajo enriquecedor culturalmente.

Una vez constituidos los grupos, se explica a los alumnos en qué consiste el trabajo que van a desarrollar, presentando las dos prácticas de modelización que pueden elegir; una, sobre las tarifas de los móviles y la otra, sobre las calorías consumidas durante la realización de algún tipo de deporte. Esta presentación se realiza de la manera más atractiva posible para los alumnos y de forma que capte su atención. Para captar su atención, se presentan los problemas a estudiar mediante situaciones reales y materiales obtenidos a través de recursos cercanos a los alumnos, como son; internet, medios de comunicación, publicidad, etc.

Una vez presentadas las temáticas se les proporciona a cada grupo el guión de las prácticas para que de este modo los alumnos puedan elegir la que les resulta más interesante observando la organización y el trabajo presentados en cada una.

La formación de los grupos de trabajo y la presentación de las prácticas, necesita una sesión entera para poder llevarse a cabo. Durante las sesiones siguientes se trabaja de un modo más específico sobre cada práctica y en cada grupo en particular. A los alumnos se les ha proporcionado el material necesario (el guión de la práctica) para iniciar el trabajo. A través de este material, deben ir familiarizándose con el lenguaje utilizado, ir entendiendo la información mostrada y deduciendo como se ha ido obteniendo. En esta primera fase, se trata de reproducir e interpretar los datos y resultados que se van mostrando. Esto les servirá para entender un ejemplo sencillo de modelo y a partir de éste, ir creando el suyo propio, ya sea basándose en el mostrado en la práctica o creando uno totalmente diferente.

La finalización de las prácticas concluye con una presentación escrita de los trabajos y una exposición oral por parte de los miembros del grupo. Para la elaboración de dichas prácticas, se facilita a los alumnos una plantilla de evaluación, de la cual ya se ha hablado en el apartado anterior, donde quedan recogidos todos los puntos evaluables de las mismas. Con esto se consigue que los alumnos se organicen el trabajo, sabiendo en cada momento qué se les va a exigir. Los alumnos no están acostumbrados a trabajar de esta manera, y menos en la asignatura de matemáticas. Así pues, necesitan mucha ayuda y orientación.

Las prácticas de modelización se han organizado mediante sesiones de cuatro tipos: sesiones colectivas, sesiones de tutoría, sesiones grupales y exposiciones orales, de ellas hablaremos de forma específica a continuación.

2.4.1- Sesiones colectivas

Se realizan dentro del horario lectivo, semanalmente y con todos los alumnos de la clase presentes.

En estas sesiones se resuelven dudas de carácter general que van surgiendo en cada grupo, de manera que si una duda se generaliza, se puede comentar para toda la clase. Si no es así, la duda se resuelve de forma individual dentro del grupo. Una parte de las sesiones se realiza en el aula y otra, en la sala de informática, donde los alumnos pueden realizar la búsqueda de la información necesaria para realizar sus trabajos y además preguntar las dudas que les surgen a la hora de utilizar los diferentes programas informáticos (procesador de textos, hojas de cálculo, etc.). Esto confiere a la actividad de modelización un carácter horizontal, ya que implica a otras materias del mismo curso. Durante estas sesiones, también se les explica a los alumnos cómo se les evalúa el trabajo, cuáles son los puntos a considerar y se les proporciona la plantilla de evaluación que los recoge. Todas estas sesiones se graban en video recogiendo de esta forma la información sobre el desarrollo de la actividad, las dudas surgidas en cada grupo y el proceso de elaboración de los trabajos de modelización. La duración de estas sesiones es de aproximadamente dos meses, desde el inicio hasta el comienzo de las exposiciones orales.

El objetivo final es resolver dudas particulares surgidas a cada grupo de manera general, es decir, las dudas surgidas a otros compañeros pueden ayudar a los demás. También se consigue de esta manera hacer una puesta en común de los trabajos, orientar a los grupos y crear un hábito semanal, es decir, todas las semanas tienen que dedicar un tiempo de trabajo y reflexión a las prácticas y además tienen a un profesor con ellos para resolver cualquier problema que surja.

2.4.2.- Sesiones de tutoría

Estas sesiones se realizan también dentro del horario escolar, pero tienen un carácter menos colectivo, trabajando de forma personalizada el grupo directamente con el profesor. En estas tutorías, cada grupo debe mostrar cómo lleva el trabajo, las dudas que le han surgido hasta el momento y se realiza un análisis de cuál es el enfoque que ellos quieren dar a la práctica. De esta manera, si el grupo está atascado, se le ayuda planteando posibles caminos para poder solucionar el problema en cuestión. Estas sesiones no tienen lugar en el aula, sino en el departamento de matemáticas.

2.4.3.- Sesiones grupales

Éstas se realizan fuera del horario escolar, es decir, cada grupo se reúne cuando quiere y en el lugar elegido por sus miembros. De este tipo de sesiones, es complicado realizar un seguimiento, pero gracias a la elaboración del diario del alumno, comentado anteriormente, el profesor puede saber cuántas veces se han reunido y qué han trabajado en cada sesión. La entrega de este diario es obligatoria para todos los grupos.

2.4.4.- Exposición oral

Los alumnos tienen que realizar un trabajo escrito de las prácticas, pero este trabajo se tiene que presentar mediante una exposición oral, la cual se realiza delante de los compañeros y del profesor. Estas sesiones se realizan en el aula de informática o en el salón de actos, donde se dispone de un ordenador y de un cañón para poder proyectar los trabajos. En cada sesión exponen tres grupos y después de cada exposición, se dedica un tiempo para las preguntas realizadas por los compañeros.

Todas las exposiciones son grabadas en video, ya que en ellos se recoge perfectamente cada exposición y a la hora de evaluar a cada grupo, se puede consultar cómo fue su exposición y el turno de preguntas.

Con estas exposiciones se quiere conseguir que los alumnos sean capaces de defender delante de sus compañeros y su profesor, el trabajo que han estado realizando durante dos meses, argumentando las conclusiones y defendiendo los resultados obtenidos. Esto se consigue con mucho esfuerzo y confianza en lo que se está haciendo

A través de este tipo de trabajo se quiere conseguir que los alumnos descubran cómo a través de las matemáticas, se pueden resolver problemas de la vida cotidiana. Al trabajar las matemáticas de un modo diferente al ordinario (clases magistrales), se pretende despertar motivación e interés (M. Aravena y J. Giménez, 2002 [22]).

3.- Análisis de la experiencia del curso 2009-2010.

Como ya se ha dicho en apartados anteriores, esta experiencia se inició durante el curso 2009-2010, en un grupo de 27 alumnos de cuarto de la ESO. Nuestro objetivo era realizar un primer acercamiento de los estudiantes de secundaria a la modelización matemática, es decir, diseñar las herramientas adecuadas que nos permitan analizar las actividades de modelización en términos de los objetivos que deseamos alcanzar. En este sentido se crearon diferentes materiales, algunos para conocer cuáles eran los intereses de los alumnos (cuestionario), otros para la realización de la experiencia (las prácticas de modelización) y por último unos de control del trabajo (diarios).

Con todo esto, se consiguió generar, primero, material para llevar la modelización a las aulas y segundo, la realización de un estudio exploratorio, a partir del cual, extraer datos sobre cómo ha funcionado la experiencia.

En este apartado, realizaremos un análisis de la experiencia y de la puesta en práctica de los materiales creados.

3.1.1.- Cuestionario de intereses

El cuestionario de intereses se realizó a todos los alumnos de cuarto (tanto los de la opción A como los de la B) y también a los de primero de la ESO. Esto proporcionó perspectiva comparativa respecto de las motivaciones e intereses de los alumnos a lo largo de toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

En cuarto de la ESO, el cuestionario fue realizado por 28 alumnos de la opción A y 19 de la opción B. De entre todas las preguntas que constituían el test, hay dos cuyas respuestas llaman especialmente la atención; "*quina assignatura us agrada més?* (¿Cuál es la asignatura que más te gusta?), y "*quina era l'assignatura a la que li trobaven major aplicació a la vida real?* (¿Cuál es la asignatura a la que le encuentras mayor aplicación en la vida real?). Respecto a las respuestas a la primera pregunta, de todos los alumnos de la opción A, ninguno de ellos seleccionó a las matemáticas como su preferida. Cuando se les preguntó a los de la opción B, el 63% de los alumnos la eligieron como su asignatura favorita. Ésta era una respuesta esperada, puesto que los alumnos de la opción A son los que probablemente cursarán bachilleratos de letras mientras que los de la opción B, cursarán bachilleratos de ciencias.

Las respuestas a la segunda pregunta, muestran, cuando menos, un resultado llamativo. Ante la cuestión de "*quina és l'assignatura a la que li trobaven major aplicació a la vida real?*", el

39% de los alumnos de la opción A contestaron las matemáticas frente al 21% de la opción B. De esta forma, se deduce que a los alumnos de la opción B, les gustan las Matemáticas pero no les encuentran mucha utilidad en su entorno diario, mientras que a los de la opción A, no les gustan, pero sí que son capaces de reconocer que tienen utilidad dentro de su vida cotidiana. Una posible explicación que nosotros hemos dado a estas respuestas, es por el enfoque dado a las Matemáticas en la opción B, donde se las consideran necesarias en la aplicación de otras asignaturas de ciencias, más que en la vida diaria y muestran, las matemáticas, como una herramienta de trabajo para utilizar en otras disciplinas. Mientras, en la opción A, dado las dificultades que estos alumnos encuentran en la asignatura, descubren las limitaciones que tienen a la hora de desenvolverse en situaciones cotidianas que requieren algún cálculo matemático.

Como se ha comentado antes, este mismo cuestionario se realizó a 53 alumnos de primero de la ESO del mismo instituto y las respuestas obtenidas fueron también muy sorprendentes. Un 24% de los alumnos, eligieron las matemáticas como la asignatura que más les gustaba y además el 64% las consideraban la asignatura que más aplicación tenía dentro de su vida diaria. Estos estudiantes son los mismos que después llegan a cuarto y su percepción de las matemáticas ha cambiado por completo.

Estos resultados, aunque parciales y con una muestra pequeña, parecen indicar que existe una disfunción, ya sea en la metodología utilizada, o en el enfoque dado a las matemáticas a lo largo de toda la Educación Secundaria Obligatoria. Estudios similares encontrados en la literatura, apoyarían estas conclusiones (Gavilán, 2002) [26].

Por tanto, se deben buscar respuestas a algunas preguntas como qué ha pasado a lo largo de esta etapa educativa o qué hace que los alumnos cambien de opinión respecto de las matemáticas. La vía de acción que se propone en este trabajo es la realización de actividades dentro del aula, que refuercen el binomio matemáticas-realidad y muestren su potencial en la interpretación de situaciones propias de la vida diaria, ayudando a tomar decisiones y a la búsqueda de soluciones prácticas basadas en criterios objetivables.

3.1.2.- Diarios de trabajo

Los diarios, tanto del profesor como del alumno, nos proporcionan una perspectiva global de cómo han funcionado los trabajos y cuáles han sido las dificultades que se han ido encontrando los estudiantes.

3.1.3.- Diario del profesor

En este diario, como se ha comentado, se recogían los contenidos trabajados en cada sesión, las conclusiones obtenidas y las observaciones que se consideraban oportunas. Estos datos, nos proporcionan información de cómo ha ido el proceso de enseñanza y aprendizaje en el tema que se trataba, las funciones.

Las dificultades con las que se encontraron nuestros estudiantes fueron las siguientes:

- ✓ Identificar las variables que intervienen en el problema.
- ✓ Entender la información proporcionada por las tablas de valores.
- ✓ Representar gráficamente los puntos obtenidos.
- ✓ Realizar la escala adecuada, en cada uno de los ejes, a la hora de representar las variables.
- ✓ Obtener de la expresión analítica de una función.

Estas dificultades las fueron superando a lo largo de los trabajos, pero hubo una en concreto, la obtención de la expresión analítica de una función, donde algunos grupos no lo consiguieron (a pesar de haberse explicado en clase varias veces).

A la hora de trabajar con los ordenadores, mostraron mucha soltura, tanto en el manejo de los mismos, como en el de los programas que necesitaban utilizar, no supuso para ellos ninguna dificultad añadida, presentar los trabajos por escrito y exponerlos oralmente.

En las anotaciones realizadas en este diario, también se recogen las conclusiones y observaciones a las que el profesor va llegando en cada sesión cómo por ejemplo:

- ⇒ En las tablas, se deben mostrar de manera muy clara, cuáles son las variables que se representan y las unidades de medida que se utilizan.
- ⇒ Añadir preguntas que la mayoría de los estudiantes realizan al profesor, *“per què es resten x-y?”* (¿Por qué se restan x-y? Aparecía en la práctica de las tarifas de móviles) o *“quants minuts tarda en fer un quilòmetre en caminada?”* (¿Cuántos minutos se tarda en hacer un kilómetro caminando? Aparecía en la práctica del deporte).

Por tanto, este diario, sirve para reflexionar sobre el trabajo realizado en cada sesión, por un lado, los logros conseguidos por los estudiantes y por otro, los realizados por el propio profesor, además de mostrar los aspectos que se han de mejorar a la hora de volver a poner en práctica otra experiencia como esta.

3.1.4.- Diario del alumno

Al realizar un análisis de los contenidos expuestos en los diarios de cada grupo, se observan puntos en común; las dificultades encontradas y lo aprendido con este trabajo.

La mayoría de las dificultades surgidas a los alumnos, coinciden con las observadas por el profesor a lo largo de todo el proceso (mencionadas anteriormente). Pero también, en los diarios de los alumnos, aparecen nuevas dificultades como:

- ✓ La utilización del Excel, a la hora de representar gráficos.
- ✓ Buscar por Internet las diferentes tarifas ofertadas por las compañías telefónicas.
- ✓ Extraer la información de las facturas con las que trabajaban.
- ✓ Aplicación de algunas de las fórmulas que aparecían en las prácticas.

En estos diarios, se recoge también información sobre lo aprendido en cada una de las sesiones:

- ⇒ Buscar información por Internet.
- ⇒ Utilizar el Excel y el PowerPoint.
- ⇒ Interpretar y utilizar las fórmulas que aparecen en las prácticas.
- ⇒ Organizar el trabajo que tienen que realizar.
- ⇒ Encontrar la función representada mediante una tabla de valores.
- ⇒ Comparar gráficas y obtener conclusiones.

Como puede observarse, las dificultades encontradas por los alumnos en las primeras sesiones se convierten después, en los logros conseguidos a lo largo del trabajo.

La duración de las prácticas fue, aproximadamente, de dos meses y las sesiones que necesitaron para la elaboración de los trabajos, de entre seis y nueve.

El objetivo de este diario, era ayudar a los alumnos, a reflexionar sobre el trabajo que realizaban durante cada sesión. Además, a nosotros nos servía también, como mecanismo de control del trabajo realizado por cada grupo.

3.1.5.- Prácticas de modelización

Los guiones de prácticas elaborados, se utilizan como material orientador para el alumno, se muestra un modelo sencillo resuelto y a partir de él, los alumnos van realizando cada uno de los pasos propuestos en el guión, para poder después, generar por ellos mismos nuevos y extraer sus propias conclusiones. Los alumnos no están acostumbrados a realizar trabajos de este tipo (y menos en la asignatura de matemáticas), así pues, fue un proceso duro para ellos y de un nivel de dificultad elevado. Las sesiones colectivas en las prácticas de modelización, resultaron bien aprovechadas, los alumnos trabajaban en grupos y consultaban con el profesor las dificultades que iban encontrando.

Respecto a las sesiones de tutoría no se puede decir lo mismo, solo dos de grupos hicieron uso de ellas. Este hecho y la entrega de los trabajos, nos plantea un cambio a la hora de organizar estas sesiones en futuras experiencias. La reflexión es la siguiente: cada grupo tendrá que realizar de forma obligatoria dos entrevistas con el profesor, una al iniciar el trabajo y otra antes de la entrega, pudiéndose realizar más sesiones si el grupo así lo desea. De esta forma, el profesor, lleva un control más preciso del trabajo de cada grupo, evitando devolver los trabajos una vez presentados por la falta de formalización matemática (presentaban tablas de resultados sin mostrar la función de donde se habían obtenido, carencia de gráficos,...) o de organización.

Pero a pesar de todas estas dificultades, los trabajos escritos finales presentados fueron, en general, buenos, estaban bien escritos, llegaban a resultados interesantes y, además, en algunos casos, incluso habían modificado la práctica propuesta. A modo de ejemplo mostraremos la práctica de *"El deporte de forma científica"*, donde se proponía a los alumnos que compararan las calorías consumidas durante la práctica de cuatro deportes distintos. Un grupo decidió contar las calorías ingeridas cada día dentro de una dieta concreta (se mostraba en la práctica una tabla semanal donde se especificaba la alimentación seguida) y las calorías consumidas según el deporte o el ejercicio que realizaba cada día. Otro grupo la modificó, comparando dos deportes, la natación y el ciclismo, de manera que realizaron un estudio de las calorías consumidas en cada uno y a parte estudiaron, cuál de los dos deportes resultaba más económico si empezaban a practicarlos desde el principio, es decir, sin ningún tipo de equipamiento para su realización. Esto muestra como el guión de prácticas proporcionado a los alumnos tiene un carácter orientador y abierto a cualquier modificación. Manel Sol [11], en sus trabajos con proyectos matemáticos realistas en secundaria, no proporciona un guión de prácticas como en nuestro trabajo, pero el resultado final es el mismo, los alumnos acaban creando sus propias prácticas. La mayoría de los estos trabajos se presentaron escritos utilizando un procesador de textos.

Otra cosa que captó nuestra atención, fueron los recursos utilizados en las presentaciones orales de las prácticas; la incorporación de música, dibujos e incluso fotografías hechas por ellos mismos. De este modo podemos afirmar que la competencia en modelización, genera motivaciones hacia otras competencias, como podría ser este caso la competencia artística y cultural. Además, demostraron tener una gran soltura a la hora de presentar sus trabajos en público. Utilizaron también con gran habilidad el PowerPoint en sus presentaciones.

El resultado final ha sido muy gratificante, tanto para los alumnos (puesto que a pesar de las dificultades con las se encontraron al principio, consiguieron sacar adelante el trabajo) como para nosotros, por conseguir captar su interés por las matemáticas y observar la soltura con la que se desenvolvían durante las presentaciones orales de sus trabajos.

Un comentario realizado por un alumno al finalizar su trabajo fue: "Ha segut el treball més complicat que he fet durant aquest curs", realmente les resultó complicado, pero al final todos los grupos consiguieron acabarlo y presentarlo.

3.1.6 Cuestionario de opinión

El cuestionario de opinión se realizó a diez de los alumnos que participaron en esta experiencia, durante el curso siguiente (2010-2011). De esta forma evitábamos contestaciones condicionadas, puesto que lo que buscábamos eran respuestas sinceras. Todos los alumnos encuestados recordaban el tema del trabajo de modelización que habían realizado el curso anterior, considerándolo interesante y diferente a lo hecho hasta entonces en matemáticas. Las dificultades que comentan son prácticamente las mismas, que expusieron en su momento en sus diarios. Algunas de las cosas que más les gustaron de las prácticas, fueron:

- ✓ Trabajar en grupo.
- ✓ Realizar la presentación oral.
- ✓ Averiguar la tarifa y la compañía de móviles que más les convenía.

En el cuestionario también se les preguntaba por los temas que les hubieran gustado trabajar en las prácticas y las respuestas fueron muy variadas:

- ⇒ La moda.
- ⇒ Las nuevas tecnologías.
- ⇒ Coste de producción de empresas.
- ⇒ Comparativa de precios de mercado.
- ⇒ El fútbol.
- ⇒ Economía (ofertas, rebajas, descuentos,...).

Toda esta información, nos indica que las prácticas de modelización tuvieron una buena acogida entre el alumnado y les proporcionó una nueva herramienta de trabajo, las matemáticas, para aplicar en su vida diaria.

4.- Conclusiones

Como comentario general nos gustaría señalar que esta experiencia ha resultado motivadora y creativa para los estudiantes y gratificante para nosotros, pues hemos visto en ellos un grado de interés que no habían mostrado hasta ahora por la asignatura. También se han creado interrelaciones entre las diferentes asignaturas que estudian, como informática y biología.

Al analizar el trabajo realizado y los resultados obtenidos, llegamos a las siguientes conclusiones:

- i. La mayoría de las herramientas diseñadas, las sesiones establecidas y los materiales de evaluación utilizados, se han mostrado en general útiles para un investigación futura

- más exhaustiva, que incluya un número mayor de estudiantes y profesores participantes.
- ii. Las prácticas de modelización en Secundaria, requieren de **un seguimiento exhaustivo** del trabajo de los alumnos realizado semanalmente. Puesto que, aunque estamos hablando de estudiantes de cuarto de la ESO, son adolescentes que todavía no tienen la autonomía suficiente, ni hábitos adquiridos en trabajos cooperativos. Por este motivo tenemos que orientarlos y ayudarlos en todo lo necesario para el desarrollo de estas habilidades. La modelización es una de las herramientas, a través de la cual, se fomenta la adquisición de dichas habilidades.
 - iii. Este trabajo ha sido **motivador y creativo** para los estudiantes, puesto que han abandonado su rutina diaria en las clases de matemáticas y han explorado un terreno desconocido, las matemáticas dentro de su vida diaria.
 - iv. Los alumnos dejan de ver las matemáticas como una simple herramienta de trabajo aplicada a otras ciencias y comienzan a verla como un lenguaje que pueden utilizar en cualquier momento y situación de su vida diaria, pudiendo explicar fenómenos que ocurren a su alrededor. Las matemáticas se han convertido en una **actividad humana** como afirma Freudenthal. Se ha creado un **vínculo de unión** entre el mundo real y el mundo matemático.
 - v. Las prácticas de modelización crean **interrelaciones entre diferentes asignaturas**, se trabaja de manera horizontal.
 - vi. Todos los objetivos que los alumnos adquieren a través de la modelización están incluidos en los objetivos de área, expuestos en el Decreto 112/2007 [24]. Así pues, podemos considerar la modelización matemática como una **herramienta didáctica**
 - vii. La modelización matemática se puede considerar un **instrumento evaluador** de las competencias básicas.

Tras la observación de los trabajos presentados por nuestros estudiantes, tanto en la práctica de "*Tarifas de móviles*" como en "*El deporte de forma científica*", llegamos a las siguientes conclusiones:

- ⇒ Los alumnos son capaces de **trabajar de forma natural con funciones de variables sencillas**. Muestra de ello son los trabajos presentados de la práctica "*Tarifas de móviles*", donde evidentemente, no muestran la función que se ajusta a la nube de puntos que ellos han obtenido, pero sí un manejo de las tablas y análisis de resultados, no obstante, no hemos de olvidar que son alumnos de cuarto de la ESO.
- ⇒ A través de facturas reales de móviles, son capaces de **construir una tabla de valores** con entradas de **funciones multivariantes**. El problema real que se les presenta, ver el consumo mensual en diferentes compañías de móviles, es interesante para ellos y despierta sus ganas de saber.
- ⇒ No podemos afirmar a partir de la muestra analizada que los alumnos identifiquen a través de la modelización cuáles son las variables dependientes e independientes en cada problema de los presentados.
- ⇒ Los alumnos han aprendido a tener **iniciativas**. Esto se observa en los trabajos, en detalles como los comentados en el punto anterior o mediante la modificación de las prácticas, a favor de sus propias motivaciones e intereses.
- ⇒ Los trabajos en modelización muestran la **creatividad** de los alumnos, incorporando música, dibujos o incluso fotografías en las exposiciones orales.

Todas estas conclusiones han abierto nuestras expectativas al respecto de la implantación de la modelización en la Educación Secundaria Obligatoria. En la actualidad el equipo está preparando nuevas prácticas de modelización y sobre las ya existentes trabajando para que tengan un recorrido en toda la etapa educativa, de tal forma que de los cursos inferiores a los superiores, se puedan trabajar los contenidos a diferente nivel de complejidad. Además existe un interés fundamental en las herramientas diseñadas para estandarizar el material, a saber, las guías didácticas y los guiones de prácticas. Pensamos que estas dos piezas son calves en uno de los objetivos a medio plazo del equipo; generar un material didáctico que cualquier profesor de matemáticas pueda implantar en el aula, realizando una actividad que se inscriba en la programación de la asignatura y, lo que es más importante, en las dinámicas de aula habituales sin que para ello se requieran ni de grandes medios ni de una preparación extraordinaria.

5.- Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado bajo el Proyecto de Innovación y Mejora Educativa "La modelización como herramienta didáctica motivadora en el ámbito de la ingeniería" referencia A006/10 financiado por el Vicerrectorado de Estudios y Convergencia Europea de la Universidad Politécnica de Valencia

6.- Referencias

- [1] PISA 2009 Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE. Informe español. Ministerio de Educación Gobiernos de España.
www.educacion.es/cesces/actualidad/pisa-2009-informe-espanol.pdf.
- [2] Barkley, E. F.; Cross, K. P.; Marín, J.; Major C. H. "Técnicas de aprendizaje colaborativo", Ed. Morata, Ministerio de Educación y Ciencia, 2007. ISBN: 978-84-7112-522-4.
- [3] Blum, W. "ICMI STUY 14; Applications And Modelling In Mathematics Education-Discussion Document", Education Studies in Mathematics, 51, pp. 149-171, 2002.
- [4] Sánchez, E. A.; García-Raffi, L. M.; Sánchez, J.V. "Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la Física y de las Matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas", Enseñanza de las Ciencias, 17(1), pp. 119-129, 1999.
- [5] Gómez, J. "Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les Matemàtiques a nivell universitari", Tesis Doctoral, 1998.
- [6] Gómez, J.; Fortuny, J. M. "Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 31, Ed.\ GRAO, pp. 7-23, julio 2002.
- [7] Montero, J. A. "Hacia una metodología docente basada en el aprendizaje activo del estudiante presencial de ingeniería, compatible con las exigencias del E.E.E.S.", Tesis Doctoral, 2008.
- [8] Azcárate, C.; Castelló, J. M.; Lladó, C. "El Grup Zero", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 55, Ed.\ GRAO, pp.16-26, julio 2010.
- [9] Borrás, E.; Martí, V. C. J. "El Grupo Cero", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 55, Ed.\ GRAO, pp.9-15, julio 2010.
- [10] Grup Vilatzara, "Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria", Números. Revista de didáctica de las matemáticas. Vol. 46, pp. 29-47, 2001.
- [11] Sol, M. "Projectes matemàtics a l'Educació Secundària Obligatoria", Tesis Doctoral, 2008.
- [12] Sol, M. "Proyectos Matemáticos en la ESO: cómo los evaluamos", UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. Num. 17, pp. 105-111, 1998.
- [13] Borrás, E.; Calixto, V. "El Grupo Cero", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,

Num. 55, Ed.\ GRAO, pp.9-15, julio 2010.

[14] M. Van Den HeuvelPanhuizen, "El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista, Correo del Maestro, Num. 160, septiembre 2009.

[15] Balbuena, L. "La Newton. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 55, Ed.\ GRAO, pp.27-36, julio 2010.

[16] Pérez, A.J. "Con la ilusión de los años. Movimientos de renovación en Andalucía", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 55, Ed.\ GRAO, pp.37-47, julio 2010.

[17] Aravena, M. "Evaluación de proyectos en ingeniería. Un estudio de caso basado en la modelización polinómica", Tesis doctoral no publicada, 2001.

[18] Albarracín, LL. "Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables", Tesis Doctoral, 2011.

[19] Romero, S.; Castro, F. "Modelización Matemática en secundaria desde el punto de vista superior: EL PROBLEMA DE DOBOGÓKÓ", Modelling in Science Education and Learning (MSEL), vol. 1, num. 2, 2008.

[20] Sierra, L. "La modelización matemática en cuarto de la ESO", Modelling in Science Education and Learning (MSEL), vol. 4, 2011, en imprenta.

[21] Maaß, K. "What are modelling competencies?", Z.M.D., Vol 38(2), 2006.

[22] Aravena, M.; Giménez, J. "Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 31, Ed.\ GRAO, pp.44-56, julio 2002.

[23] Gómez, J. "La Matemática: reflejo de la realidad", Ed.\ REDINED, 2008.

[24] Decreto 112/2007, del 20 julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, DOGV 5562 (24-07-07).

[25] García-Raffi, L.M.; Sánchez; E.A.; Sánchez, J.V., "Las prácticas de modelización físico-matemática: innovación universitaria desde el punto de vista internacional", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 31, Ed.\ GRAO, pp. 24-33, julio 2002.

[26] Gavilán, P., "Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y en una clase cooperativa. Una experiencia con estudiantes de tercero de ESO", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Num. 31, Ed.\ GRAO, pp. 34-43, julio 2002.