

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA II
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TREBALL DE RECERCA

ESTUDI DE LA TRANSFORMACIÓ
DE L'ESPAI DE COLOR **RGB**
A L'ESPAI DE COLOR **HSV**

24/03/2011

M. Àngela Grau Gotés,
Miquel Grau Sánchez,
Eduard Montseny,
Pilar Sobrevilla Frisón.

2 Mitjana i variància en la component tonalitat del color

Variància en la component tonalitat del color.

(Error Propagation Analysis due to Transform RGB Color Space in HSV Color Space).

¹M. Àngela Grau Gotés, ²Miquel Grau, ³Eduard Montseny, ⁴Pilar Sobrevilla.

¹Applied Mathematics II Department. Technical University of Catalonia. Barcelona. Spain. angela.grau@upc.edu

²Applied Mathematics II Department. Technical University of Catalonia. Barcelona, Spain. miquel.grau@upc.edu

³Applied Mathematics II Department. Technical University of Catalonia. Barcelona, Spain. Pilar.sobrevilla@upc.edu

⁴Computer Engineering and Industrial Systems Department. Technical University of Catalonia. Barcelona, Spain. montseny@esaii.upc.es

Abstract. S'apliquen les tècniques clàssiques de propagació de l'error a la transformació de l'espai de color RGB en l'espai de color HSV a un conjunt de 1098 imatges test. El conjunt d'imatges test són 183 paletes de color i sis nivells d'il·luminació diferents. Els resultats que es presenten indiquen com varien la mitjana i la variància per la transformació.

Agraïments

This work has been partially supported by the Spanish CICYT -TIN2007-68063 SISTEMA DE VISION POR COMPUTADOR PARA EL CRIBADO AUTOMATICO DE CITOLOGIAS CERVICO-VAGINALS BASADO EN SOFTCOMPUTING.

1. Introducció

La anàlisi i el processat d'imatges ha esdevingut una de les àrees més importants a estudiar. La representació de l'espai de color RGB en coordenades cilíndriques a l'espai 3D (color, saturació i lluentor/brillo), moltes vegades simplifica aquesta feina fent visibles característiques no visibles en la representació en coordenades rectangulars. Transformació que ha donat lloc a diverses variants, conegudes a la literatura com model HSV, model HSB, model HLS, model HSI, ... En la línia de la tesis doctoral de S. Romaní i els treballs de Allan Hanbury, aquest treball es dedica a obtenir fórmules per al càlcul dels descriptors estadístics mitjana i variància de la variable cromàtica tonalitat ("hue").

En primer lloc, secció 2, descriuré els espais de color en general, i en particular l'espai de color RGB, l'espai de color HSV i la transformació de RGB a HSV. A continuació, secció 3, faré un estudi de la propagació de l'error en la fórmula de la mitjana i la variància d'una mostra de valors i s'obtingrà diverses aproximacions de la mitjana i la variància de la component tonalitat en funció de les components RGB. Finalment, en la secció 4, presentem els resultats obtinguts segons les diferents aproximacions fetes i finalment en la secció 5 presentarem conclusions.

2. Teoria del color

La problemàtica del color i el seu estudi és molt amplia i pot ser estudiada des del camp de la física, la percepció fisiològica i psicològica, la significació cultural, l'art, la indústria, etc. Aquesta secció conté una introducció a les nocions més bàsiques sobre color i sobre color per a imatges en pantalles d'ordinadors.

2.1. Teoria del color

Des d'un punt de **vista tradicional** el coneixement que tenim i hem adquirit sobre el color a l'escola elemental, fa referència al color pigment i prové de les ensenyances de l'antiga Acadèmia Francesa de Pintura, que considerava com colors primaris al vermell, el groc i el blau. Aquesta classificació no és aleatòria; els pintors, en aquell temps, es feien ells mateixos les pintures i partien d'uns pigments recollits a la natura; bàsicament terres de colors i algun vegetal. Els tres colors esmentats són els que més joc donaven al pintor.

Des del punt de vista dels artistes de la pintura, del disseny gràfic, de la fotografia i de la televisions, la teoria del color és el grup de regles bàsiques de la barreja de colors per aconseguir l'efecte desitjat combinant colors de llum o pigments. La llum blanca es pot produir combinant el vermell, el verd i el blau, mentre que combinant pigments cian, magenta i groc es pot produir un color negre.

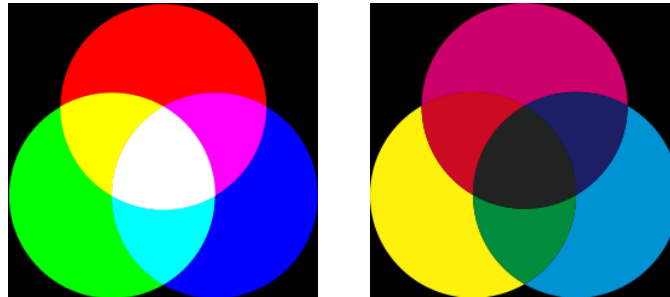


Fig. 1. Colors primaris. Observeu que els primaris llum són els secundaris pigment i que els primaris pigment són els secundaris llum.

En realitat es parla de dos sistemes de colors primaris:

Colors primaris llum, (mescla additiva), provinents de focus lluminosos com un monitor de TV. Els primaris són el vermell, el verd i el violet. Sumant-los hom n'obté el blanc per suma additiva. Model de color RGB.

Colors primaris pigment, (mescla subtractiva), provinents de la reflexió de les ones lluminoses damunt dels objectes. Els primaris són el groc, el magenta i el cian. Combinant-los hom n'obté negre per suma subtractiva. Model de color CMY(K), usat sobretot en impressió.

El cercle cromàtic. S'anomena cercle cromàtic a l'esquema que resulta de repartir en un al voltant d'un cercle els colors que formen el segment de llum visible de

6 Mitjana i variància en la component tonalitat del color

l'espectre solar, mantenint l'ordre espectral correlatiu (segons la longitud d'ona): vermell, taronja, groc, verd, blau i lila. Tradicionalment els colors s'han representat en una roda de 12 colors: tres colors primaris, tres colors secundaris (creats amb la barreja de dos primaris), y sis colors terciaris (barreja de colors primaris i secundaris). Els artistes fan ús d'un cercle cromàtic recolzat en el model RYB (vermell, groc i blau) i com a colors secundaris taronja, verd i lila. Per als colors de la pantalla d'un ordinador, es fa servir la roda RGB; aquesta conté el model CMY ja que el cian, el magenta i el groc són colors secundaris del vermell, el verd i el blau, i al mateix temps, aquests són els colors secundaris en el model CMY. En la roda RGB/CMY, el taronja és un color terciari entre el vermell i el groc, el lila és un terciari entre el magenta i el blau.

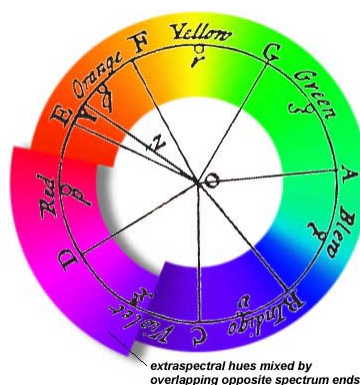


Fig. 2. Cercle cromàtic de Newton (1704). The original "color circle" superimposed on the spectral and extra spectral hues; capital letters refer to notes of the diatonic scale.

El primer cercle cromàtic el va proposar Newton (1704), refractant llum blanca a través d'un prisma de cristall, va aconseguir els diferents colors de l'espectre visible, va distribuir els colors en un diagrama conegut com a disc de Newton. El disc de color de Munsell (1905) és un pas endavant respecte el disc de Newton, en què a més classifica els colors a partir de les propietats de matís, lluminositat i saturació.

Atributs del color. Tots els colors que veiem tenen tres atributs bàsics:

Tonalitat: o "to" o "matís" o "croma", és el color, és l'atribut que ens permet diferenciar a un color d'un altre, per la qual cosa podem designar quan un matís és verd, violeta o ataronjat. Longitud d'ona, color pròpiament dit.

Intensitat/lluminositat: "lightness" o "claredat", o "intensity". Atribut de la sensació visual segons el qual una superfície determinada sembla emetre més o menys llum. És la intensitat lumínica d'un color (claredat/foscor). És la major o menor proximitat al blanc o al negre d'un color determinat. Sovint donem el nom de vermell clar a aquell matís de vermell proper al blanc, o de vermell fosc quan el vermell s'acosta al negre. (intensitat lluminosa Quocient entre el flux lluminós emès per una font lluminosa, en un angle sòlid sobre una direcció determinada, i aquest angle sòlid).

Saturació: És el grau de puresa que té un color determinat respecte al gris. Es diu que un color té una saturació-alta quan suposa que apreciem el color en tota la seva puresa, vívid (Que és particularment intens i brillant. Els vívids colors de l'arc de Sant Martí.), net d'interferències, per exemple: vermell, blau-pur, groc, verd... En canvi, diem que un color té una menor saturació o saturació-baixa quan indica que el color s'ha

"embrutat" amb gris en certa mesura, resultant un matís més impur i apagat. Com més saturat, més viu, Com menys saturat, més pastís. Major o menor barreja de blanc.

2.2. La física del color

Des d'el punt de vista de la **física**, la llum és una ona electromagnètica. El color és la sensació causada per la llum quan aquesta interactua amb l'ull, el cervell i la nostra experiència (HVS). La percepció del color es veu altament influenciada per els colors adjacents en l'escena visual. Una superfície que reflexa difusament la llum de totes les longituds d'ona per igual és percebuda com a blanca, mentre que una superfície que absorbeix totes les longituds d'ona i no en reflexa cap ho serà com a negra. L'espectre de l'arc de Sant Martí conté tots aquells colors que consisteixen en llum visible de sols una longitud d'ona, l'espectre pur o colors monocromàtics.

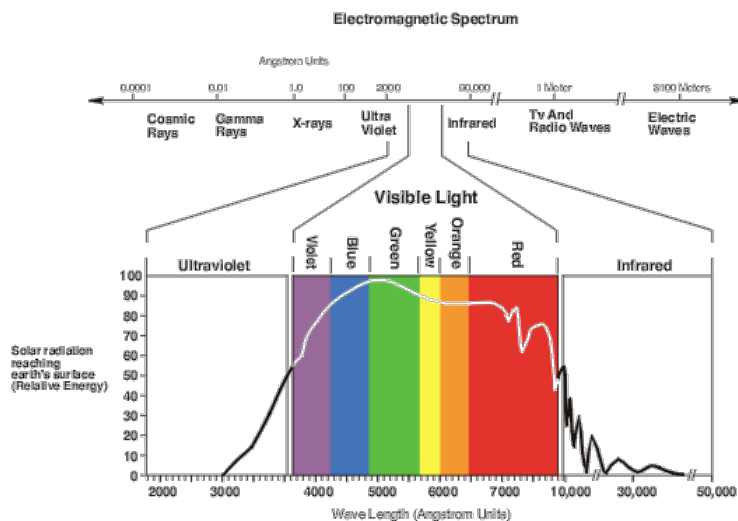


Fig. 3. Espectre electromagnètic i espectre visible

L'espectre electromagnètic (Fig. 3) és el conjunt de totes les freqüències de vibració de les ones electromagnètiques, la llum visible és una part d'aquest espectre. Els colors visibles per l'ull humà s'agrupen en l'espectre visible, es corresponen a radiacions amb una longitud d'ona compresa entre de 380 nm a 830 nm (aproximadament). Hi ha més diversitat espectral que sensacions de color. De fet hom pot definir un color com el conjunt de tots els espectres que ens proporcionen la mateixa sensació de color. La llum monocromàtica és la que consta de una única freqüència; no té barreja de diverses freqüències. És el cas de la llum làser. Colors com el marró no existeixen com a freqüències pures, però sí com a barreja d'elles. És possible, però, simular colors generats per freqüències pures utilitzant mesclades d'altres freqüències.

8 Mitjana i variància en la component tonalitat del color

Una taula de color (una representació dels colors), no s'ha d'interpretar com a una llista definitiva, l'espectre pur dels colors és continu i el fet de partir-lo en diferents colors depèn de la cultura i dels gustos.

2.3. La percepció del color dels humans

En un nivell **fisiològic** percebem els diferents colors gracies a l'expressió de tres gens diferents en las cèl·lules de la retina conegudes com a cons. Cada un d'aquests gens codifica una proteïna receptiva (en combinació amb altres substàncies) a una freqüència diferent. Cada tipus de con expressa solament un dels tres gens. A la retina de l'ull humà hi ha milions d'aquestes cèl·lules, recullen part de l'espectre de la llum solar i el transformen en impulsos elèctrics, enviats al cervell per mitjà del nervi òptic, i és aquest l'encarregat de crear la sensació de color. Els nostres ulls tenen dos tipus de cèl·lules sensibles a la llum: els cons i els bastonets. Els cons són els encarregats d'aportar la informació del color. Els bastonets s'activen quan hi ha poca llum però no contribueixen en la sensació de color.

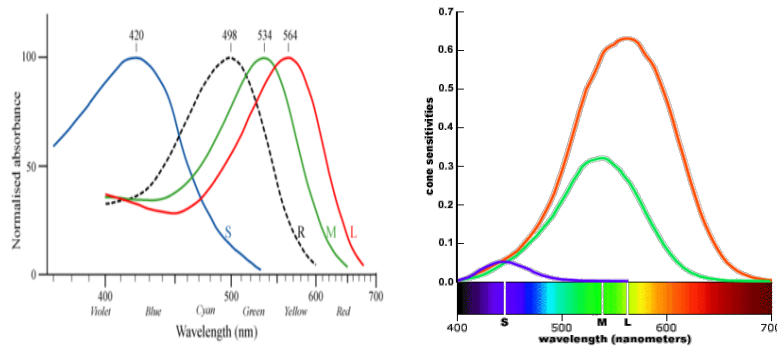


Fig. 4 a) Normalised absorption spectra of human cone (S,M,L) and rod (R) cells.
b) Nombre total de cons de la retina. Observeu la proporció entre L, M i S.

Existeixen tres tipus de cons amb respostes freqüencials diferents (Long, Medium, Small) tenen màxima sensibilitat amb els colors vermell, verd i blau, colors que formen la terna RGB. Mentre que els cons que reben informació del verd i el vermell tenen una corba de sensibilitat similar, la resposta al color blau és unes 20 vegades inferior, essent diferent el nombre total dedicat a un color o a un altre (vegeu Fig. 4). La sensació de color es pot definir com la resposta de cadascuna de les corbes de sensibilitat a l'espectre radiat per l'objecte observat. D'aquesta manera, obtenim tres respostes diferents, una per cada color. El fet de que la sensació de color s'obtingui d'aquesta manera, fa que dos objectes observats, amb diferent espectre radiat, puguin produir la mateixa sensació. Així doncs, el sistema d'identificació de colors depèn del cervell i del sistema ocular de cada persona en concret, per tant podem mesurar amb tota exactitud la longitud d'ona d'un color determinat, però el concepte del color produït per aquesta persona és totalment subjectiu, depenen de la persona en sí. Dues persones diferents poden interpretar un color donat de forma diferent, i pot haver-hi tantes interpretacions d'un color com persones hi ha. I en aquesta limitació de la visió

humana es basa el model de síntesi del color, mitjançant el qual podem obtenir a partir dels estímuls visuals estudiats i amb una barreja dels tres colors primaris, el color d'un objecte amb un espectre determinat.

És la teoria tricromàtica (treballs de Maxwell, Young i Helmholtz), i es fonamenta en l'existència dels tres tipus de fotoreceptors de la retina, sensibles a diferents longituds d'ona de l'espectre visible:

1. sensibles a longituds d'ona llarga ("L") o sensibles al vermell,
2. sensibles a longituds d'ona mitja ("M") o sensibles al verd i
3. sensibles a longituds d'ona curta ("S") o sensibles al blau.

En resum, color és la manera en què el sistema visual humà (HVS) amida una part de l'espectre electromagnètic, aproximadament des de 300nm. fins a 830nm.

2.4. Sistemes de representació del color

Hom necessita estandarditzar el color per classificar objectes i reproduir el color. Un espai de color és una notació per la qual nosaltres podem especificar colors, i.e. la manera que representem l'espectre electromagnètic visible.

Un model de color es un model matemàtic abstracte que descriu la manera en que poden ser representats els colors. El rang de colors que poden reproduir-se amb un model de color s'anomena gama ("gamut" en anglès). Els espais de color més generals intenten descriure la més gran quantitat dels colors visibles a l'ull humà, però existeixen també espais que aïllen una part dels colors visibles. [Tkalcic] agrupa els sistemes de color en tres categories:

1. Espais que volen reproduir el sistema de visió humà. Entre aquests hi ha el model RGB i el model HSV.
2. Espais de color específics per a una aplicació. Per a la TV el model YUV i el model YIQ. Per a fotografies, Kodak PhotoYCC. Per a imprimir, mescla subtractiva i CMY(K).
3. Espais de color segons l'estàndard CIE. Al 1931, un grup internacional d'experts coneguts com la *Commission Internationale de l'Éclairage* va fer públic un model matemàtic de color que contenia els colors observables i va assignar una terna de tres nombres a cada color. Ho són el model CIE XYZ, el model CIELuv i el model CIELab.

A l'actualitat el procediment per mesurar el color es basa en sumar la resposta dels estímuls dels colors primaris i normalitzar-los segons la corba espectral de resposta del fotoreceptor sensible al color. Com a referència, es fa ús de la corba espectral codificada de la Comissió Internacional de Il·luminació (CIE), la anomenada funció colorimètrica. Cal recordar que el color és una característica subjectiva, només existeix a l'ull i en el cervell de l'observador humà, no és una característica pròpia de l'objecte.

2.4.1. Model estàndard de la CIE

Encara que uns quants colors es poden obtenir amb una sola longitud d'ona, la gran majoria de colors són el resultat d'una barreja de longituds d'ona. La organització francesa, *Commission Internationale de l'Éclairage* (CIE), va treballar en el desenvolupament d'un mètode per mesurar el color en funció de les longituds d'ona

d'aquest, es coneix com el model CIE. El model parteix de la percepció del color en els humans, (*tristimulus theory*). Els cons o fotoreceptors del color de la retina de l'ull humà responen de manera diferent a la llum visible; aquesta resposta diferencial dels cons es assignada a tres variables X, Y, i Z en aquest model. Aquest model 3-D permet obtenir "tots" els colors com a suma ponderada dels tres colors "primaris" virtuals A, B, i C. Un color real té components respecte els primaris:

$$X = \frac{A}{A+B+C} \quad Y = \frac{B}{A+B+C} \quad Z = \frac{C}{A+B+C} \quad (2.1)$$

$$X + Y + Z = 1$$

Com que $X + Y + Z = 1$, si coneixem x i y podem determinar z, llavors el model 3-D es projecta cap un pla per obtenir un gràfic 2-D. Les components X, Y i Z es projecten al pla xy (vegeu Fig. 5)

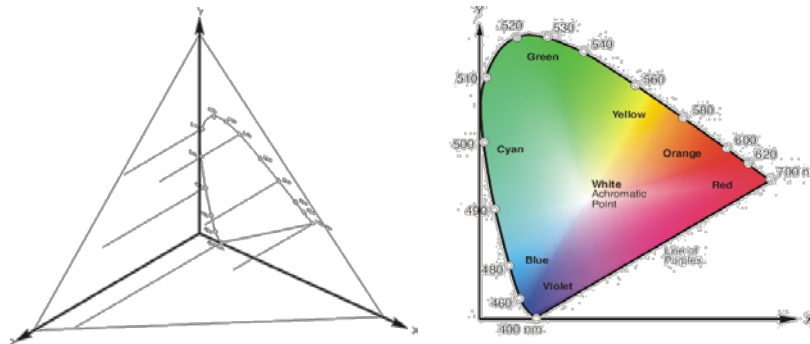


Fig. 5 Model CIE. a) projecció de les coordenades XYZ en el pla xy.
b) La corba exterior és l'espectre visible, la recta inferior uneix l'espectre.

En la figura 5 b), la bora del perímetre exterior són les longituds d'ona de l'espectre visible. És sobre aquesta bora que obtenim els colors espectrals purs, els altres colors s'obtenen barrejant quantitats variables d'ones de diferent longituds. Hom es serveix del model estàndard per especificar els rangs de colors que es poden produir per una font d'il·luminació en particular, aquest rang s'anomena gama. Aquest model s'ha actualitzat en el model CIELab, aquesta redefinició descriu els colors amb tres components: una luminància o lluentor (L) i dues components cromàtiques, una es mou del rang verd al vermell (a), l'altre del blau al groc (b).

Tot i la seva sòlida base científica, i que proporciona una manera molt precisa d'especificar el color, el sistema CIE no és fàcil de fer servir a la pràctica.

2.4.2. L'espai de color RGB

La descripció RGB (de l'anglès Red, Green, Blue) d'un color fa referència a la composició del color en termes de les intensitats dels colors primaris amb què es forma: del vermell, del verd i del blau. És un model de color basat en la síntesi additiva, amb el que és possible representar un color mitjançant la barreja per addició dels tres colors llum primaris. Indicar que el model de color RGB, no defineix per si mateix que significa exactament "vermell", "verd" o "blau", pel que els mateixos

valors RGB poden mostrar colors notablement diferents en diversos dispositius que emprin aquest model de color. Encara que utilitzin un mateix model de color, els seus espais de color poden variar considerablement.

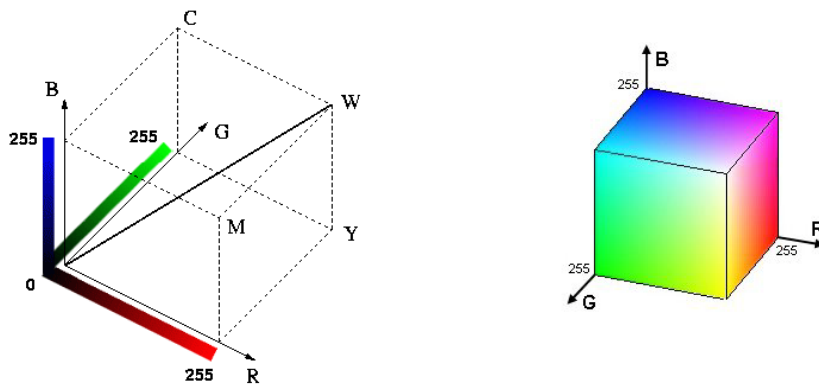


Fig. 6. Dues representacions del cub de l'espai de color RGB.

Per a indicar amb quina proporció barrejem cada color, s'assigna un valor a cadascun dels colors primaris de manera que el valor 0 significa que no intervé en la barreja. Com més gran sigui aquest valor s'entén que aporta més intensitat a la barreja. Encara que d'interval de valors podria ser qualsevol (valors reals entre 0 i 1, valors sencers entre 0 i 37, etc), és bastant freqüent que cada color primari es codifiqui amb un byte (8 bits). Així, d'una manera estàndard, la intensitat amb que lluu cada component es mesura segons una escala que va del 0 al 255. Per tant el vermell és (255, 0, 0), el verd és (0, 255, 0) i el blau (0, 0, 255). L'absència de color - el que impròpiament anomenem color negre - és (0, 0, 0). La combinació de dos colors a nivell 255 amb el tercer a nivell 0 dóna lloc a tres colors intermedis: el groc (255, 255, 0), el cian o l'aiguamarina (0, 255, 255) i el magenta (255, 0, 255). I el blanc, format pels tres colors primaris a nivell màxim, (255, 255, 255). Observeu la diagonal principal del cub RGB de la Fig. 6 representada com una recta des de l'origen negre al O fins al blanc a W. Aquesta línia representa els colors del cub RGB que tenen igual quantitat de vermell, de verd i de blau; és la escala de grisos, s'anomena també eix neutral.

El conjunt de tots els colors es pot representar en forma de cub; cada color és un punt de la superfície o de l'interior d'aquest. En aquest espai, els colors són vectors, i es poden combinar sumant i restant per obtenir els colors del cub.

Els espais de color RGB més usats són els espais sRGB i l'espai RGB de Adobe (amb una gama molt més ampla). Fins a dia d'avui, l'espai sRGB és de lluny l'espai RGB més usat, sobretot en càmeres digitals no professionals, l'espai RGB de Adobe s'està imposant en càmeres digitals professionals i en artistes gràfics per la seva gama més extensa. Els espais RGB normalment, es donen definint els tres colors primaris i el punt de blanc. Els colors primaris s'especifiquen en termes de les coordenades cromàtiques (x,y) a l'espai de color CIE 1931.

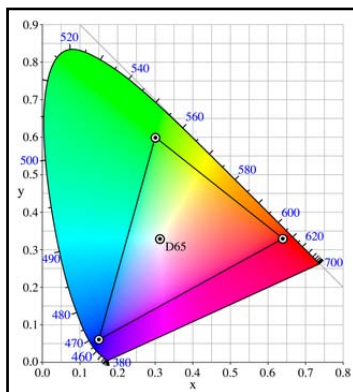


Fig. 7. Diagrama cromàtic xy del model CIE 1931.
El triangle interior és l'espai sRGB.

L'**espai de color sRGB**, o **estàndard RGB**, és un espai de color RGB creat juntament per Hewlett-Packard i Microsoft Corporation. El van acceptar primerament W3C, Exif, Intel, Pantone i Corel entre altres indústries. Actualment també l'accepta el software lliure com GIMP, i s'usa en formats gràfics com el PNG. L'espai sRGB defineix el vermell, el verd i el blau com a primaris, amb un dels tres canals a valor màxim i els altres dos a zero. En les coordenades cromàtiques xy de l'espai de color CIE de 1931, el vermell és a $[x,y]=[0.6400, 0.3300]$, el verd a $[x,y]=[0.3000, 0.6000]$ i el blau a $[x,y]=[0.1500, 0.0600]$. El punt blanc és el punt blanc D65 situat en la coordenada $[x,y]=[0.3127,0.3290]$.

És important destacar que l'espai sRGB s'ha dissenyat per a coincidir amb la gama usada actualment pels monitors CRT. Gran part de programes d'ordinador accepten que una imatge de 8 bits en una pantalla amb un buffer de 8 bits per canal es veurà correctament. És per aquesta raó que acceptem que una imatge de 8 bits d'Internet és a l'espai de color sRGB (en absència perfil de color inclòs a la imatge). Els dispositius no CRT, com pantalles LCD, càmeres digitals o impressores, encara que no produeixen una corba sRGB, estan construïts amb sistemes de circuits o programes de compensació que finalment obeeixen aquest estàndard (no passa el mateix en equips professionals). Així, qualsevol imatge que trobem a la xarxa amb 8 bits per canal té gama sRGB. Aquest espai de color el critiquen els professionals de l'edició per la seva gama limitada, alguns colors visibles, reproduïbles en CMYK, no es poden representar en sRGB; es prefereix com estàndard l'espai RGB de Adobe.

2.4.3. L'espai de color HSV

Els models RGB i CIE són tècnics i no es corresponen a la manera usual en què un artista pensa en colors. L'any 1978 A. R. Smith, en el seu paper "Color gamut transform pairs" proposa "the hexcone model" (six-sided pyramid turned upside down) com a model més convenient per un artista que el cub RGB. En aquest model les nocions usuals de hue, saturació i valor són les tres dimensions del color. Breument, *hue* és la quantitat de color; *saturació* mesura el hue començant des del

blanc; i *valor* mesura el hue començant des del negre. Aquests conceptes intenten copsar el conceptes artístics de color (*hue*), matis (*tint*), ombra (*shade*) i tonalitat (*tone*). Copiant com l'artista barreja pintures a la seva paleta: primer tria un pigment de color (*hue*), i l'il·lumina afegint blanc (*tint*) i l'enfosqueix per una ombra amb negre (*shade*), o en general obté una tonalitat (*tone*) del pigment de color afegint un gris (barreja de blanc i negre), s'ha creat un color seguint el model del "hexcon". Les dimensions en aquest espai són (*H,S,V*) anomenades *hue*, *saturació* i *valor*. Variar *H* es correspon a travessar el cercle de color, decreixer *S* es correspon a augmentar la blancor, i decreixer *V* es correspon a augmentar la foscor. Aquesta és la més simple de les interpretacions de les components HSV. Observeu les imatges de la Fig. 8, és una representació gràfica d'aquest espai de color.

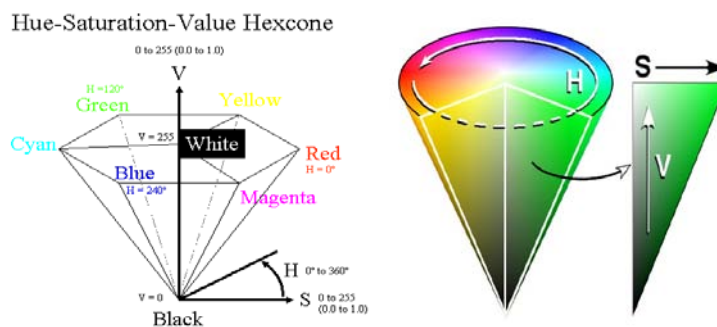


Fig. 8 a) "The hexcone model" de A. R. Smith.
b) El con de l'espai de color HSV.

El model HSV (en anglès Hue, Saturation, Value; en català Tonalitat, Saturació, Valor), anomenat també HSB (Hue, Saturation, Brightness; en català Tonalitat, Saturació, Lluentor), defineix un model de color en funció de les components que el formen i en coordenades cilíndriques:

- Tonalitat, el tipus de color (vermell, blau o groc). Es representa com un angle amb valors possibles des de 0 a 360° (encara que de vegades es normalitza del 0% al 100%).
- Saturació. Es representa com la distància a l'eix de lluentor negre-blanc. Amb valors possibles del 0% al 100%. També s'anomena "puresa". A menys saturació d'un color, més tonalitat gris tindrà i més decolorat serà. Per aquesta raó es defineix la insaturació com la inversa qualitativa de la saturació.
- Valor del color, la lluentor del color. Representa l'alçada en l'eix blanc-negre. Els valors possibles van del 0% al 100%.

La representació gràfica de l'espai RGB és un cub. Una representació de l'espai HSV s'obté afegint una tercera dimensió al cercle cromàtic. L'eix vertical ens dona el valor, mentre que el radi quantifica saturació. Tots els colors són negres si tenen valor 0, per aquesta raó es representa per un con en lloc d'un cilindre. Els colors de l'aresta del con són els colors completament saturats.

14 Mitjana i variància en la component tonalitat del color

A continuació detallarem la transformació de l'espai de color RGB en l'espai de color HSV, a més a més de l'algoritme, donarem també una descripció detallada de la geometria del model proposat per A. R. Smith (1978).

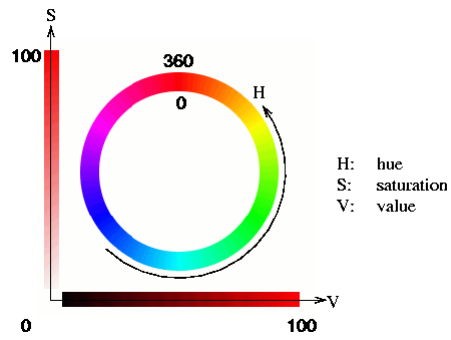


Fig. 9. Model HSV, tonalitat, saturació i valor.

3. De l'espai de color RGB a l'espai de color HSV

L'espai HSV és una transformació no lineal de l'espai del color RGB, essencialment és la transformació des d'un espai de coordenades rectangulars en un espai en coordenades cilíndriques. La idea de fons de la transformació és convertir la diagonal del cub, la recta des de $(0,0,0)$ fins $(1,1,1)=\max(R,G,B)$, en un dels eixos de l'espai, per a continuació donar els colors com coordenades cilíndriques en base a aquest eix.

L'algoritme de transformació de *RGB* a *HSV* proposat per A. R. Smith (1978) és:

Given: $R, G,$ and $B,$ each on domain $[0,1]$.

Desired: The equivalent H, S and $V,$ each on range $[0,1]$.

- 1) $V := \max(R, G, B);$
- 2) Let $X := \min(R, G, B);$
- 3) $S := (V-X)/V;$ if $S=0$ return;
- 4) Let $r := (V-R)/(V-X);$
 $g := (V-G)/(V-X);$
 $b := (V-B)/(V-X);$
- 5) If $R=V$ then $H := (\text{if } G=X \text{ then } 5+b \text{ else } 1-g);$
 If $G=V$ then $H := (\text{if } B=X \text{ then } 1+r \text{ else } 3-b);$
 else $H := (\text{if } R=X \text{ then } 3+g \text{ else } 5-r);$
- 6) $H := H/6;$

Per obtenir equacions per a la tonalitat, la saturació i el valor en funció de les components (R,G,B) cal escorxar aquest procedure en funció dels valors de (R,G,B) .

Taxonomia

Les components del color a l'espai HSV s'obtenen a partir de les components a l'espai RGB. Un eix es situa a la diagonal del cub RGB, entre $(0,0,0)$ i $(1,1,1)$; aquest eix passa per tots els punts acromàtics ($R=G=B$), s'anomena eix acromàtic o neutral. El valor (o *brightness*) és la coordenada d'un color en aquest eix, la tonalitat (o *hue*) es correspon a la coordenada angular i la saturació es correspon a la distància del color a l'eix cromàtic. En el model de A. V. Smith es calculen per:

- **Valor o component $V(R,G,B)$.** La component *valor* del color en coordenades HSV es correspon al màxim dels valors de vermell, de verd o de blau. És una variable cromàtica. De rang $[0, 255]$ o de rang $[0,1]$ en cas de normalització.

$$I(R, G, B) = \max(R, G, B)/255 \quad (3.1)$$

- **Saturació o component $S(R,G,B)$.** La component *saturació* del color en coordenades HSV es calcula per:

$$S(R, G, B) = \begin{cases} \frac{\max(R, G, B) - \min(R, G, B)}{\max(R, G, B)} & \text{si } \max(R, G, B) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \max(R, G, B) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La Saturació del color, és una variable cromàtica i de rang $[0,1]$.

- **Tonalitat o component $H(R,G,B)$.** La component Tonalitat (Hue), es defineix en funció del màxim i el mínim dels valors (R,G,B) del color. Aquesta variable és cromàtica, periòdica i de rang $[0,1]$. Es correspon a l'angle dins del cercle cromàtic de color.

Com calcula A. R. Smith la tonalitat? Després d'obtenir el valor i la saturació del color (R,G,B) , s'escalen les components (R,G,B) del color per obtenir les components normalitzades (r,g,b) .

Sigui $max_{RGB} = max(R,G,B)$ i $min_{RGB} = min(R,G,B)$, llavors:

$$H' = \begin{cases} no\ definit & si\ S = 0 \\ \frac{G - B}{max_{RGB} - min_{RGB}} & si\ R = max_{RGB} \\ 2 + \frac{B - R}{max_{RGB} - min_{RGB}} & si\ G = max_{RGB} \\ 4 + \frac{R - G}{max_{RGB} - min_{RGB}} & si\ B = max_{RGB} \end{cases} \quad (3.3)$$

H es pot convertir en graus multiplicant per 60, dividint per 6 la tonalitat pren valors entre 0 i 1; multiplicant per 255 la tonalitat pren valors entre 0 i 255. En aquest punt cal notar que la tonalitat és **circular**, i pertant té una singularitat doncs cal correspondre 0° amb 2π , o el que és el mateix 0 i 1 (o 255). Això comporta grans dificultats en qualsevol operació aritmètica en aquest espai. En tots els casos si $S=0$ la tonalitat no té valor, estem sobre l'eix neutral o eix gris.

Taula 3.1. Regions del domini del cub RGB .

<i>Nom</i>	<i>Regió</i>	<i>Interior</i>	<i>Cara</i>	<i>Cara</i>	<i>Cara</i>	<i>Cara</i>
(1)	$R \geq B \geq G$	$R > B > G$	$R=B$	$B=G$	$G=0$	$R=255$
(2)	$R \geq G \geq B$	$R > G > B$	$R=G$	$G=B$	$B=0$	$R=255$
(3)	$G \geq R \geq B$	$G > R > B$	$G=R$	$R=B$	$B=0$	$G=255$
(4)	$G \geq B \geq R$	$G > B > R$	$G=B$	$B=R$	$R=0$	$G=255$
(5)	$B \geq G \geq R$	$B > G > R$	$B=G$	$G=R$	$R=0$	$B=255$
(6)	$B \geq R \geq G$	$B > R > G$	$B=R$	$R=G$	$G=0$	$B=255$
<i>eix</i>	$B=R=G$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

3.1. Fragmentació del domini RGB

Per tal d'explicitar expressions per a les components normalitzades (r,g,b) ens cal distingir regions dins del cub de color RGB segons en quina component de la terna

(R,G,B) recaigui el màxim i en quina component recaigui el mínim. Es corresponen a les regions detallades a la taula 3.1. Notem que les possibilitats són:

- Si $R \neq G \neq B$, totes les components del color la terna (R,G,B) diferents. Són $R > B > G$, $R > G > B$, $G > R > B$, $G > B > R$, $B > G > R$ i $B > R > G$.
- Si $R = G = B$, totes les components de la terna (R,G,B) iguals. En aquest cas no hi ha color, som a l'eix del gris, també anomenat eix neutral.
- Tenim tres possibilitats $R = G \neq B$, $R = B \neq G$ i $G = B \neq R$, es a dir dues components de la terna (R,G,B) iguals i l'altre no.

Geomètricament, dins del cub RGB, una relació del tipus $R \geq G \geq B$ és la regió de l'espai delimitada per la intersecció dels plans $R = G$, $G = B$ i $R = B$ complint $R > G > B$, amb $0 \leq R \leq 255$, $0 \leq G \leq 255$, i $0 \leq B \leq 255$, un tetraedre amb cares. Vegeu les figures següents. Notarem per (1), (2), (3), (4), (5) i (6) les diferents regions tetraèdriques. El color assignat a cada cara (triangle) es correspon amb el color que representa en coordenades RGB el vèrtex del triangle diferent del blanc i del negre.

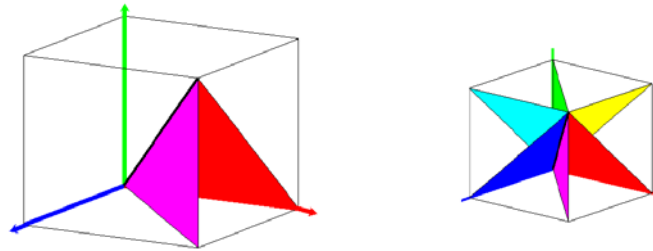


Fig. 10 a). Tetraedre del cub de l'espai de color RGB definit per $R = \max(R,G,B)$ i $\min(R,G,B) = B$, $R = 255$ i $G = 0$. **b)** Fragmentació de l'espai RGB en sis regions..

Una opció de visualització 2-D de la fragmentació del cub color s'obté en col·lapsar l'eix de gris en un punt; matemàticament es correspon a projectar la figura per la diagonal principal (l'eix neutral o gris) sobre un pla perpendicular a aquesta diagonal. L'objecte 2-D resultant és un hexàgon i el seu interior (projecció zenital).

3.2. Les components normalitzades del color (r,g,b)

Les expressions resultants per a (r,g,b) en aplicar la transformació d'en A. R. Smith es recullen a la taula 3.2. Notem \max_{RGB} per $\max(R,G,B)$, \min_{RGB} per $\min(R,G,B)$ i med_{RGB} per $mediana(R,G,B)$; llavors la terna de valors (r,g,b) sempre té un 0 en el màxim, un 1 en el mínim, i un valor entre 0 i 1 a la mediana per a la regió interior dels sis tetraedres, o bé 0 o bé 1 quan estem en una cara. Aquestes components no tenen valor definit a l'eix del gris.

Una petita comprovació de continuïtat dóna validesa a la transformació. Geomètricament, la superfície intersecció de la regió (1) i la regió (2) és el pla $G = B$ dins del cub de color, es correspon a una cara, la cara que comparteixen els tetraedres (1) i (2). El màxim en aquestes dues regions es manté constant i val R , llavors la component normalitzada r val 0 a les dues regions. A la regió (1) el mínim és B , llavors la component normalitzada b_1 val 1 i $g_1 = (R-B)/(R-G)$, a la regió (2) el mínim

és G , llavors la component normalitzada g_2 val 1 i $b_2 = (R-G)/(R-B)$, observem que es compleix $\lim_{B \rightarrow G} g_1 = 1 = g_2$ i $\lim_{G \rightarrow B} b_2 = 1 = b_1$, pertant els valors (r, g, b) canvien amb continuïtat. El mateix raonament és vàlid per a la resta d'interseccions. Es fa ús del símbol \updownarrow per indicar la transició per una cara, o intersecció de dues regions consecutives $(i) \cap (i+1)$ amb $i=1 \div 6$, es sobreentén que per $i=6$, $i+1 \equiv 1$ ja que la regió contigua a la regió (6) és la regió (1).

Taula 3.2. Valors de les variables r , g i b de la transformació de Smith. L'input $max = \max(R, G, B)$, $min = \min(R, G, B)$ i $med = \text{mediana}(R, G, B)$.

Nom	Regió	max	med	min	r	g	b
eix	$R=G=B$	R	R	R	\emptyset	\emptyset	\emptyset
(1)	$R \geq B \geq G$	R	B	G	0	1	$\frac{R-B}{R-G}$
(1)∩(2)	$B=G$	R	\updownarrow	G	0	1	1
(2)	$R \geq G \geq B$	R	G	B	0	$\frac{R-G}{R-B}$	1
(2)∩(3)	$R=G$	\updownarrow	G	B	0	0	1
(3)	$G \geq R \geq B$	G	R	B	$\frac{G-R}{G-B}$	0	1
(3)∩(4)	$R=B$	G	R	\updownarrow	1	0	1
(4)	$G \geq B \geq R$	G	B	R	1	0	$\frac{G-B}{G-R}$
(4)∩(5)	$G=B$	B	\updownarrow	R	1	0	0
(5)	$B \geq G \geq R$	B	G	R	1	$\frac{B-G}{B-R}$	0
(5)∩(6)	$R=G$	B	G	\updownarrow	1	1	0
(6)	$B \geq R \geq G$	B	R	G	$\frac{B-R}{B-G}$	1	0
(1)∩(6)	$B=R$	\updownarrow	R	G	0	1	0
(1)	$R \geq B \geq G$	R	B	G	0	1	$\frac{R-B}{R-G}$

3.3. Equacions de la transformació

A cada una de les sis regions els valors max_{RGB} , min_{RGB} i med_{RGB} són constants, per tant ja podem assignar un valor a la tonalitat o component $H(R, G, B)$ de l'espai HSV en cada una d'aquestes regions amb l'algorisme de A. R. Smith. Si $V = max(R, G, B)$ i $X = min(R, G, B)$, els valors de la tonalitat es calculen per:

$$\begin{aligned}
 &\text{If } R=V \text{ then } H := (\text{if } G=X \text{ then } 5+b \text{ else } 1-g); \\
 &\text{If } G=V \text{ then } H := (\text{if } B=X \text{ then } 1+r \text{ else } 3-b); \\
 &\text{else } H := (\text{if } R=X \text{ then } 3+g \text{ else } 5-r);
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$H: = H/6.$

Les expressions de $H(R,G,B)$ en funció de max_{RGB} , i min_{RGB} es donen amb tota la seva extensió en la taula 3.3. Com a la taula anterior, es fa ús del símbol \updownarrow per indicar la transició per una cara, intersecció de dues regions $(i) \cap (i+1)$ amb $i=1 \div 6$.

Taula 3.3. Expressions de les components tonalitat, saturació i lluentor seguint la fragmentació del cub RGB en tetraedres.

Nom	Regió	max	med	min	$H(R,G,B)$	$S(R,G,B)$	$V(R,G,B)$
eix	$R=G=B$	R	R	R	\emptyset	0	R
(1)	$R>B>G$	R	B	G	$\frac{5}{6} + \frac{R-B}{6(R-G)}$	$\frac{R-G}{R}$	R
(1) \cap (2)	$B=G$	R	\updownarrow	G	0=1	\updownarrow	R
(2)	$R>G>B$	R	G	B	$\frac{1}{6} - \frac{R-G}{6(R-B)}$	$\frac{R-B}{R}$	R
(2) \cap (3)	$R=G$	\updownarrow	G	B	$\frac{1}{6}$	\updownarrow	\updownarrow
(1)	$G>R>B$	G	R	B	$\frac{1}{6} + \frac{G-R}{6(G-B)}$	$\frac{G-B}{G}$	G
(3) \cap (4)	$R=B$	G	R	\updownarrow	$\frac{2}{6}$	\updownarrow	G
(4)	$G>B>R$	G	B	R	$\frac{1}{2} - \frac{G-B}{6(G-R)}$	$\frac{G-R}{G}$	G
(4) \cap (5)	$B=G$	B	\updownarrow	R	$\frac{3}{6}$	\updownarrow	\updownarrow
(5)	$B>G>R$	B	G	R	$\frac{1}{2} + \frac{B-G}{6(B-R)}$	$\frac{B-R}{B}$	B
(5) \cap (6)	$R=G$	B	G	\updownarrow	$\frac{4}{6}$	\updownarrow	B
(6)	$B>R>G$	B	R	G	$\frac{5}{6} - \frac{R-B}{6(G-B)}$	$\frac{B-G}{B}$	B
(6) \cap (1)	$R=B$	\updownarrow	R	G	$\frac{5}{6}$	\updownarrow	\updownarrow
(k)	$max < med < min$	max	med	min	$C + \frac{max - med}{6(max - min)}$	$\frac{max - min}{max}$	max

3.4. La continuïtat de la transformació

A la taula 3.3 hi ha explicitats els valors de les components tonalitat, saturació i lluentor seguint la fragmentació del cub RGB en regions tetraèdriques. En cada regió interior hi ha una expressió diferent per aquestes components. De cara a un estudi de

propagació d'error ens cal verificar/comprovar la continuïtat de la transformació. Aquest estudi s'ha de fer per a cada una de les regions, distingirem entre l'interior de les regions i la frontera de les mateixes (cares). Per aquesta raó en la taula 3.3 hi ha explicitat també els valors de les components del color HSV en les cares dels tetraedres, que es corresponen a intersecció de regions consecutives. Els càlculs són de càlcul elemental, però hem de introduir notacions per fer totes les comprovacions. Per $H(R,G,B)$ notarem la component tonalitat, per $H_i(R,G,B)$ amb $i=1\div6$ la tonalitat a la regió (i). De manera semblant per $S(R,G,B)$ notarem la component saturació, per $S_i(R,G,B)$ amb $i=1\div6$ la saturació a la regió (i) i per $V(R,G,B)$ notarem la component valor, per $V_i(R,G,B)$ amb $i=1\div6$ el valor a la regió (i).

Teorema 1 La transformació de l'espai de color de coordenades (R,G,B) a l'espai de color de coordenades (H,S,V) és contínua en tots els seus punts (model de Smith).

Demostració. Per a cada regió ($i=1\div6$) i per cada punt (R_0,G_0,B_0) de l'interior de la regió (regió definida per desigualtats estrictes) és compleix:

$$\begin{aligned} \lim_{(R,G,B)\rightarrow(R_0,G_0,B_0)} H_i(R,G,B) &= H_i(R_0,G_0,B_0) \\ \lim_{(R,G,B)\rightarrow(R_0,G_0,B_0)} S_i(R,G,B) &= S_i(R_0,G_0,B_0) \\ \lim_{(R,G,B)\rightarrow(R_0,G_0,B_0)} V_i(R,G,B) &= V_i(R_0,G_0,B_0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Per a cada regió ($i=1\div6$) i per cada punt (R_0,G_0,B_0) de la intersecció de dues regions (en una cara) és compleix:

1. Les dues funcions definides sobre un mateix punt (R_0,G_0,B_0) d'una cara coincideixen de valor.

$$\begin{aligned} H_i(R_0,G_0,B_0) &= H_{i+1}(R_0,G_0,B_0) \\ S_i(R_0,G_0,B_0) &= S_{i+1}(R_0,G_0,B_0) \\ V_i(R_0,G_0,B_0) &= V_{i+1}(R_0,G_0,B_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

2. Les funcions són contínues en els punts (R_0,G_0,B_0) d'una cara.

$$\begin{aligned} \lim_{(R,G,B)\rightarrow(R_0,G_0,B_0)} H_i(R,G,B) &= H_i(R_0,G_0,B_0) \\ \lim_{(R,G,B)\rightarrow(R_0,G_0,B_0)} S_i(R,G,B) &= S_i(R_0,G_0,B_0) \\ \lim_{(R,G,B)\rightarrow(R_0,G_0,B_0)} V_i(R,G,B) &= V_i(R_0,G_0,B_0) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tots els casos queden reflectits a la taula 3.3. ♦

3.5. La derivabilitat de la transformació

La continuïtat de la transformació entre dos espais de color en un estudi de propagació de l'error només permet fer aproximacions per constats. Per a una aproximació lineal necessitem que la transformació sigui diferenciable amb

continuitat; per una aproximació quadràtica ens cal que la transformació sigui dues vegades diferenciable amb continuïtat.

A les taules 3.4, 3.5 i 3.6 hi ha explicats els valors del vector gradient de les components tonalitat, saturació i valor seguint la fragmentació del cub RGB en regions tetraèdriques; com en el cas anterior hi ha explicat també els valors en les cares dels tetraedres, que es corresponen a les fronteres/intersecció de les regions.

Teorema 2 El vector gradient de la component *Valor* de la transformació de l'espai de color RGB en l'espai de color HSV és constant, contínua en tots els punts de la regió interior de cada una de les sis regions tetraèdriques (model de A. R. Smith).

Taula 3.4. Vector gradient de $V(R,G,B)$ de la transformació de Smith.

<i>Tetraedre</i>	<i>interior</i>	$\frac{\partial V}{\partial R}(R,G,B)$	$\frac{\partial V}{\partial G}(R,G,B)$	$\frac{\partial V}{\partial B}(R,G,B)$
(1)	$R > B > G$	1	0	0
(2)	$R > G > B$	1	0	0
(3)	$G > R > B$	0	1	0
(4)	$G > B > R$	0	1	0
(5)	$B > G > R$	0	0	1
(6)	$B > R > G$	0	0	1

Demostració. Per a cada regió ($i=1 \div 6$) i per cada punt (R_0, G_0, B_0) de l'interior de la regió (regió definida per desigualtats estrictes) és compleix:

$$\lim_{(R,G,B) \rightarrow (R_0, G_0, B_0)} \vec{\nabla} V(R,G,B) = \vec{\nabla} V(R_0, G_0, B_0) \quad (3.8)$$

Per a cada punt (R_0, G_0, B_0) de la intersecció de les regions (1) \cap (2), (3) \cap (4) i (5) \cap (6) és compleix també l'equació (8).

Per tant en tot (R_0, G_0, B_0) de l'interior de les regions (1), (2), (3), (4), (5) i (6) i en tot punt de la intersecció de les regions (1) \cap (2), (3) \cap (4) i (5) \cap (6) el vector gradient és una funció contínua. En cap punt (R_0, G_0, B_0) de la intersecció de les regions (2) \cap (3), (4) \cap (5) i (6) \cap (1) tenim continuïtat del vector gradient. ♦

Teorema 3 El vector gradient de la component *Saturació* de la transformació de l'espai de color RGB en l'espai de color HSV és contínua en tots els punts de la regió interior de cada una de les sis regions tetraèdriques (model de A. R. Smith).

Demostració. (Veure taula 3.5). Per a cada regió ($i=1 \div 6$) i per cada punt (R_0, G_0, B_0) de l'interior de la regió (regió definida per desigualtats estrictes) és compleix:

$$\lim_{(R,G,B) \rightarrow (R_0, G_0, B_0)} \vec{\nabla} S(R,G,B) = \vec{\nabla} S(R_0, G_0, B_0) \quad (3.9)$$

Per tant en tot (R_0, G_0, B_0) de l'interior de les regions (1), (2), (3), (4), (5) i (6) el vector gradient és una funció contínua. En cap punt (R_0, G_0, B_0) de la intersecció de les regions tenim continuïtat del vector gradient, només hi ha una component contínua. ♦

Taula 3.5. Vector gradient de $S(R, G, B)$ de la transformació de Smith.

La notació \updownarrow indica continuïtat, \times indica perdua de continuïtat.

Nom	Regió	$\frac{\partial S}{\partial R}(R, G, B)$	$\frac{\partial S}{\partial G}(R, G, B)$	$\frac{\partial S}{\partial B}(R, G, B)$
<i>eix</i>	$R=G=B$	0	0	0
(1)	$R>B>G$	$\frac{G}{R^2}$	$-\frac{1}{R}$	0
(1) \cap (2)	$B=G$	\updownarrow	\times	\times
(2)	$R>G>B$	$\frac{B}{R^2}$	0	$-\frac{1}{R}$
(2) \cap (3)	$R=G$	\times	\times	\updownarrow
(3)	$G>R>B$	0	$\frac{B}{G^2}$	$-\frac{1}{G}$
(3) \cap (4)	$R=B$	\times	\updownarrow	\times
(4)	$G>B>R$	$-\frac{1}{G}$	$\frac{R}{G^2}$	$\frac{R}{B^2}$
(4) \cap (5)	$B=G$	\updownarrow	\times	\times
(5)	$B>G>R$	$-\frac{1}{B}$	0	$\frac{R}{B^2}$
(5) \cap (6)	$R=G$	\times	\times	\updownarrow
(6)	$B>R>G$	0	$-\frac{1}{B}$	$\frac{G}{B^2}$
(6) \cap (1)	$R=B$	\times	\updownarrow	\times

Teorema 4 El vector gradient de la component *Tonalitat* de la transformació de l'espai de color RGB en l'espai de color HSV és una funció contínua (model de Smith).

Demostració. (Veure taula 3.6). Per a cada regió ($i=1\div 6$) i per cada punt (R_0, G_0, B_0) de l'interior de la regió (regió definida per desigualtats estrictes) és compleix:

$$\lim_{(R,G,B) \rightarrow (R_0, G_0, B_0)} \vec{\nabla} H(R, G, B) = \vec{\nabla} H(R_0, G_0, B_0) \quad (3.10)$$

Per a cada regió ($i=1\div 6$) i per cada punt (R_0, G_0, B_0) de la intersecció de dues regions (en una cara) és compleix:

$$\lim_{(R,G,B) \rightarrow (R_0, G_0, B_0)} \vec{\nabla} H_i(R, G, B) = \lim_{(R,G,B) \rightarrow (R_0, G_0, B_0)} \vec{\nabla} H_{i+1}(R, G, B) = \vec{\nabla} H_{i+1}(R_0, G_0, B_0) \quad (3.11)$$

És a dir, les dues funcions definides sobre els punts (R_0, G_0, B_0) d'una cara tenen el mateix límit, i coincideix amb amb el valor del vector gradient en el punt. Per tant en tot (R_0, G_0, B_0) de les regions (1), (2), (3), (4), (5) i (6) el vector gradient és una funció contínua. ♦

Taula 3.6. Vector gradient de $H(R, G, B)$ de la transformació de Smith.

Nom	Regió	$\frac{\partial H}{\partial R}(R, G, B)$	$\frac{\partial H}{\partial S}(R, G, B)$	$\frac{\partial H}{\partial B}(R, G, B)$
<i>eix</i>	$R=G=B$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
(1)	$R>B>G$	$\frac{B-G}{6(R-G)^2}$	$\frac{R-B}{6(R-G)^2}$	$\frac{-1}{6(R-G)}$
(1)∩(2)	$B=G$	0	$\frac{1}{6(R-B)}$	$\frac{-1}{6(R-G)}$
(2)	$R>G>B$	$-\frac{G-B}{6(R-B)^2}$	$\frac{1}{6(R-B)}$	$-\frac{R-G}{6(R-B)^2}$
(2)∩(3)	$R=G$	$\frac{-1}{6(G-B)}$	$\frac{1}{6(R-B)}$	0
(3)	$G>R>B$	$\frac{-1}{6(G-B)}$	$\frac{R-B}{6(G-B)^2}$	$\frac{G-R}{6(G-B)^2}$
(3)∩(4)	$R=B$	$\frac{-1}{6(G-B)}$	0	$\frac{1}{6(G-R)}$
(4)	$G>B>R$	$-\frac{G-B}{6(G-R)^2}$	$-\frac{B-R}{6(G-R)^2}$	$\frac{1}{6(G-R)}$
(4)∩(5)	$B=G$	0	$\frac{1}{6(R-B)}$	$\frac{1}{6(G-R)}$
(5)	$B>G>R$	$\frac{B-G}{6(B-R)^2}$	$\frac{1}{6(R-B)}$	$\frac{G-R}{6(B-R)^2}$
(5)∩(6)	$R=G$	$\frac{1}{6(B-G)}$	$\frac{-1}{6(B-G)}$	0
(6)	$B>R>G$	$\frac{1}{6(B-G)}$	$-\frac{B-R}{6(B-G)^2}$	$-\frac{R-G}{6(B-G)^2}$
(6)∩(1)	$R=B$	$\frac{1}{6(B-G)}$	0	$\frac{-1}{6(B-G)}$

Teorema 5 La component *Tonalitat* de la transformació de l'espai de color RGB en l'espai de color HSV té derivades parcials d'ordre 2 contínues en tots els punts de la regió interior de cada una de les sis regions tetraèdriques (model de A. R. Smith). A les cares no hi ha continuïtat.

Demostració. Per a cada regió ($i=1\div 6$) i per cada punt (R_0, G_0, B_0) de l'interior de la regió (regió definida per desigualtats estrictes) la funció gradient es pot escriure com:

24 Mitjana i variància en la component tonalitat del color

$$f(X, Y, Z) = \left(\frac{Y - Z}{6(X - Z)^2}, \frac{X - Y}{6(X - Z)^2}, \frac{Z - X}{6(X - Z)^2} \right) \quad \text{si } X > Y > Z \quad (3.12)$$

on cada una de les components és de classe C^∞ a la regió definida per $X > Y > Z$. ♦

En definitiva podem resumir els resultats anteriors en

Teorema 6 Les components *Tonalitat*, *Saturació* i *Valor* són de classe C^∞ a les regions definides per $X > Y > Z$, $X = \max(R, G, B)$, $Y = \text{med}(R, G, B)$, $Z = \min(R, G, B)$ amb $0 \leq R \leq 255$, $0 \leq G \leq 255$, i $0 \leq B \leq 255$. En general no hi ha continuïtat a la intersecció de dues regions. ♦

4. Estimacions de la mitjana i de la variància de la tonalitat d'una imatge en color

Sigui \mathfrak{S} una imatge en color de N píxels; les components a l'espai de color RGB les notem per $\mathfrak{S} = \{(R_i, G_i, B_i)\}_{i=1, \dots, N}$ i les components a l'espai HSV les denotem per $\mathfrak{S} = \{(H_i, S_i, V_i)\}_{i=1, \dots, N}$ valors obtinguts mitjançant la transformació explicitada en la taula 3.3 (i/o fórmules (3.3)). En considerar la totalitat de píxels de la imatge, s'obté una mostra de N valors de cada component del color; notem per :

$$\Phi = \{H_i\}_{i=1, \dots, N} = \{H(R_i, G_i, B_i)\}_{i=1, \dots, N}$$

la mostra de la component tonalitat de la imatge.

4.1. Mitjana i variància d'una mostra

Donada una mostra de N valors $\Phi = \{H_i\}_{i=1, \dots, N}$, els descriptors estadístics mitjana i variància proporcionen una primera informació sobre la mostra. Recordem:

La mitjana d'una mostra de N valors ens dóna una aproximació centrada per a representar la mostra,

$$\mu_H = \bar{H} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i.$$

La variància d'una mostra de N valors ens mesura la incertesa aleatòria ("random uncertainty") de la mostra,

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_i - \mu_H)^2.$$

En aquest treball es volen aproximar els descriptors estadístics mitjana i variància d'una mostra de valors de la component tonalitat del color d'una imatge com a primer pas per a decidir/classificar/assignar el color d'una imatge/ d'un objecte.

4.2. Fórmula de Taylor i càlcul de la tonalitat

Una aproximació del valor de la tonalitat d'un píxel es pot calcular fent ús del desenvolupament del polinomi de Taylor d'ordre n en un punt pròxim; denotarem per \widetilde{H}_i al valor obtingut fent servir aquesta fórmula. Com que la tonalitat H és una funció contínua amb derivades de primer i segon ordre contínues, llavors, per aquesta funció es podrà aplicar la fórmula de Taylor d'ordre 2 en un punt pròxim.

Suposem que la imatge $\mathfrak{S} = \{(R_i, G_i, B_i)\}_{i=1, \dots, N}$ expressada a l'espai RGB és tal que els valors R_1, \dots, R_N són propers al seu valor mig μ_R ; els valors G_1, \dots, G_N són propers al seu valor mig μ_G i els valors B_1, \dots, B_N són propers al seu valor mig μ_B . Sigui $\mu_{RGB} = (\mu_R, \mu_G, \mu_B)$ el punt mig de la imatge a l'espai RGB. En definitiva la tonalitat

d'un píxel qualsevol es pot obtenir fent ús de la fórmula de Taylor d'ordre 2 centrada en el punt μ_{RGB} , donant lloc a:

$$\begin{aligned}
H(R, G, B) = & H(\mu_{RGB}) + \frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB})(R - \mu_R) + \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB})(G - \mu_G) + \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB})(B - \mu_B) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu_{RGB})(R - \mu_R)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu_{RGB})(G - \mu_G)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu_{RGB})(B - \mu_B)^2 \right) + \\
& + \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H}{\partial R \partial B G}(\mu_{RGB})(R - \mu_R)(G - \mu_G) + \frac{\partial^2 H}{\partial G \partial B}(\mu_{RGB})(G - \mu_G)(B - \mu_B) + \\ & + \frac{\partial^2 H}{\partial B \partial R}(\mu_{RGB})(B - \mu_B)(R - \mu_R) \end{aligned} \right] + \quad (4.1) \\
& + O\left((X - \mu_X)^3\right)
\end{aligned}$$

on $X = R, G, B$. El polinomi de Taylor de grau 2 en el punt μ_{RGB} s'obté de (14) ignorant els termes amb derivades d'ordre superior al 2, i el designarem per $P_2(H; \mu_{RGB}; (R, G, B))$. Aquest polinomi de Taylor es pot expressar mitjançant 4 sumands,

$$\begin{aligned}
P_2(H; \mu_{RGB}; (R, G, B)) = & H(\mu_{RGB}) + H_1(R, G, B; \mu_{RGB}) + H_2(R, G, B; \mu_{RGB}) + H_3(R, G, B; \mu_{RGB}) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Els termes amb derivades de primer ordre de la funció en el punt els denotem per $H_1(R, G, B; \mu_{RGB})$, és a dir:

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB})(R - \mu_R) + \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB})(G - \mu_G) + \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB})(B - \mu_B) \quad (4.3)$$

els termes amb derivades de segon ordre els separem en $H_2(R, G, B; \mu_{RGB})$ i $H_3(R, G, B; \mu_{RGB})$ que es corresponen a:

$$H_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu_{RGB})(R - \mu_R)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu_{RGB})(G - \mu_G)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu_{RGB})(B - \mu_B)^2 \right) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
H_3 = & \frac{\partial^2 H}{\partial R \partial B G}(\mu_{RGB})(R - \mu_R)(G - \mu_G) + \frac{\partial^2 H}{\partial G \partial B}(\mu_{RGB})(G - \mu_G)(B - \mu_B) + \\
& + \frac{\partial^2 H}{\partial B \partial R}(\mu_{RGB})(B - \mu_B)(R - \mu_R) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Per a cada píxel i de la imatge, obtenim el valor de la seva tonalitat en substituir les expressions de (R, G, B) a (4.2) pels valors (R_i, G_i, B_i) corresponents, és a dir

$$\tilde{H}_i = P_2(H; \mu_{RGB}; (R_i, G_i, B_i)) \quad i = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

on \tilde{H}_i és l'aproximació obtinguda de la tonalitat en el i -èsim píxel.

4.3. Aproximació de la mitjana d'una mostra de tonalitats

El càlcul de la **mitjana** de la mostra de valors H_1, \dots, H_N , donada per $\mu_H = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i$, requereix N avaluacions de la funció tonalitat; si substituïm cada valor H_i pel seu valor aproximat \widetilde{H}_i (fórmula (4.6)) obtenim el valor aproximat, $\widetilde{\mu}_H = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widetilde{H}_i$, de la mitjana mostral μ_H . Substituint les fórmules (4.2), (4.3), (4.4) i (4.5) en la fórmula de $\widetilde{\mu}_H$ s'obté:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_H &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mu_{RGB}) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_1(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_2(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_3(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

El primer sumand de la dreta de la igualtat (4.7) dóna exactament $H(\mu_{RGB}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mu_{RGB})$. El segon sumand és zero $\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_1(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) = 0 \right)$ per definició del valor mig, ja que $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X) = 0$ per a $X = R, G, B$. Fent ús de les definicions de variància mostral $\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)^2$ on $X = R, G, B$, de covariància mostral $\sigma_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)(Y_i - \mu_Y)$, on $X, Y = R, G, B$, i considerant les expressions (4.4) i (4.5), l'equació (4.7) es converteix en:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_H &= H(\mu_{RGB}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu_{RGB}) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu_{RGB}) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu_{RGB}) \sigma_B^2 \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 H}{\partial R \partial B G}(\mu_{RGB}) \sigma_{RG} + \frac{\partial^2 H}{\partial G \partial B}(\mu_{RGB}) \sigma_{GB} + \frac{\partial^2 H}{\partial B \partial R}(\mu_{RGB}) \sigma_{BR} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Cal remarcar que per obtenir μ_H són necessàries N avaluacions de la funció tonalitat, mentre que l'expressió (4.8) dóna lloc a un valor aproximat $\widetilde{\mu}_H$ fent servir una (1) avaluació de la funció tonalitat i l'avaluació de sis (6) derivades parcials segones d'aquesta funció; la comparació és 7 contra N . En experimentació, on les imatges estudiades presenten $N = O(10^3)$, el guany en cost computacional en el càlcul de $\widetilde{\mu}_H$ en lloc μ_H de és clar.

4.4. Aproximació de la variància d'una mostra de tonalitats

El càlcul de la **variància** de la mostra de valors H_1, \dots, H_N , donada per

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^n (H_i - \mu_H)^2 \right) \quad (4.9)$$

requereix N avaluacions de la funció tonalitat i el càlcul previ de μ_H ; procedim de la mateixa manera que en el càlcul aproximat de la mitjana mostral, és a dir, substituint cada valor H_i pel seu valor aproximat \widetilde{H}_i i substituint la mitjana μ_H pel valor aproximat $\widetilde{\mu}_H$. El resultat és un valor aproximat de la variància mostral que denotarem per $\widetilde{\sigma}_H^2$.

Primer de tot la fórmula (4.9) s'expressa de forma més simple per:

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N H_i^2 \right) - \mu_H^2 \approx \widetilde{\sigma}_H^2. \quad (4.10)$$

A continuació per obtenir $\widetilde{\sigma}_H^2$ es fa el següent, a (4.10) substituïm μ_H per $\widetilde{\mu}_H$ segons la fórmula (4.8) i elevem al quadrat; substituïm H_i per \widetilde{H}_i segons la fórmula (4.6), elevem al quadrat i agrupem termes; l'expressió resultant, després de no considerar els termes d'ordre superior a l'1 en les variàncies i en les covariàncies, s'anomena $\widetilde{\sigma}_H^2$, és a dir $\widetilde{\sigma}_H^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \widetilde{H}_i^2 \right) - \widetilde{\mu}_H^2$. Desenvolupem aquesta fórmula.

L'aproximació de $\widetilde{\mu}_H^2$ ve donada per:

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mu}_H)^2 &\approx (H(\mu_{RGB}))^2 + H(\mu_{RGB}) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu_{RGB}) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu_{RGB}) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu_{RGB}) \sigma_B^2 \right) + \\ &+ 2H(\mu_{RGB}) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R \partial BG}(\mu_{RGB}) \sigma_{RG} + \frac{\partial^2 H}{\partial G \partial B}(\mu_{RGB}) \sigma_{GB} + \frac{\partial^2 H}{\partial B \partial R}(\mu_{RGB}) \sigma_{BR} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

on els termes d'ordre superior a 1 (σ_X^4 o σ_{XY}^2 per a $X = R$ o G o B) no es consideren. A continuació s'expressa el càlcul del primer terme del segon membre de (4.10), substituïm H_i per \widetilde{H}_i segons la fórmula (4.6), elevem al quadrat i agrupem termes,

l'expressió resultant per a $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\widetilde{H}_i)^2$ és:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H(\mu_{RGB}) + H_1(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) + H_2(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) + H_3(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}))^2 \\ &\approx (H(\mu_{RGB}))^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_1(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}))^2 + \\ &+ 2H(\mu_{RGB}) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_1(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) + H_2(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB}) + H_3(R_i, G_i, B_i; \mu_{RGB})) \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

on no es consideren els termes d'ordre superior a 1.

De forma més detallada, si A, B, C són els termes de grau 0,1,2 respectivament en $(X - \mu_X)$ per a $X = R, G, B$ en la definició de \widetilde{H}_i , en elevar al quadrat només es considera fins a grau 2 en $(X - \mu_X)$; i per tant, tenen contribució efectiva els termes següents: $(A + B + C)^2 \approx A^2 + B^2 + 2A(B + C)$.

Després de desenvolupar i sumar els termes de (4.12) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\widetilde{H}_i)^2 &\approx (H(\mu_{RGB}))^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_B^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \sigma_{RG} + \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \sigma_{GB} + \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \sigma_{BR} \right) \\ &+ H(\mu_{RGB}) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu_{RGB}) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu_{RGB}) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu_{RGB}) \sigma_B^2 \right) + \\ &+ 2H(\mu_{RGB}) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R \partial B G}(\mu_{RGB}) \sigma_{RG} + \frac{\partial^2 H}{\partial G \partial B}(\mu_{RGB}) \sigma_{GB} + \frac{\partial^2 H}{\partial B \partial R}(\mu_{RGB}) \sigma_{BR} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituint els desenvolupaments (4.11) i (4.13) a la fórmula (4.10) l'expressió resultant per a $\widetilde{\sigma}_H^2$ és:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_H^2 &= \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_B^2 + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{RG} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{GB} + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{BR} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Més abreujadament, si $\overline{\nabla H} = \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}), \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}), \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right)^T$ és el vector gradient, en notació matricial (4.14) s'expressa com:

$$\widetilde{\sigma}_H^2 = \overline{\nabla H}^T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_R^2 & \sigma_{RG} & \sigma_{BR} \\ \sigma_{RG} & \sigma_G^2 & \sigma_{GB} \\ \sigma_{BR} & \sigma_{GB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \cdot \overline{\nabla H} \quad (4.15)$$

Cal remarcar que a l'expressió (4.14) s'obté $\widetilde{\sigma}_H^2$ fent servir l'avaluació de les 3 derivades parcials primeres de la funció tonalitat (H), mentre que per al càlcul de σ_H^2 caldrien N avaluacions de H . Noteu també que a (4.15) no és necessari fer el càlcul de cap mitjana.

4.5. Comentaris

Les fórmules obtingudes en els dos apartats anteriors coincideixen en part amb les usades per Romaní en la seva tesi doctoral [10] i les de Gevers i Stokman [4], i amb les que desenvolupen Papoulis [8], Taylor [12], i Burns i Berns [1].

Papoulis [8] presenta com a fórmules per al càlcul de l'esperança i la variància d'una variable aleatòria $g(x)$ amb g suficientment derivable les fórmules:

$$E\{g(x)\} = g(\mu) + g''(\mu) \frac{\sigma_x^2}{2}; \quad \sigma_{g(x)}^2 = [g'(\mu)]^2 \sigma_x^2; \quad (4.16)$$

i deixa com a exercici al lector el cas de funcions de diverses variables; només en dóna les fórmules, que per a la nostra funció serien:

$$\begin{aligned} \mu_H^P &\approx H(\mu) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu) \sigma_B^2 \right); \\ \sigma_H^P &\approx \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu) \right)^2 \sigma_B^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Taylor [12] dóna com a fórmules per al càlcul de la mitjana i la variància d'una funció $q(x, y)$ amb q suficientment derivable les expressions:

$$\widetilde{\mu}_q \approx q(\bar{x}, \bar{y}); \quad \widetilde{\sigma}_q^2(x, y) \approx \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \sigma_{xy}. \quad (4.18)$$

i comenta el fet que si x i y són independents, (després d'uns quants experiments, σ_{xy} s'hauria d'apropar a 0), s'aplica: $\widetilde{\sigma}_q^2 \approx \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2$. Aquestes fórmules per a la nostra funció serien (vegeu [10]):

$$\mu_H^T \approx H(\mu) \quad (4.19.a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_H^T &\approx \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu) \right)^2 \sigma_B^2 + 2 \frac{\partial H}{\partial R}(\mu) \frac{\partial H}{\partial G}(\mu) \sigma_{RG} \\ &\quad + 2 \frac{\partial H}{\partial G}(\mu) \frac{\partial H}{\partial B}(\mu) \sigma_{GB} + 2 \frac{\partial H}{\partial B}(\mu) \frac{\partial H}{\partial R}(\mu) \sigma_{BR} \end{aligned} \quad (4.20.b)$$

i en el cas d'independència resulta que $\sigma_H^P = \sigma_H^T$.

Finalment Burns i Berns [1] proposen la fórmula (4.15) per a calcular la variància com a (4.14) i no expliciten el càlcul de la mitjana amb fórmula.

Les fórmules per al càlcul aproximat de la mitjana $\widetilde{\mu}_H$ (4.8) i de la variància $\widetilde{\sigma}_H^2$ (4.14) de la tonalitat d'una imatge en color no són les que usualment es fan servir en

els treballs consultats; en general s'accepten les fórmules de (4.17). Aquestes fórmules són correctes quan la matriu de covariàncies de la mostra és diagonal, és a dir, quan es les components de color RGB són independents ($\sigma_{RG} = \sigma_{GB} = \sigma_{BR}$); llavors $\widetilde{\mu}_H = {}^P\widetilde{\mu}_H$ i $\widetilde{\sigma}_H^2 = {}^P\widetilde{\sigma}_H^2 = {}^T\widetilde{\sigma}_H^2$. A la pràctica, aquest no és el cas, cap dispositiu de captura d'imatges manté la independència, i per tant és necessari tenir en compte la contribució de tota la matriu de covariàncies. A més a més, tant les fórmules per al càlcul de la mitjana com per al càlcul de la variància (4.8) i (4.14) són les dues del mateix d'ordre en $(X - \mu_X)$ per a $X = R, G, B$ que és dos. Dit altrement, les fórmules de (4.19) o Taylor [2] presenten una discordància entre elles en l'ordre d'aproximació; és a dir a partir de (4.19.a) no es pot deduir (4.19.b).

5. Experiments

Presentem un estudi sobre la viabilitat d'usar les fórmules (4.8) i (4.14) en el càlculs aproximats de la mitjana i la variància en lloc de les fórmules (4.17) i (4.19). Per a tal fi s'han utilitzat els 183 colors d'una paleta de color. S'ha escollit el software MATLAB per a d'implementació.

5.1. Mostra de valors de la tonalitat

En total tenim 1098 [= 183×6] imatges de 1000 píxels en color (sRGB) que són el resultat de la captura per un dispositiu DCC de 183 colors de la paleta de color (color pur), totes elles recollides per a 6 nivells d'il·luminació diferents i guardades en format RAW. La mostra es prou extensa per cobrir totes les situacions possibles de la transformació de A. R. Smith de l'apartat 3, (vegeu l'annex A). En aquesta mostra podem trobar imatges amb píxels a l'eix i sense; imatges amb tots els píxels en un mateix tetraedre; amb tots els píxels en una cara; amb els píxels repartits entre dos tetraedres i la seva cara comuna; amb els píxels repartits entre tots els tetraedres, etc. És a dir tenim una mostra prou variada i vàlida per a l'estudi a fer.

5.2. Algorisme

En un primer pas de l'estudi pràctic s'han transformat les 1098 imatges expressades en color sRGB a color HSI, cada una d'aquestes imatges s'expressa en components de color HSI fent ús de la transformació de A. R. Smith de l'apartat 3.

Per a cada imatge i en coordenades sRGB s'han calculat els descriptors estadístics $\mu_{RGB} = (\mu_R, \mu_G, \mu_B)$ de primer ordre i $\Sigma = (\sigma_R^2, \sigma_G^2, \sigma_B^2, \sigma_{RG}, \sigma_{GB}, \sigma_{BR})$ descriptors de segon ordre. Per a cada imatge i en coordenades HSI s'han calculat els descriptors estadístics de la tonalitat (H), μ_H i σ_H^2 , i les quantitats que les aproximem definides per les expressions $\widetilde{\mu}_H^T, \widetilde{\mu}_H^P, \widetilde{\sigma}_H^2$ i $\widetilde{\sigma}_H^2$, corresponents a les fórmules (4.8), (4.14), (4.17) i (4.18).

Les simulacions efectuades per avaluar les expressions abans dites, tenen dos punts febles: la circularitat de la component tonalitat i el tamany de l'eix de gris. Recordem per a una imatge qualsevol els píxels de l'eix de gris no tenen valor de la component tonalitats definit. Aquesta component, a l'espai HSI, es corresponen a un angle amb domini $[0, 2\pi)$ amb la propietat d'obligada reducció de tot angle a aquest domini.

5.2.1. La circularitat de la tonalitat.

Tonalitat o el tipus de color (vermell, blau o groc) es representa com un angle amb valors possibles des de 0 a 2π radians a l'espai HSI. Matemàticament la tonalitat és una variable amb domini $[0, 2\pi)$ amb la propietat d'obligada reducció de tot angle a aquest domini. L'algorisme dissenyat per a la transformació de Smith pren com a domini de la variable tonalitat l'interval $[0, 1)$ i obliga a $H_i = \text{mod}(H_i, 1)$. En aquesta representació un cercle de radi 1 és l'espai de tots els possibles valors d'aquest component del color. Aquest fet comporta una anàlisi acurada en qualsevol operació aritmètica en aquest espai. Per aquest motiu s'ha construït una distribució de la mostra sobre el cercle que s'anomenarà *distribució associada*, enlloc de la mostra per se. Vegeu l'annex B.

5.2.2. Cotes d'error

Tots els resultats del treball s'obtenen per aproximació numèrica, una aproximació ens interessa si verifica $|a - a^*|$ per a valor exacte a i valor aproximat a^* , s'ha fet necessari establir una cota superior d'error estàndard, es treballa amb $\varepsilon/4$, $\varepsilon/2$, ε , 2ε i 4ε . S'ha acordat l'elecció de $\varepsilon=0.004$ després d'observar que:

$|H_i - \widetilde{H}_i| < 0.004$ amb $H_i, \widetilde{H}_i \in [0, 1]$ equival a $H_i = \widetilde{H}_i \pm 1$ amb $H_i, \widetilde{H}_i \in [0, 255]$, on H_i representa el valor de la tonalitat per al píxel i d'una imatge; és a dir H_i i \widetilde{H}_i tenen la mateixa part entera si expressem la tonalitat en el domini $[0, 255)$.

5.2.3. La tonalitat i l'eix de gris

Entre les 1098 imatges, n'hi ha 180 que tenen píxels a l'eix (en quantitats que varien des de 1 fins a 607, dels 1000 píxels de cada imatge). En tots aquests casos els píxels de l'eix de gris, definit per $R=G=B$, no tenen valor de la component tonalitat (H_i) assignat. Hi ha autors que assignen el valor 0. No és vàlid, doncs s'enmascara la mostra i donen més importància a la regió (12) definida per aquest valor de la tonalitat. Nosaltres hem treballat dues opcions:

Opció 1. Ens referirem a ella com a mètode de *simulació directe*. Per als càlculs de les quantitats μ_H i σ_H^2 no s'han tingut en compte dels píxels de l'eix de gris; és a dir si *peix* és la quantitat de píxels que són a l'eix de gris, les expressions per a la mitjana i per a la variància són

$$\mu_H = \frac{1}{N - \text{peix}} \sum_{i=1}^{N - \text{peix}} H_i \quad \text{i} \quad \sigma_H^2 = \frac{1}{N - \text{peix}} \left(\sum_{i=1}^{N - \text{peix}} (H_i - \mu_H)^2 \right)$$

Opció 2. Ens referirem a ella com a mètode de *simulació random*. Per als càlculs de les quantitats μ_H i σ_H^2 als píxels de l'eix de gris s'els ha assignat un valor random (uniforme $[0, 1]$) a cada un d'ells. Vegeu l'annex C sobre les simulacions random.

Totes expressions i fórmules simulades s'han fet per les dues vies, presentarem els resultats de les dues opcions.

5.2.4. Fórmules a simular

Es volen constatar tres aproximacions per al càlcul de la mitjana d'una mostra de tonalitat (fórmules F1, F2 i F3) i les dues aproximacions per al càlcul de la variància (fórmules F4 i F5) de la mateixa mostra.

Per a la mitjana s'han simulat les fórmules F1, F2 i F3 que corresponen a

$${}^T \widetilde{\mu}_H \approx H(\mu), \quad \text{F1}$$

$${}^P \widetilde{\mu}_H \approx H(\mu) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu) \sigma_B^2 \right), \quad \text{F2}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_H &= H(\mu_{RGB}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu_{RGB}) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu_{RGB}) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu_{RGB}) \sigma_B^2 \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 H}{\partial R \partial B G}(\mu_{RGB}) \sigma_{RG} + \frac{\partial^2 H}{\partial G \partial B}(\mu_{RGB}) \sigma_{GB} + \frac{\partial^2 H}{\partial B \partial R}(\mu_{RGB}) \sigma_{BR}. \end{aligned} \quad \text{F3}$$

Per a la variança s'han simulat les fórmules F4 i F5 que corresponen a

$${}^P \widetilde{\sigma}_H^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu) \right)^2 \sigma_B^2, \quad \text{F4}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_H^2 &= \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_B^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{RG} + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{GB} \\ &+ 2 \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{BR}. \end{aligned} \quad \text{F5}$$

5.2.4.1. Simulacions de les fórmules F1, F2 i F3

Per a la cota superior d'error ε establida a l'apartat 5.2.2 totes les imatges sense píxels a l'eix de gris tenen la millor aproximació amb la fórmula F3, en un 99% dels casos. Les imatges amb píxels a l'eix no tenen aquesta particularitat. Recordem que la fórmula F3 conté tots els elements de la matriu de covariàncies de la mostra a l'espai sRGB; és a dir no podem considerar que les components del color a l'espai sRGB siguin independents. Podeu consultar taules i resultats a l'annex D.

5.2.4.2. Simulacions de les fórmules F4 i F5

Per a la cota superior d'error ε establida a l'apartat 5.2.2 totes les imatges sense píxels a l'eix de gris tenen la millor aproximació amb la fórmula F5, en un 99% dels casos.

Les imatges amb píxels a l'eix no tenen aquesta particularitat. Per a totes les imatges sense píxels a l'eix gris resulta que:

1. En tots els casos la fórmula F5 és dona l'aproximació amb mínim error, sempre inferior a $\varepsilon=0.002$. Gairebé sempre, llevat de 7 casos, error mínim inferior $\varepsilon=0.001$.
2. Per a tot ε en tots els casos en que F4 dona una aproximació vàlida, també la dona F5.

Per a totes les imatges amb píxels a l'eix resulta que, si no afegim un valor random als píxels de l'eix,

3. La homogeneïtat observada en el cas sense píxels es perd. Només un 68% dels casos la fórmula F5 ens dona el valor aproximat amb error mínim, però només en un 55% dels casos per sota de $\varepsilon=0.004$; F4 ens dona el valor aproximat en un 23% dels casos amb cota per sota de 0.004.
4. Per a qualsevol de les fites estudiades, queden imatges sense aproximar, en el cas de $\varepsilon=0.004$ en un 25% dels casos ni la fórmula F4 ni la fórmula F5 ens donen aproximacions vàlides.

Però si afegim valor random als píxels de l'eix, no podem dir que millorin els resultats,

5. F5 és millor en tots els casos, arriba al 82% de casos, però només en un 63% dels casos la cota per sota de $\varepsilon=0.004$, en aquest cas F4 és millor en un 11% dels casos.
6. Per a qualsevol de les fites estudiades, queden imatges sense aproximar, en el cas de $\varepsilon=0.004$ en un 28% dels casos ni la fórmula F4 ni la fórmula F5 ens donen aproximacions vàlides.
7. En tots els casos, el nombre de píxels de l'eix, la mida d'aquest conjunt, és directament proporcional al bon ajustament, és a dir cotes d'error acceptables, pensem en $\varepsilon=0.002$ o $\varepsilon=0.004$ com a màxim.

De totes maneres, donant valors random als píxels de l'eix, el nombre de casos amb en que F4 dona bon ajust es reduïex a la meitat, però fet que es compensa amb que F5 augmenta en acceptació, el conjunt final és quasi el mateix.

6. Conclusions

No podem suposar independència en els canals RGB, és a dir en cap moment $\sigma_{XY} = 0$ per a $X, Y = R, G, B$. La millor aproximació en ordre 2 la donen les fórmules (4.8) i (4.14), totes les altres tenen una important pèrdua de precisió.

Les imatges amb més de un 10% de píxels a l'eix s'haurien de rebutjar en aquest estudi; estem redefinint la funció tonalitat en més de 100 píxels, no es manté el valor mig de la tonalitat per a la imatge.

Bibliografia

1. Burns, P. D., Berns, R.S.: Error Propagation Analysis in Color Measurement and Imaging. Color research and application (1997), vol 22, No 4, pp. 280-289.
2. Gevers, Th., Stokman, H.M.G.: Robust Histogram Construction from Color Invariants for Object Recognition. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI), Vol 26 (1), pp 113-118. (2004).
3. Gevers, Th., Stokman, H.M.G.: Color Measurement by Imaging Spectrometry. CVIU (79), No. 2, pp. 236-249 (2000) .
4. Gevers, Th., Stokman, H.M.G.: Error Propagation due to Color Space Transforms. Machine Vision Applications in Industrial Inspection VIII, Proceedings of SPIE, Vol 3966, 24-26 January 2000.
5. Hanbury, A. : Circular Statistics Applied to Colour Images.
<http://citeseer.ist.psu.edu/666965.html>
6. Hanbury, A.: The Taming of the Hue, Saturation and Brightness Colour Space, (2002). <http://citeseer.ist.psu.edu/hanbury02taming.html>
7. Handbury, A., Serra, J.: A 3D-polar Coordinate Colour Representation Suitable for Image Analysis, (2002).
<http://citeseer.ist.psu.edu/hanbury02dpolar.html>
8. Papoulis, A.: Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 4th ed., 2002.
9. Pratt, W.: Digital image processing. John Wiley and Sons (1978).
10. Romani, S.: Labeled color image segmentation through perceptually relevant chromatic patterns. PhD Dissertation. (2004).
11. Smith, A.R.: Color gamut transform pairs. IEEE Transactions on Computer Graphics, Vol. 12 No 3 (1978) 12-19. Reprinted in Tutorial: computer Graphics, edited by John C Beatty and Kellogg S Booth, IEEE Computed Society Press, Silver Spring, MD, 2d edition 1982, 376-383.
12. Taylor, J. R.: An Introduction to Error Analysis, John Wiley & Sons, (1973).
13. Tkalčič, M., Tasič, J.F.: Colour spaces-perceptual, historical and applicational background. <http://ieeexplore.ieee.org/iel5/8828/27949/01248032.pdf>.
14. Wikipedia, <http://es.wikipedia.org/wiki/Color>,
http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_del_color,
http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_color_RGB,
http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_color_HSV,
http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_color_HSL.
15. Diccionari de la llengua catalana multilingüe. Diccionaris de l'enciclopèdia.
16. N. I. Fisher. Statistical Analysis of Circular Data. Cambridge University Press, 1993.
- 17.
18. Allan Hanbury. The taming of the hue, saturation and brightness colour space. In Proceedings of the Seventh Computer Vision Winter Workshop, Bad Aussee, Austria, 2002.
19. Haim Levkowitz and Gabor T. Herman. GLHS: A generalised lightness, hue and saturation color model. CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 55(4):271–285, July 1993.

20. Charles Poynton. Frequently asked questions about color, 1999.
<http://www.inforamp.net/~poynton/PDFs/ColorFAQ.pdf>

Sigles

1. R: vermell ("Red").
2. G: verd ("Green").
3. B: blau ("Blue").
4. C: cian o aiguamarina ("Cyan").
5. M: magenta.
6. Y: groc ("Yellow").
7. K: negre ("blacK").
8. RGB barreja additiva (Vermell, Verd, Blau).
9. CMY barreja subtractiva (Cian, Magenta, Groc).
10. CMYK espai de color Cian, Magenta, Groc i Negre.
11. HVS: Human Visual System.
12. HSL: (Hue, Saturation, Lightness) – Tonalitat, Saturació, Luminància),o
13. HSI: (Hue, Saturation, Intensity) – Tonalitat, Saturació, Intensitat).
14. HSV: (Hue, Saturation, Value) – Tonalitat, Saturació, Valor) o
15. HSB: (Hue, Saturation, Brightness) – Tonalitat, Saturació, Brillo o lluentor o lluíssor).
16. THz: terahertz , les freqüències de les ones electromagnètiques.
17. nm: nanòmetres, El nanòmetre s'utilitza habitualment per a mesurar les longituds d'ona de radiacions electromagnètiques.
18. CIE: *Comission Internationale de l'Éclairage*.
19. Hue: color, tint, matis, o tonalitat del color.
20. Brightness: vivesa del color o brillo.
21. Luminance: lluminositat claredat del color.
22. Lightness: luminància o intensitat del color (claredat).

Agraïments

This work has been partially supported by the Spanish CICYT -TIN2007-68063 SISTEMA DE VISION POR COMPUTADOR PARA EL CRIBADO AUTOMATICO DE CITOLOGIAS CERVICO-VAGINALS BASADO EN SOFTCOMPUTING.

ANNEXOS

ESTUDI DE LA TRANSFORMACIÓ
DE L'ESPAI DE COLOR **RGB**
A L'ESPAI DE COLOR **HSV**

24/03/2011

A Mostra

En total tenim 1098 [=183x6] imatges de 1000 píxels en color (sRGB) que són el resultat de la captura per un dispositiu DCC de 183 colors d'una paleta de color (color pur), totes elles recollides per a 6 nivells d'il.luminació diferents; els notarem per N1, N2, N3, N4, N5 i N6.

A.1 Propietats de la mostra

En un primer pas s'ha verificat que la mostra cobreix totes les situacions possibles de la transformació, és a dir, es tenen colors de tot el cub de color sRGB. Vegeu els fitxers de resultats (taula A.4). Les taules A.1, A.2 i A.e s'han elaborat a partir del recompte de píxels per tetraedres, cares i a l'eix de cada imatge de la mostra. S'observen els següents fets:

1. En un mateix nivell hi ha imatges amb píxels en una sola regió, en dos regions, ... , o en tot el cub de color. (La mostra és completa i prou variada).

Taula A.1. Distribució dels píxels en tetraedres en el nivell N3.

NOM	EIX	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N3\S2020_R2	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N3\S2005_R2	0	752	53	0	0	0	72	108	0	0	0	14	1
N3\S1002_G0	1	0	0	21	766	40	0	0	0	117	54	1	0
N3\S2502_G0	3	0	0	236	590	18	0	0	0	150	3	0	0
N3\S0505_R0	7	2	473	292	0	0	0	226	0	0	0	0	0
N3\S1005_R6	8	0	0	0	3	877	78	0	0	0	25	9	0
N3\S4502_G0	17	0	0	116	666	59	0	0	0	87	54	1	0
N3\S2005_R0	37	46	658	92	0	0	0	167	0	0	0	0	0
N3\S7502_G0	58	0	0	60	592	177	4	0	0	31	50	28	0
N3\S0505_R2	117	192	101	20	0	0	105	443	0	0	0	17	5
N3\S7502_R0	460	0	20	303	89	5	10	33	0	0	0	80	0
N3\S4502_R0	462	12	36	85	27	16	41	116	0	0	0	205	0
N3\S1002_R0	519	0	10	353	23	0	3	56	0	0	0	36	0
N3\S2502_R0	595	5	17	220	22	11	8	68	0	0	0	54	0

2. En variar l'il.luminació de nivell N1 a nivell N6 d'un mateix color la distribució per tetraedres canvia (vegeu taula A.2). Per exemple, el color S0510_G6 en variar el nivell presenta poca variació i es troba acumulat en el tetraedre (4). El color S1005_B0 té els píxels repartits entre 2 tetraedres, (4), (5) i cara (45); menys en el nivell N6 on tots els píxels són a la cara (45). Altres reparticions són possibles com és el color S0500_N0 que està molt repartit entre tots els tetraedres, en variar l'il.luminació va decreixent el nombre de píxels de l'eix. En general, els que no tenien píxels a l'eix per al nivell N1, continuen així, el que en tenien els van perdent en variar de N1 a N6.

Taula A.2. Distribució dels píxels en tetraedres d'una mateixa imatge.

NOM	EIX	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N1\S0510_G6	0	0	53	908	0	0	0	39	0	0	0	0	0
N2\S0510_G6	0	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N3\S0510_G6	0	0	0	996	0	0	0	4	0	0	0	0	0
N4\S0510_G6	0	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N5\S0510_G6	0	0	0	988	0	0	0	12	0	0	0	0	0
N6\S0510_G6	0	0	0	996	0	0	0	4	0	0	0	0	0
N1\S1005_B0	13	0	0	0	74	618	62	0	0	0	41	192	0
N2\S1005_B0	0	0	0	0	109	794	0	0	0	0	97	0	0
N3\S1005_B0	0	0	0	0	21	686	0	0	0	0	293	0	0
N4\S1005_B0	0	0	0	0	35	829	0	0	0	0	136	0	0
N5\S1005_B0	0	0	0	0	20	904	0	0	0	0	76	0	0
N6\S1005_B0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1000	0	0
N1\S0500_N0	291	9	210	276	0	0	11	201	0	0	0	2	0
N2\S0500_N0	330	0	1	284	318	30	5	2	0	0	0	30	0
N3\S0500_N0	78	0	0	187	677	53	0	0	0	4	1	0	0
N4\S0500_N0	35	0	0	214	662	27	0	0	0	57	5	0	0
N5\S0500_N0	14	0	0	151	431	17	0	0	0	104	283	0	0
N6\S0500_N0	0	0	0	0	834	0	0	0	0	0	166	0	0

3. En variar l'il·luminació de nivell N1 a nivell N6 el nombre de píxels a l'eix de gris disminueix. Observeu la taula A.3, la mostra conté en mitjana un 16% d'imatges amb píxels a l'eix de gris, aquest percentatge és variable segons el nivell d'il·luminació. Recordem que els píxels de l'eix no tenen tonalitat definida (vegeu taula 3.3).

Taula A.3. Nombre d'imatges de la mostra amb i sense píxels a l'eix per nivells.

<i>Imatges</i>	<i>N1</i>	<i>N2</i>	<i>N3</i>	<i>N4</i>	<i>N5</i>	<i>N6</i>	<i>total</i>
<i>En total</i>	183	183	183	183	183	183	1098
<i>Amb eix</i>	119	145	155	162	163	174	918
<i>Sense eix</i>	64	38	28	21	20	9	180
<i>%</i>	35,0	20,8	15,3	11,5	10,9	4,9	16,4

A.2 Fitxers

Els resultats del recompte per regions es troben recollits en els fitxers següents:

Taula A.4. Fitxers d'aquest annex..

MATLAB	DADES	RESULTATS
tetraedres.m	N1.txt	tetraedres_N1.xls
fun1.m	N2.txt	tetraedres_N2.xls
	N3.txt	tetraedres_N3.xls
	N4.txt	tetraedres_N4.xls
	N5.txt	tetraedres_N5.xls
	N6.txt	tetraedres_N6.xls

B Circularitat

Tonalitat o el tipus de color (vermell, blau o groc) es representa com un angle amb valors possibles des de 0 a 2π radians. En la transformació de A. R. Smith aquesta component es normalitza i pren valors de 0 a 1, pertant la singularitat de 2π es trasllada al 1. Aquest fet comporta grans dificultats en qualsevol operació aritmètica en aquest espai. Per saltar aquest escull s'ha treballat amb la distribució de la mostra sobre el cercle enloc de la mostra per se. La funció tonalitat és tal que (vegeu taula 3.3) pren valor constant sobre les regions intersecció de dos tetraedres i és circular, en concret:

Taula B.0 Rang de valors de la tonalitat per regions.

Regió	Eix	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(1)	(12)
Tonalitat	\emptyset	$0 < H < 1/6$	$1/6 < H < 2/6$	$2/6 < H < 3/6$	$3/6 < H < 4/6$	$4/6 < H < 5/6$	$5/6 < H < 6/6$	$0 \equiv 1$

B.1 Fitxers

Els resultats de les simulacions es troben recollits en els fitxers següents:

MATLAB	DADES	RESULTATS
procesa	N1.txt	grafiques
fun_rgb_tetra	N2.txt	per
fun_pdf_hsi	N3.txt	pantalla
aproxglobal	N4.txt	
dispersio	N5.txt	
fun92 , fun2	N6.txt	

B.2 Resultats

En les següents imatges es presenten els resultats del càlcul de la distribució de la component tonalitat del color. Cada figura consta de 4 histogrames, el primer d'ells és l'histograma de Pareto de la tonalitat i la seva distribució associada (obtinguda a partir de la circularitat). El segon, és l'histograma circular en graus sexagesimals; noteu la relació entre els sectors circulars i els valors de la tonalitat per regions. Els tercer i el quart histogrames amb el recompte del nombre de píxels per valor de tonalitat i de la distribució associada respectivament.

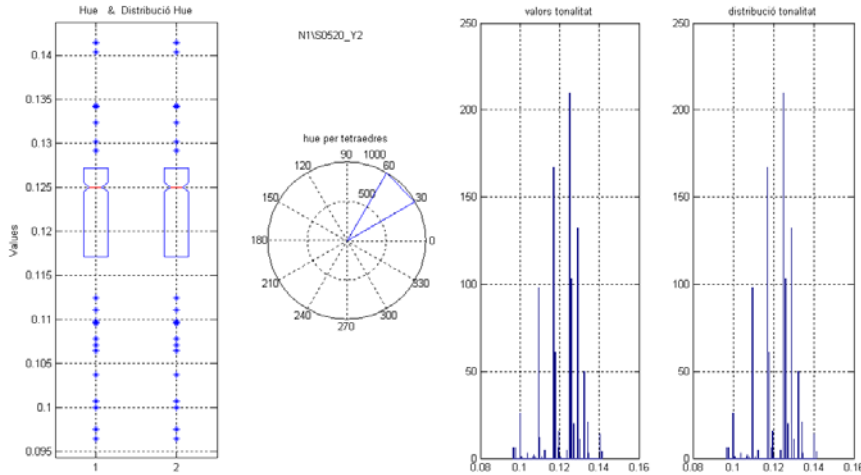
Es presenten imatges en diferents situacions, les explicacions les trobareu en les legends.

6 Mitjana i variància en la component tonalitat del color

1. Imatge de nivell N1, S0520_Y2.

Taula B.1. Distribució dels píxels en regions de la imatge.

Nom	Eix	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N1\S0520_Y2	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

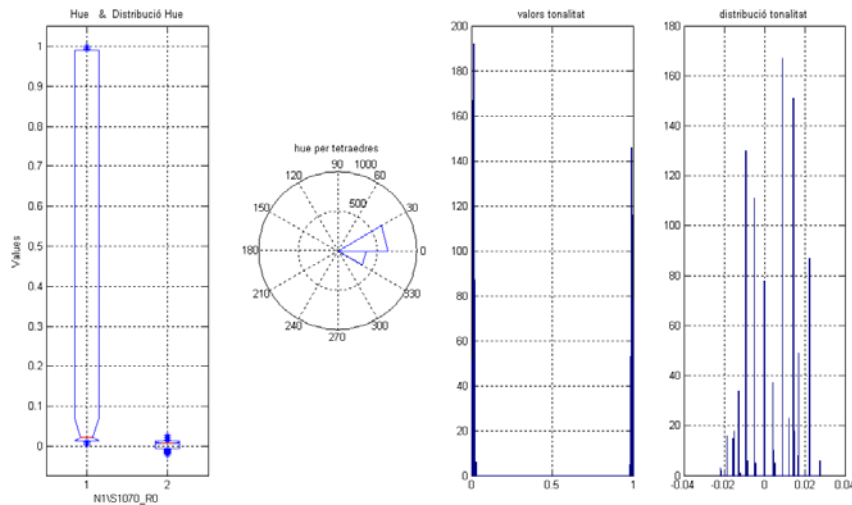


Imatge B.1 La imatge N1\S0520_Y2 té tots els píxels dins de la regió (2) definida per $0 < H < 1/6$.

2. Imatge de nivell N1, S1070_R0

Taula B.2. Distribució dels píxels en regions de la imatge.

Nom	Eix	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N1\S1070_R0	0	361	561	0	0	0	0	78	0	0	0	0	0

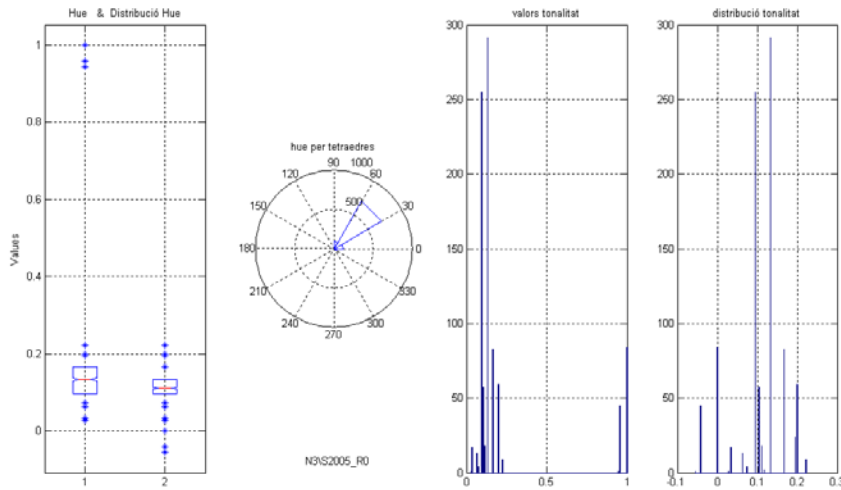


Imatge B.2 La imatge N1\S1070_R0 té tots els píxels entre dues regions definides per $5/6 < H < 1/6$.

3. Imatge de nivell N3, S2005_R0

Taula B.3. Distribució dels píxels en regions de la imatge.

Nom	Eix	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N3\S2005_R0	37	46	658	92	0	0	0	167	0	0	0	0	0

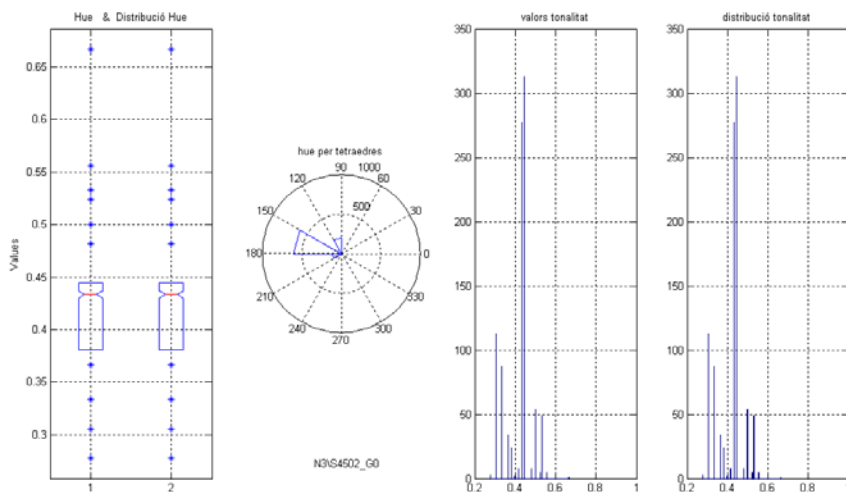


Imatge B.3 La imatge N3\S2005_R0 té els píxels en tres regions, $5/6 < H < 2/6$, majoritàriament a la regió $0 < H < 1/6$.

4. Imatge de nivell N3, S4502_G0

Taula B.4. Distribució dels píxels en regions de la imatge.

Nom	Eix	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N3\S4502_G0	17	0	0	116	666	59	0	0	0	87	54	1	0

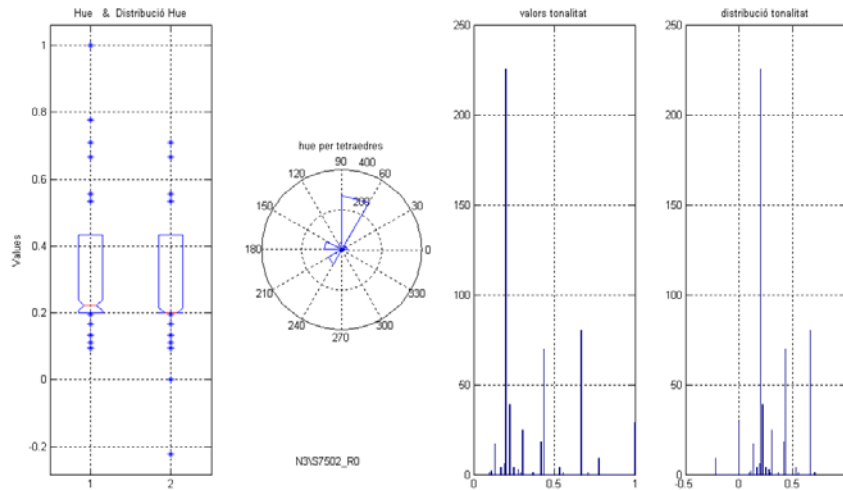


Imatge B.4 La imatge N3\S2005_R0 té els píxels en tres regions, $5/6 < H < 2/6$, majoritàriament a la regió $0 < H < 1/6$.

5. Imatge de nivell N3, S7502_R0

Taula B.5. Distribució dels píxels en regions de la imatge.

Nom	Eix	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N3\S7502_R0	460	0	20	303	89	5	10	33	0	0	0	80	0

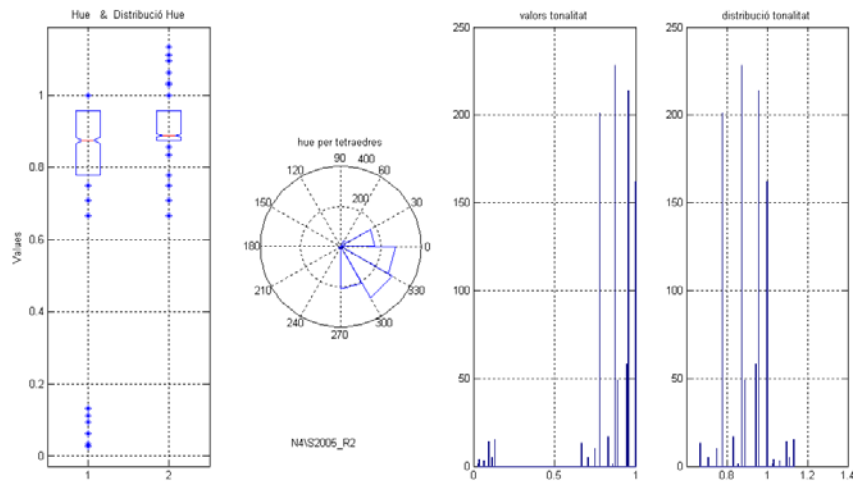


Imatge B.5 La imatge N3\S7502_R0 té els píxels en tres regions, $1/6 < H < 4/6$.

6. Imatge de nivell N4, S2005_R2

Taula B.6. Distribució dels píxels en regions de la imatge.

Nom	Eix	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N4\S2005_R2	0	550	42	0	0	0	216	162	0	0	0	13	17



Imatge B.6 La imatge N4\S2005_R2 té els píxels en tres regions, $4/6 < H < 1/6$.

C Simulacions random

Per a l'opció 2 de l'apartat 3.3 s'han dissenyat diversos mètodes, finalment se n'han provat tres:

- Mètode 1: a cada píxel de l'eix un nombre aleatòri entre [0,1].
- Mètode 2: a cada píxel de l'eix un nombre aleatòri entre [a,b] amb $a = \min(\text{hue})$ i $b = \max(\text{hue})$.
- Mètode 3: a cada píxel de l'eix un nombre aleatòri entre [0,1], però tota la mostra s'equiparteix entre els sis tetraedres.

C.1 Fitxers

Els resultats de les simulacions es troben recollits en els fitxers següents:

MATLAB	DADES	RESULTATS
mostra_rnd05	N1.txt	random_eix
mostra_rnd01	N2.txt	random_N3eix
mostra_rndab	N3.txt	
fun_rgb_tetra	N4.txt	
fun_pdf_hsi	N5.txt	
fun_hue_tetra	N6.txt	
fun_hsi		
fun2		

C.2 Algorismes

Mètode 1. A cada píxel de l'eix un nombre aleatòri entre [0,1], l'algorisme empleat per l'assignació del hue a l'eix és:

```

if ( p_eix > 0 )
    rand('state',sum(100*clock));
    for j=1:p_eix
        X(j,9) = rand; X(j,10)=X(j,9);
    end
end
hue = X(:,10);

```

Mètode 2. A cada píxel de l'eix un nombre aleatòri entre [a,b] amb $a = \min(\text{hue})$ i $b = \max(\text{hue})$, l'algorisme empleat per l'assignació del hue a l'eix és:

```

a=min(hue); b=max(mod(hue,1));
if ( p_eix > 0 )
    rand('state',sum(100*clock));
    for j=1:p_eix, X(j,9) = a+(b-a)*rand; X(j,10)=X(j,9); end
end

```


Mètode 3. A cada píxel de l'eix un nombre aleatòri entre [0,1], però tota la mostra s'equilibra entre els sis tetraedres; l'algorisme empleat per l'assignació del hue a l'eix és:

```

if ( p_eix > 0 )
    time = clock; state = 100*sum(time(4:6));
    rand('state',state); k=fix(p_eix/6);
    for j=0:5
        X(j*k+1:(j+1)*k,9) = unifrnd(j/6,(j+1)/6,k,1);
    end
    if (p_eix-6*k > 0)
        X((6*k+1):p_eix,9) = unifrnd(0,1,p_eix-6*k,1);
    end
end
hue = X(:,10);

```

C.3 Resultats

En les següents imatges es presenten els resultats del càlcul amb els tres mètodes per a diferents imatges. El valor rang fa referència al màxim i al mínim de la tonalitat per a la imatge, el valor mediana és el descriptor estadístic mediana, el valor mitja és el descriptor estadístic mitja per a la distribució de la mostra, i mH és el valor μ_H (mitja calculada considerant l'opció 1, apartat 5.2.3) de la imatge en qüestió. Per exemple per a la imatge del nivell N3, S1005_R2 i la imatge del nivell N6, S2005_R2 amb la següent distribució per regions:

Taula C.1. Distribució dels píxels en regions de la imatge.

Nom	Eix	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(12)	(23)	(34)	(45)	(56)	(61)
N3\S1005_R2	163	341	158	14	0	0	51	264	0	0	0	9	0
N6\S2005_R2	54	300	257	13	0	0	32	315	0	0	0	5	24

s'observa:

1) La imatge N3\S1005_R2 amb un 16,3% píxels a l'eix de gris, el valor de μ_H és manté constant amb les tres simulacions, i és manté dins de la regió (1) on hi ha el 34,1% de la mostra, a més a més compleix $\mu_H \pm 0,004$.

Taula C.2. Valors de μ_H .

Nom	μ_H	Mètode 1	Mètode 2	Mètode 3
N3\S1005_R2	0,9819	0,9837	0,0017	0,9841
N6\S2005_R2	0,0015	0,0036	0,0021	0,9970

2) La imatge N6\S2005_R2.raw amb un 5,4% píxels a l'eix de gris, el valor de μ_H no és manté constant en les tres simulacions, vegeu que en dues de les simulacions canvia de regió respecte del valor μ_H . El valor inicial μ_H és a la regió (2), amb un 30% de mostra, mentre que pel mètode 2 i el mètode 3 la mitja és situada a la regió (1), amb un 25,7% de mostra.

La circularitat de la component tonalitat complica l'assignació de valors a l'atzar entre 0 i 1, tal i com s'observa en el resultat anterior, en afegir valors "random" el valor μ_H canvia de tetraedre. A la taula següent es mostra una comparativa dels tres mètodes per totes les imatges del nivell N3 amb píxels a l'eix. Les columnes Mèt 1, Mèt 2 i Mèt 3 hi ha l'error en el càlcul de c, es compara μ_H sense valor als píxels de l'eix i μ_H amb el valor a l'atzar.

Taula C.1 Comparativa dels tres mètodes per a les imatges del nivell N3 amb píxels a l'eix.

Imatge	μ_H	Mèt. 1	Mèt. 2	Mèt. 3
N3\S1002_G0.RAW	0,4273	0,00020	0,00000	0,00000
N3\S7020_R0.RAW	0,0702	0,00020	0,00030	0,00010
N3\S4502_Y0.RAW	0,2009	0,00060	0,00050	0,00020
N3\S2502_G0.RAW	0,3858	0,00040	0,00030	0,00020
N3\S0505_R0.RAW	0,1513	0,00000	0,00010	0,00040
N3\S1005_R6.RAW	0,5645	0,00010	0,00080	0,00010
N3\S7502_B0.RAW	0,5141	0,00100	0,00040	0,00140
N3\S4502_G0.RAW	0,4194	0,00040	0,00160	0,00090
N3\S2005_R0.RAW	0,1073	0,00240	0,00080	0,00000
N3\S7502_G0.RAW	0,4524	0,00300	0,00180	0,00150
N3\S5000_N0.RAW	0,5300	0,00270	0,00210	0,00250
N3\S0500_N0.RAW	0,4045	0,00740	0,00740	0,00230
N3\S0505_R2.RAW	0,9729	0,00330	0,00350	0,00290
N3\S1000_N0.RAW	0,4463	0,00270	0,00860	0,00060
N3\S9000_N0.RAW	0,4566	0,01090	0,00730	0,02200
N3\S1005_R2.RAW	0,9819	0,00230	0,00280	0,00400
N3\S6000_N0.RAW	0,5525	0,01310	0,00920	0,00240
N3\S7000_N0.RAW	0,5156	0,00310	0,00340	0,01050
N3\S7502_Y0.RAW	0,2390	0,00180	0,01370	0,00720
N3\S2000_N0.RAW	0,2704	0,00350	0,01800	0,01760
N3\S8000_N0.RAW	0,4836	0,00330	0,00410	0,00450
N3\S0502_R0.RAW	0,2180	0,00210	0,00580	0,03230
N3\S3000_N0.RAW	0,3609	0,00710	0,04450	0,02720
N3\S4000_N0.RAW	0,4575	0,01410	0,01410	0,01190
N3\S7502_R0.RAW	0,2977	0,00140	0,03510	0,01540
N3\S4502_R0.RAW	0,6948	0,00200	0,01520	0,00840
N3\S1002_R0.RAW	0,2232	0,00530	0,01030	0,00430
N3\S2502_R0.RAW	0,2405	0,00330	0,01470	0,01570
error_max		0,0323	0,0445	0,0141
error_min		0,0000	0,0000	0,0000

En nom de "l'al.leatòrietat" aquestes simulacions s'han repetit un total de 10 vegades, l'error màxim més petit s'obté sempre amb el mètode 1, els altres mètodes tripliquen i quadrupliquen l'error. Pertant s'escull el mètode 1 per donar valor als píxels de l'eix.

C.4 Validessa del mètode

A la taula següent hi ha els resultats per totes les imatges de la mostra (1096 imatges) amb píxels a l'eix de gris (en total 180); classificades per escala creixent de l'error ($|mH - mH+| = \varepsilon$). Es pot remarcar el fet que solsament 25 de les 180 (13,8%) imatges presenten variacions en el valor de μ_H superiors a $0.008 = \varepsilon_2$, d'aquestes 25 només 8 tenen menys de 300 píxels a l'eix. Si augmentem una mica la tolerància, 48 de les 180 imatges (26,6%) presenten variacions en el valor de μ_H superiors a $0.004 = \varepsilon_1$, de les quals només tres tenen menys de 100 píxels a l'eix. Per a totes les imatges el que es fa es redefinir la mostra de tonalitats en tots els píxels de l'eix, per tant els resultats són satisfactoris en tant que variant en més d'un 10% dels casos tenim concordància en la part entera de la tonalitat, $([0, 255])$. El nostre consell és que en el casos de més del 30% de valors de la mostra sobre l'eix s'ha de rebutjar la imatge per dolenta, és a dir cap càlcul amb aquesta imatge es decisiu.

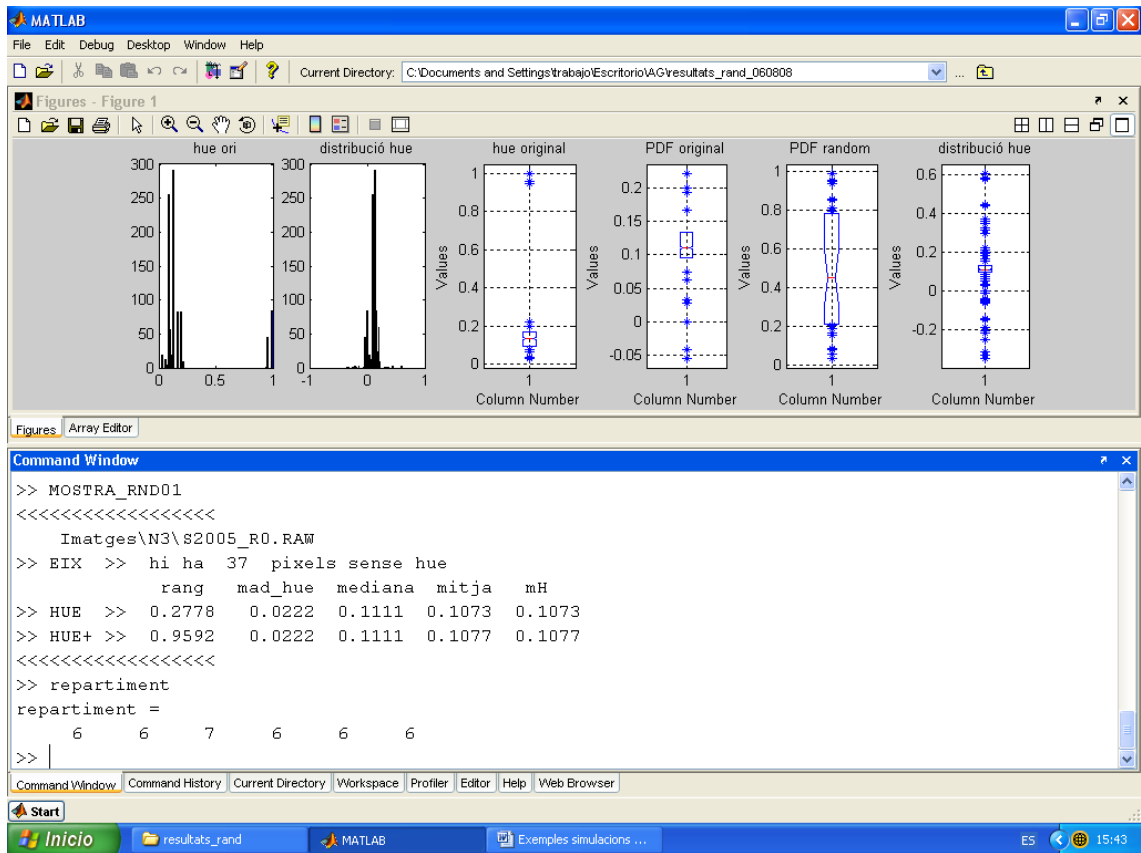
Taula C.2 Simulacions classificades per escala creixent de la columna error.

imatge	μ_H	Mèt. 1	eix	ε	imatge	μ_H	Mèt. 1	eix	ε
N1\S0505_R2	0,0139	0,0139	5	0	N1\S0505_G0	0,3417	0,341	205	0,0007
N6\S7502_Y0	0,306	0,306	18	0	N2\S7000_N0	0,4894	0,4887	440	0,0007
N6\S1002_R0	0,3323	0,3324	5	1E-04	N1\S0502_Y0	0,1633	0,164	3	0,0007
N1\S7020_B3	0,4848	0,4849	8	1E-04	N1\S1002_Y0	0,1546	0,1553	5	0,0007
N5\S4000_N0	0,482	0,4821	9	1E-04	N1\S1005_G2	0,2246	0,2253	56	0,0007
N2\S9000_N0	0,3745	0,3746	330	1E-04	N2\S2502_R0	0,0921	0,0914	360	0,0007
N2\S7020_R0	0,092	0,0921	20	0,0001	N1\S0510_R6	0,7189	0,7182	3	0,0007
N1\S0505_G2	0,2155	0,2156	41	0,0001	N1\S0505_B0	0,5772	0,5765	4	0,0007
N2\S1000_N0	0,3496	0,3495	546	0,0001	N4\S5000_N0	0,5276	0,5268	4	0,0008
N2\S1002_B0	0,5282	0,528	4	0,0002	N1\S7020_R0	0,166	0,1652	81	0,0008
N3\S0505_R0	0,1513	0,1511	7	0,0002	N2\S7020_R2	0,0188	0,0196	19	0,0008
N1\S7020_B0	0,5143	0,5145	21	0,0002	N1\S1005_B0	0,5691	0,5683	13	0,0008
N1\S0505_B5	0,491	0,4908	115	0,0002	N5\S7502_G0	0,5036	0,5045	8	0,0009
N3\S7020_R0	0,0702	0,07	1	0,0002	N2\S7502_Y0	0,2775	0,2784	196	0,0009
N3\S4502_Y0	0,2009	0,2007	2	0,0002	N5\S6000_N0	0,5648	0,5639	4	0,0009
N4\S4502_Y0	0,2248	0,225	5	0,0002	N2\S2005_R6	0,6464	0,6455	20	0,0009
N5\S7502_Y0	0,2904	0,2906	230	0,0002	N3\S2005_R0	0,1073	0,1083	37	0,001
N3\S1002_G0	0,4273	0,4276	1	0,0003	N1\S0510_G2	0,2464	0,2474	7	0,001
N1\S0510_G0	0,3364	0,3361	6	0,0003	N1\S0510_B5	0,4843	0,4833	16	0,001
N1\S7020_Y0	0,2059	0,2056	1	0,0003	N4\S2005_R0	0,1169	0,1179	30	0,001
N1\S0502_R0	0,0764	0,0761	13	0,0003	N5\S8000_N0	0,5089	0,5079	88	0,001
N2\S2005_R0	0,0928	0,0925	18	0,0003	N1\S7502_Y0	0,2851	0,2841	213	0,001
N2\S4502_Y0	0,1926	0,1929	20	0,0003	N1\S1000_N0	0,0196	0,0206	240	0,001
N2\S0505_R0	0,1208	0,1205	2	0,0003	N1\S2005_B5	0,5107	0,5096	186	0,0011
N2\S2005_G2	0,3256	0,3259	1	0,0003	N3\S0502_R0	0,218	0,2169	271	0,0011
N1\S7020_B5	0,4724	0,4727	3	0,0003	N3\S2502_G0	0,3858	0,3869	3	0,0011
N5\S0500_N0	0,4275	0,4278	14	0,0003	N5\S1005_R2	0,9637	0,9649	7	0,0012
N3\S7502_B0	0,5141	0,5137	16	0,0004	N1\S0505_R6	0,7359	0,7347	136	0,0012
N1\S2005_R2	0,0049	0,0053	8	0,0004	N4\S7502_G0	0,4623	0,4635	26	0,0012
N1\S7020_Y2	0,1749	0,1745	2	0,0004	N1\S2005_G0	0,386	0,3848	116	0,0012
N4\S0502_R0	0,1982	0,1986	227	0,0004	N2\S2502_G0	0,3429	0,3416	98	0,0013
N2\S1005_G0	0,3906	0,3911	1	0,0005	N5\S7502_R0	0,6825	0,6838	409	0,0013
N1\S0505_R0	0,087	0,0865	2	0,0005	N6\S2005_R2	0,0015	0,0002	54	0,0013
N1\S2005_G6	0,1959	0,1954	5	0,0005	N2\S0502_G0	0,416	0,4173	11	0,0013
N1\S2502_Y0	0,1775	0,178	9	0,0005	N1\S7502_B0	0,3948	0,3961	249	0,0013
N2\S6000_N0	0,4943	0,4938	339	0,0005	N4\S1002_R0	0,2949	0,2962	550	0,0013
N2\S0505_R6	0,6132	0,6137	5	0,0005	N5\S4502_Y0	0,2417	0,2431	12	0,0014
N5\S0505_R2	0,9269	0,9263	38	0,0006	N1\S0502_G0	0,264	0,2654	359	0,0014
N1\S7020_G0	0,4031	0,4037	4	0,0006	N1\S6000_N0	0,3294	0,328	433	0,0014
N5\S2000_N0	0,3045	0,3039	36	0,0006	N2\S1005_R2	0,0173	0,0188	9	0,0015
N2\S3000_N0	0,2908	0,2914	384	0,0006	N6\S2502_R0	0,3265	0,328	33	0,0015
N5\S0502_R0	0,214	0,2146	204	0,0006	N1\S7020_R2	0,1425	0,144	192	0,0015
N2\S2502_B0	0,5319	0,5313	6	0,0006	N5\S1002_R0	0,2294	0,2279	500	0,0015
N2\S1005_R6	0,6115	0,6122	3	0,0007	N2\S4502_R0	0,669	0,6706	425	0,0016
N6\S8000_N0	0,4908	0,4915	4	0,0007	N1\S1002_R0	0,0637	0,0621	39	0,0016

Imatge	μ_H	Mèt. 1	eix	ε	Imatge	μ_H	Mèt. 1	eix	ε
N5\S4502_R0	0,6277	0,6261	438	0,0016	N2\S5000_NO	0,5007	0,5051	305	0,0044
N1\S1005_R2	0,0053	0,0036	37	0,0017	N3\S0505_R2	0,9729	0,9681	117	0,0048
N3\S7000_NO	0,5156	0,5173	211	0,0017	N3\S1005_R2	0,9819	0,9771	163	0,0048
N1\S2005_G2	0,2955	0,2937	70	0,0018	N1\S7020_R6	0,6054	0,6006	333	0,0048
N4\S7502_Y0	0,2574	0,2592	233	0,0018	N4\S2000_NO	0,3026	0,2975	132	0,0051
N1\S1005_R6	0,771	0,7728	138	0,0018	N2\S0502_R0	0,1542	0,1491	199	0,0051
N1\S2000_NO	0,1397	0,1378	122	0,0019	N3\S9000_NO	0,4566	0,4618	160	0,0052
N3\S2502_R0	0,2405	0,2386	595	0,0019	N4\S4502_R0	0,6934	0,688	282	0,0054
N2\S4502_B0	0,5245	0,5226	63	0,0019	N2\S1002_G0	0,3825	0,388	136	0,0055
N1\S2502_G0	0,249	0,2509	343	0,0019	N1\S7000_NO	0,3224	0,328	392	0,0056
N1\S2005_R0	0,0932	0,0952	13	0,002	N3\S2000_NO	0,2704	0,2645	253	0,0059
N1\S3000_NO	0,1864	0,1884	366	0,002	N2\S7502_B0	0,4556	0,4615	79	0,0059
N5\S3000_NO	0,4183	0,4204	34	0,0021	N1\S4502_B0	0,5211	0,5147	358	0,0064
N5\S1000_NO	0,4509	0,453	47	0,0021	N1\S2005_R6	0,7677	0,7613	207	0,0064
N1\S1005_G0	0,3527	0,3506	298	0,0021	N1\S4000_NO	0,2457	0,2383	441	0,0074
N3\S4502_G0	0,4194	0,4216	17	0,0022	N2\S0500_NO	0,3702	0,3626	330	0,0076
N5\S7000_NO	0,5598	0,5576	34	0,0022	N6\S0505_R2	0,2691	0,2767	487	0,0076
N3\S3000_NO	0,3609	0,3587	321	0,0022	N4\S7000_NO	0,5374	0,5297	179	0,0077
N1\S1002_G0	0,2202	0,2224	397	0,0022	N1\S1002_B0	0,6204	0,6126	272	0,0078
N5\S2005_R0	0,1055	0,1033	10	0,0022	N3\S1000_NO	0,4463	0,4543	138	0,008
N1\S2502_R0	0,0863	0,0885	157	0,0022	N1\S8000_NO	0,296	0,2879	300	0,0081
N3\S1005_R6	0,5645	0,5622	8	0,0023	N3\S4000_NO	0,4575	0,4663	346	0,0088
N3\S8000_NO	0,4836	0,4812	264	0,0024	N4\S1000_NO	0,4375	0,4465	150	0,009
N1\S1005_B5	0,5037	0,5011	162	0,0026	N2\S4502_G0	0,4286	0,4377	96	0,0091
N4\S0500_NO	0,3988	0,3961	35	0,0027	N4\S9000_NO	0,4726	0,4818	159	0,0092
N4\S8000_NO	0,482	0,4793	126	0,0027	N3\S0500_NO	0,4045	0,4138	78	0,0093
N2\S2000_NO	0,223	0,2257	219	0,0027	N2\S7502_G0	0,4293	0,4406	165	0,0113
N2\S2005_R2	0,9689	0,9662	15	0,0027	N2\S7502_R0	0,2872	0,2987	417	0,0115
N1\S2005_B0	0,562	0,5592	32	0,0028	N2\S1002_R0	0,1215	0,1098	417	0,0117
N2\S0505_R2	0,9916	0,9887	49	0,0029	N3\S1002_R0	0,2232	0,235	519	0,0118
N3\S7502_G0	0,4524	0,4555	58	0,0031	N6\S1005_R2	0,1629	0,1748	359	0,0119
N1\S7502_R0	0,2408	0,2439	287	0,0031	N1\S9000_NO	0,3033	0,2911	318	0,0122
N3\S5000_NO	0,53	0,5268	64	0,0032	N3\S7502_R0	0,2977	0,3102	460	0,0125
N4\S7502_R0	0,6339	0,6371	400	0,0032	N6\S7502_R0	0,4614	0,4746	384	0,0132
N5\S9000_NO	0,5304	0,5271	87	0,0033	N3\S6000_NO	0,5525	0,5374	171	0,0151
N4\S4000_NO	0,4766	0,4799	188	0,0033	N4\S3000_NO	0,4118	0,427	124	0,0152
N1\S4502_G0	0,287	0,2837	253	0,0033	N6\S4502_R0	0,4395	0,4564	225	0,0169
N1\S0500_NO	0,1128	0,1161	291	0,0033	N1\S5000_NO	0,3838	0,3662	400	0,0176
N1\S7502_G0	0,3482	0,3517	207	0,0035	N2\S8000_NO	0,4166	0,4345	345	0,0179
N4\S6000_NO	0,5557	0,5521	33	0,0036	N1\S2502_B0	0,5513	0,5297	373	0,0216
N4\S1005_R2	0,9916	0,9877	60	0,0039	N1\S4502_R0	0,1389	0,1142	313	0,0247
N1\S4502_Y0	0,1936	0,1896	108	0,004	N4\S2502_R0	0,4481	0,4782	546	0,0301
N4\S0505_R2	0,9872	0,9913	101	0,0041	N2\S4000_NO	0,4043	0,4348	395	0,0305
N3\S4502_R0	0,6948	0,6907	462	0,0041	N5\S2502_R0	0,4385	0,4694	607	0,0309
N3\S7502_Y0	0,239	0,2433	240	0,0043	N1\S0502_B0	0,5901	0,5565	374	0,0336

C.5.3 Píxels a l'eix: 77

La imatge N3\S2005_R0 té 37 píxels a l'eix (o té 3,7%) a l'eix de gris, el valor de μ_H és manté dins la regió (2), la desviació és 0.0006, el classifico com a constant per simulació.



Imatge C.5.3.1

D Simulacions de les fórmules de la mitja i de la variància

Per aquest treball s'ha fet ús del software MATLAB.

D.1 Fitxers

Els resultats del recompte per regions es troben recollits en els fitxers següents:

MATLAB	DADES	RESULTATS
procesa_R_molts	N1.txt	Paper_Control_M123_NR_noeix
procesa_NR_molts	N2.txt	Paper_Control_Var45_NR_noeix
fun_rgb_tetra	N3.txt	Paper_Control_12345_eix
fun_pdf_hsi	N4.txt	Paper_resum_errors_F123
fun2	N5.txt	Paper_resum_errors_F4F5
aproxglobal	N6.txt	
fun92		
fun6		
fun7		
dispersio		

D.2 Fórmules

Per a la mitja s'han testat les fórmules F1, F2 i F3 que es corresponen a

$$\widetilde{\mu}_H^T \approx H(\mu) \quad \text{F1}$$

$$\widetilde{\mu}_H^P \approx H(\mu) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu) \sigma_B^2 \right); \quad \text{F2}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_H &= H(\mu_{RGB}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\mu_{RGB}) \sigma_R^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial G^2}(\mu_{RGB}) \sigma_G^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial B^2}(\mu_{RGB}) \sigma_B^2 \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 H}{\partial R \partial B G}(\mu_{RGB}) \sigma_{RG} + \frac{\partial^2 H}{\partial G \partial B}(\mu_{RGB}) \sigma_{GB} + \frac{\partial^2 H}{\partial B \partial R}(\mu_{RGB}) \sigma_{BR} \end{aligned} \quad \text{F3}$$

Per a la variança s'han testat les fórmules F4 i F5 corresponen a

$${}^P \widetilde{\sigma}_H^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu) \right)^2 \sigma_B^2. \quad \text{F4}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_H^2 = & \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_G^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right)^2 \sigma_B^2 + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{RG} + \\ & + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial G}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{GB} + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial B}(\mu_{RGB}) \frac{\partial H}{\partial R}(\mu_{RGB}) \right) \sigma_{BR} \end{aligned} \quad \text{F5}$$

Els resultats després de validar les fórmules per a totes les imatges de la mostra són als documents del directori "C:\els meus arxius\la meva recerca\FITXERS_Mitja_Var_Hue\resultats" i es classifiquen en funció de les cotes d'error $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

D.3 Simulacions fórmules F1, F2 i F3.

La taula D.1 hi ha els resultats de les fórmules F1, F2, F3 per a totes les imatges del nivell N1 sense píxels a l'eix, les dades de cada columna són, nom de la imatge, valor de la mitja segons la fórmula estadística (valor exacte), valors aproximats: f_1, f_2 i f_3 , cota error segons el criteri de classificació establert, error mínim és $\min(|mH - f_1|, |mH - f_2|, |mH - f_3|)$, i $er.f_i = |mH - f_i| / \min(|mH - f_1|, |mH - f_2|, |mH - f_3|)$ per a $i=1,2,3$. El fet $er.f_i = 1$ indica que la fórmula f_i dona error mínim. Podeu observar per aquesta mostra que per aquestes imatges la fórmula F3 ens dona la millor aproximació i en quasi tots els casos amb cota d'error $\varepsilon=0.001$. En concret per a les 119 imatges del nivell N1 sense píxels a l'eix, la fórmula F3 dona error mínim en 93 casos, i per a 109 imatges compleix $|mH - f_3| < 0.001$, les 10 restants compleixen $|mH - f_3| < 0.008$.

Taula D.1 Resultats de les simulacions de les fórmules F1, F2 i F3 per a imatges del nivell d'il.luminació N1 sense píxels a l'eix.

N1 Nom	Aprox. mitja mostral				cota	error	Ratios error		
	mH	f1	f2	f3	error	minim	r_ef1	r_ef2	r_ef3
S0540_Y6	0,0574	0,0574	0,0573	0,0574	0,001	4,7E-08	762,8	2454,7	1
S0570_G6	0,199	0,1991	0,199	0,199	0,001	9,7E-08	569,9	156,7	1
S1070_G6	0,2058	0,2059	0,2059	0,2058	0,001	3,3E-07	284	153,7	1
S1070_Y2	0,1032	0,1032	0,1033	0,1032	0,001	3,5E-07	14,9	85,1	1
S0520_Y2	0,1217	0,1218	0,122	0,1217	0,001	4,2E-07	114,9	723,7	1
S0570_Y2	0,1126	0,1126	0,1126	0,1126	0,001	6,3E-07	22,8	92,1	1
S0520_G6	0,1868	0,1869	0,1864	0,1868	0,001	6,8E-07	109,9	543,6	1
S1020_Y6	0,0633	0,0634	0,0632	0,0633	0,001	7,7E-07	189,8	51,9	1
S1020_G6	0,1825	0,1831	0,1825	0,1825	0,001	9,4E-07	579,4	1	16,2
S1070_Y0	0,1526	0,1526	0,1527	0,1526	0,001	1,1E-06	28,4	65	1
S0540_Y2	0,1223	0,1223	0,1224	0,1223	0,001	1,1E-06	25	101,8	1
S0570_G2	0,3078	0,3077	0,308	0,3078	0,001	1,2E-06	76,4	165,7	1
S0540_G6	0,1925	0,1925	0,1925	0,1925	0,001	1,4E-06	34,4	1	2,2
S2020_R6	0,7005	0,7005	0,6986	0,7001	0,001	1,6E-06	1	1182,2	215,7
S1070_Y6	0,0417	0,0417	0,0415	0,0417	0,001	1,8E-06	7,8	80,1	1
S2020_B5	0,4769	0,4751	0,4771	0,4769	0,001	2,2E-06	844,1	83	1
S0570_Y6	0,0415	0,0416	0,0414	0,0415	0,001	3,3E-06	42,4	23,5	1
S1040_Y2	0,1145	0,1145	0,1146	0,1145	0,001	3,5E-06	13,6	22,9	1
S2070_Y2	0,1003	0,1003	0,1005	0,1003	0,001	3,5E-06	5,3	34,5	1
S0540_R0	0,0166	0,0169	0,0164	0,0166	0,001	3,6E-06	75,2	45,9	1
S1040_G6	0,1942	0,1943	0,1942	0,1942	0,001	3,8E-06	24,7	19	1
S2070_Y6	0,0408	0,0408	0,0405	0,0407	0,001	3,9E-06	17,6	71,4	1
S1070_R2	0,9654	0,9652	0,9655	0,9654	0,001	4,3E-06	47,5	2	1
S0540_R2	0,9581	0,9578	0,9581	0,9581	0,001	5,2E-06	47	9,1	1
S1040_R6	0,6982	0,6982	0,6978	0,6982	0,001	7,4E-06	1,2	53,6	1
S2070_Y0	0,1521	0,1519	0,1523	0,1521	0,001	7,4E-06	30,4	21,8	1
S1040_B3	0,5307	0,5307	0,5303	0,5307	0,001	7,6E-06	1	52,7	4,1
S1020_Y2	0,1272	0,1271	0,1276	0,1272	0,001	7,9E-06	6,6	55,8	1
S2020_R0	0,0275	0,0282	0,0266	0,0275	0,001	8,1E-06	91,1	112,6	1
S0540_B3	0,5273	0,5277	0,5271	0,5273	0,001	8,4E-06	43,5	28,6	1
S0540_B0	0,5735	0,5732	0,5733	0,5735	0,001	1,1E-05	25,2	23,4	1
S0505_G6	0,1721	0,1721	0,167	0,1691	0,001	1,3E-05	1	407,9	244,7
S0510_Y6	0,0782	0,0786	0,0784	0,0781	0,001	1,3E-05	31,2	17,2	1
S1040_Y6	0,0563	0,0565	0,0562	0,0563	0,001	1,3E-05	13,2	10,4	1
S2070_G6	0,2064	0,2067	0,2066	0,2065	0,001	1,4E-05	14,2	10	1
S4040_R6	0,6915	0,6915	0,6879	0,6906	0,001	1,5E-05	1	232,3	60,1
S0540_G0	0,4011	0,4013	0,401	0,4011	0,001	1,7E-05	12,1	4,8	1
S0510_Y2	0,1405	0,14	0,1409	0,1405	0,001	1,8E-05	31,6	22,7	1
S4040_Y2	0,113	0,1124	0,1133	0,113	0,001	2,0E-05	29,4	11,4	1
S1040_R0	0,0135	0,0139	0,0131	0,0135	0,001	2,1E-05	20,9	15,7	1
S0520_Y6	0,071	0,0714	0,0711	0,071	0,001	2,3E-05	17,4	4,1	1
S1040_R2	0,9699	0,9696	0,97	0,9699	0,001	2,3E-05	11,3	5,7	1
S2020_G6	0,1922	0,1924	0,1916	0,1923	0,001	2,4E-05	6,1	26,3	1

S1020_B0	0,5768	0,5763	0,5764	0,5768	0,001	2,5E-05	18,2	16,3	1
S4020_G0	0,3839	0,3846	0,3822	0,3839	0,001	2,7E-05	26,7	62,7	1
S1040_B0	0,5849	0,5847	0,5848	0,5849	0,001	2,8E-05	6,2	2,3	1
S0520_B0	0,5731	0,5724	0,5725	0,5731	0,001	2,9E-05	24,1	21	1
S1070_G2	0,3078	0,3076	0,3081	0,3077	0,001	2,9E-05	6,1	13,4	1
S2020_Y2	0,1253	0,1249	0,1256	0,1252	0,001	2,9E-05	11,3	12,8	1
S2070_R0	0,0176	0,0176	0,0168	0,0175	0,001	3,0E-05	1	26	3,8
S0570_Y0	0,1638	0,1637	0,1639	0,1638	0,001	3,4E-05	1	3,7	1
S4040_B0	0,5805	0,5799	0,58	0,5806	0,001	3,7E-05	17,9	13,8	1
S2020_Y6	0,0768	0,0766	0,0765	0,0768	0,001	3,7E-05	4	6,4	1
S1040_G0	0,4041	0,4045	0,404	0,4041	0,001	4,0E-05	10,1	1	1
S4040_G6	0,2045	0,2048	0,2042	0,2045	0,001	4,1E-05	7,7	6,6	1
S1040_Y0	0,1567	0,1565	0,1568	0,1567	0,001	4,1E-05	4,5	2,5	1
S0540_G2	0,3046	0,3041	0,3048	0,3046	0,001	4,3E-05	11	5,8	1
S2020_B0	0,5801	0,5798	0,5798	0,5801	0,001	4,7E-05	5,2	6,7	1
S4020_Y2	0,1279	0,1267	0,1281	0,128	0,001	5,0E-05	23,5	3,1	1
S0520_R0	0,0221	0,0228	0,0217	0,0221	0,001	5,4E-05	12,7	7,2	1
S1020_R2	0,9734	0,9727	0,974	0,9734	0,001	5,9E-05	11,8	10,6	1
S0520_R6	0,6998	0,6999	0,6977	0,6996	0,001	6,1E-05	1	35	3,5
S1040_G2	0,2966	0,2962	0,297	0,2967	0,001	6,9E-05	6,1	6,1	1
S1020_R0	0,0164	0,0166	0,0155	0,0163	0,001	7,1E-05	2,8	13,7	1
S4040_Y6	0,059	0,0594	0,0581	0,059	0,001	7,2E-05	5,7	11,5	1
S1005_Y2	0,1386	0,1387	0,1404	0,1387	0,001	7,5E-05	1,3	23,7	1
S1020_R6	0,7022	0,7023	0,6998	0,7021	0,001	7,6E-05	1,3	30,9	1
S0520_R2	0,9758	0,9748	0,9759	0,976	0,001	7,8E-05	12,5	1	2,3
S0520_Y0	0,1677	0,1678	0,1672	0,1676	0,001	8,1E-05	1	6,1	2
S0510_G6	0,1843	0,1848	0,1831	0,1843	0,001	8,9E-05	4,7	13,9	1
S1020_G0	0,3823	0,384	0,3822	0,3825	0,001	9,5E-05	17,8	1	2,1
S0540_Y0	0,1641	0,164	0,1643	0,1642	0,001	9,6E-05	1	1,8	1,6
S1020_Y0	0,1592	0,1588	0,1596	0,1593	0,001	9,7E-05	4,1	4,1	1
S1020_G2	0,2905	0,2892	0,2922	0,2906	0,001	1,1E-04	12,5	14,9	1
S2070_G2	0,3188	0,3183	0,3193	0,3189	0,001	1,1E-04	5	4,4	1
S4020_Y6	0,0676	0,0681	0,0673	0,0675	0,001	1,1E-04	4,8	2,7	1
S1020_B5	0,4809	0,4801	0,4817	0,481	0,001	1,3E-04	6,6	5,9	1
S2020_Y0	0,1659	0,1661	0,167	0,1665	0,001	1,3E-04	1	7,6	4,4
S2020_G2	0,3009	0,2989	0,3019	0,3011	0,001	1,4E-04	15	7,2	1
S0520_G0	0,3881	0,3895	0,3877	0,3883	0,001	1,5E-04	9,3	2,6	1
S2020_G0	0,3753	0,3763	0,374	0,3751	0,001	1,6E-04	6,7	8,2	1
S4040_R0	0,0316	0,0317	0,0303	0,0314	0,001	1,6E-04	1	8,1	1
S2020_R2	0,9786	0,9776	0,9798	0,9788	0,001	1,7E-04	6,1	7,1	1
S0520_G2	0,2965	0,2941	0,297	0,2967	0,001	1,8E-04	13,1	3,2	1
S0510_R0	0,0376	0,0389	0,0364	0,0374	0,001	1,8E-04	7,4	6,9	1
S0520_B5	0,486	0,4848	0,4878	0,4862	0,001	2,3E-04	5,1	7,9	1
S4020_B0	0,5538	0,5563	0,5534	0,5536	0,001	2,3E-04	11,1	1,9	1
S1070_R0	0,0041	0,0044	0,0036	0,0038	0,001	2,4E-04	1,1	2	1
S4040_G0	0,389	0,3894	0,3876	0,3887	0,001	2,5E-04	1,5	5,6	1
S4040_B3	0,523	0,5252	0,5213	0,5227	0,001	2,7E-04	8,3	6,4	1

24 Mitjana i variància en la component tonalitat del color

S0505_Y6	0,0983	0,0971	0,0986	0,0987	0,001	2,8E-04	4,5	1	1,4
S7020_Y6	0,1164	0,1136	0,1207	0,1161	0,001	2,8E-04	10,1	15,5	1
S4020_R0	0,0404	0,0395	0,0375	0,0401	0,001	2,9E-04	3,2	9,8	1
S0510_Y0	0,1709	0,1712	0,1696	0,1703	0,001	3,0E-04	1	4,1	2
S0510_R2	0,9897	0,99	0,996	0,9926	0,001	3,0E-04	1	20,8	9,3
S1040_B5	0,5073	0,5076	0,5063	0,507	0,001	3,2E-04	1	3,3	1,1
S4020_B5	0,4777	0,4763	0,4785	0,478	0,001	3,4E-04	4	2,4	1
S1005_Y0	0,1667	0,1671	0,1642	0,165	0,001	3,5E-04	1	7,2	4,8
S4040_R2	0,985	0,9847	0,9873	0,9858	0,001	3,6E-04	1	6,2	2
S4040_Y0	0,1601	0,1596	0,1609	0,1605	0,001	3,8E-04	1,3	2	1
S0505_Y2	0,1568	0,1559	0,1594	0,1572	0,001	3,9E-04	2,5	6,6	1
S1005_G6	0,1883	0,1895	0,1829	0,1879	0,001	4,0E-04	3,1	13,7	1
S1005_Y6	0,1027	0,1023	0,1033	0,1032	0,001	4,2E-04	1,1	1,3	1
S4020_B3	0,5043	0,5047	0,4984	0,5036	0,001	4,7E-04	1	12,6	1,4
S2020_B3	0,5192	0,5213	0,5178	0,5187	0,001	4,9E-04	4,2	2,9	1
S4020_Y0	0,1604	0,1599	0,1619	0,161	0,001	5,2E-04	1	2,8	1,1
S1020_B3	0,5181	0,5204	0,5176	0,5176	0,001	5,3E-04	4,2	1	1
S0510_B0	0,5577	0,5611	0,5553	0,5572	0,001	5,7E-04	5,9	4,4	1
S2005_Y6	0,1089	0,1072	0,1106	0,1083	0,001	5,8E-04	3	3	1
S0520_B3	0,5156	0,5176	0,5142	0,515	0,001	6,1E-04	3,2	2,4	1
S4020_R2	0,9751	0,9744	0,9802	0,9804	0,001	7,2E-04	1	7,1	7,5
S4040_G2	0,3179	0,317	0,3204	0,3187	0,001	7,5E-04	1,2	3,4	1
S0505_Y0	0,1788	0,1799	0,1772	0,1779	0,001	8,8E-04	1,3	1,8	1
S0510_B3	0,4992	0,5001	0,4891	0,4958	0,001	9,3E-04	1	10,9	3,6
S2005_Y0	0,1689	0,1698	0,1627	0,1649	0,001	9,8E-04	1	6,3	4
S4040_B5	0,495	0,4939	0,4963	0,4966	0,002	1,1E-03	1	1,2	1,4
S2005_Y2	0,1548	0,1526	0,1603	0,156	0,002	1,2E-03	1,8	4,5	1
S4020_R6	0,6922	0,6906	0,6847	0,6891	0,002	1,6E-03	1	4,7	2
S1005_R0	0,0808	0,0834	0,0832	0,0825	0,002	1,6E-03	1,6	1,4	1

Taula D.2 Recompte de casos de la taula D.1

119	condició	$\epsilon=0.001$		$\epsilon=0.002$		$\epsilon=0.004$		$\epsilon=0.008$		$\epsilon = 0.016$	
N1	ef1 < ϵ	92	77,3	109	91,6	119	100,0	119	100,0	119	100,0
	ef2 < ϵ	78	65,5	99	83,2	109	91,6	118	99,2	119	100,0
	ef3 < ϵ	109	91,6	113	95,0	118	99,2	119	100,0	119	100,0
	f1_f2_f3	68	57,1	93	78,2	109	91,6	118	99,2	119	100,0
	f1_nf2_nf3	6	5,0	6	5,0	1	0,8	0	0,0	0	0,0
	nf1_nf2_f3	13	10,9	4	3,4	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_nf3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_f3	10	8,4	6	5,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	f1_nf2_f3	18	15,1	10	8,4	9	7,6	1	0,8	0	0,0
	f1_f2_nf3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
nf1_nf2_nf3	4	3,4	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	

La taula D.2 recull el fet que la F3 és la millor fórmula per aproximar el descriptor estadístic mitja per a les dades de la taula D.1. Les columnes de la taula D.2 són: $ef1 < \varepsilon$ significa si l'error en la fórmula 1 és per sota de la cota, $f1_f2_f3$ significa que les tres fórmules donen un valor aproximat correcte i $f1_nf2_nf3$ significa que f1 dona un valor aproximat correcte i no ho fan f2 i f3. Observeu el comentat amb anterioritat, per a 109 imatges F3 compleix $|mH - f_3| < 0.001$, les 10 restants compleixen com a màxim $|mH - f_3| < 0.008$. Observem també el fet que augmentar la toleràcia implica que sempre la F3 doni un valor aproximat correcte. Totes les imatges tenen una aproximació vàlida, reduint-se a zero el nombre d'imatges sense valor aproximat. A continuació es presenten les taules resum de tots els nivells, amb lectures similars.

Taula D.3 Recompte de casos per a les imatges del nivell N2 sense píxels a l'eix.

145		$\varepsilon=0.001$		$\varepsilon=0.002$		$\varepsilon=0.004$		$\varepsilon=0.008$		$\varepsilon = 0.016$	
N2	$ef1 < \varepsilon$	123	84,8	141	97,2	145	100,0	145	100,0	145	100,0
	$ef2 < \varepsilon$	107	73,8	118	81,4	129	89,0	140	96,6	144	99,3
	$ef3 < \varepsilon$	135	93,1	141	97,2	144	99,3	144	99,3	145	100,0
	$f1_f2_f3$	100	69,0	118	81,4	129	89,0	140	96,6	144	99,3
	$f1_nf2_nf3$	7	4,8	3	2,1	1	0,7	1	0,7	0	0,0
	$nf1_nf2_f3$	12	8,3	3	2,1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	$nf1_f2_nf3$	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	$nf1_f2_f3$	7	4,8	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	$f1_nf2_f3$	16	11,0	20	13,8	15	10,3	4	2,8	1	0,7
	$f1_f2_nf3$	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
$nf1_nf2_nf3$	3	2,1	1	0,7	0	0,0	0	0,0	0	0,0	

Per al nivell N2, per a 135 imatges d'un total de 145 F3 compleix $|mH - f_3| < 0.001$, les 10 restants compleixen $|mH - f_3| < 0.008$. Totes les imatges tenen una aproximació vàlida, reduint-se a zero el nombre d'imatges sense valor aproximat.

Taula D.4 Recompte de casos per a les imatges del nivell N3 sense píxels a l'eix.

155		$\varepsilon=0.001$		$\varepsilon=0.002$		$\varepsilon=0.004$		$\varepsilon=0.008$		$\varepsilon = 0.016$	
N3	$ef1 < \varepsilon$	135	87,1	143	92,3	152	98,1	154	99,4	155	100,0
	$ef2 < \varepsilon$	116	74,8	133	85,8	141	91,0	148	95,5	151	97,4
	$ef3 < \varepsilon$	142	91,6	149	96,1	153	98,7	154	99,4	155	100,0
	$f1_f2_f3$	110	71,0	127	81,9	139	89,7	147	94,8	151	97,4
	$f1_nf2_nf3$	5	3,2	3	1,9	2	1,3	1	0,6	0	0,0
	$nf1_nf2_f3$	7	4,5	4	2,6	1	0,6	0	0,0	0	0,0
	$nf1_f2_nf3$	1	0,6	1	0,6	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	$nf1_f2_f3$	5	3,2	5	3,2	2	1,3	1	0,6	0	0,0
	$f1_nf2_f3$	20	12,9	13	8,4	11	7,1	6	3,9	4	2,6
	$f1_f2_nf3$	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
$nf1_nf2_nf3$	7	4,5	2	1,3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	

Per al nivell N3, per a 142 imatges d'un total de 155 F3 compleix $|mH - f_3| < 0.001$, les 10 restants compleixen $|mH - f_3| < 0.008$. Totes les imatges tenen una aproximació vàlida, reduint-se a zero el nombre d'imatges sense valor aproximat.

Taula D.5 Recompte de casos per a les imatges del nivell N4 sense píxels a l'eix.

162		$\epsilon=0.001$		$\epsilon=0.002$		$\epsilon=0.004$		$\epsilon=0.008$		$\epsilon = 0.016$	
N4	ef1 < ϵ	141	87,0	155	95,7	160	98,8	162	100,0	162	100,0
	ef2 < ϵ	123	75,9	139	85,8	151	93,2	156	96,3	159	98,1
	ef3 < ϵ	151	93,2	157	96,9	160	98,8	162	100,0	162	100,0
	f1_f2_f3	117	72,2	136	84,0	150	92,6	156	96,3	159	98,1
	f1_nf2_nf3	3	1,9	2	1,2	1	0,6	0	0,0	0	0,0
	nf1_nf2_f3	9	5,6	3	1,9	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_nf3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_f3	5	3,1	2	1,2	1	0,6	0	0,0	0	0,0
	f1_nf2_f3	20	12,3	16	9,9	9	5,6	6	3,7	3	1,9
	f1_f2_nf3	1	0,6	1	0,6	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_nf2_nf3	7	4,3	2	1,2	1	0,6	0	0,0	0	0,0

Per al nivell N4, per a 151 imatges d'un total de 162 F3 compleix $|mH - f_3| < 0.001$, les 11 restants compleixen $|mH - f_3| < 0.008$. Totes les imatges tenen una aproximació vàlida, reduint-se a zero el nombre d'imatges sense valor aproximat.

Taula D.6 Recompte de casos per a les imatges del nivell N5 sense píxels a l'eix.

163		$\epsilon=0.001$		$\epsilon=0.002$		$\epsilon=0.004$		$\epsilon=0.008$		$\epsilon = 0.016$	
N5	ef1 < ϵ	150	92,0	154	94,5	162	99,4	163	100,0	163	100,0
	ef2 < ϵ	130	79,8	140	85,9	151	92,6	157	96,3	163	100,0
	ef3 < ϵ	156	95,7	161	98,8	163	100,0	163	100,0	163	100,0
	f1_f2_f3	125	76,7	137	84,0	150	92,0	157	96,3	163	100,0
	f1_nf2_nf3	4	2,5	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_nf2_f3	6	3,7	4	2,5	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_nf3	1	0,6	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_f3	4	2,5	3	1,8	1	0,6	0	0,0	0	0,0
	f1_nf2_f3	21	12,9	17	10,4	12	7,4	6	3,7	0	0,0
	f1_f2_nf3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_nf2_nf3	2	1,2	2	1,2	0	0,0	0	0,0	0	0,0

Per al nivell N5, per a 156 imatges d'un total de 163 F3 compleix $|mH - f_3| < 0.001$, les 7 restants compleixen $|mH - f_3| < 0.004$. Totes les imatges tenen una aproximació vàlida, reduint-se a zero el nombre d'imatges sense valor aproximat.

Per al nivell N6, la validessa de F3 és d'un 99,4%, hi ha una imatge que s'ajusta per la fórmula F1. La resta tenen la fórmula

Taula D.7 Recompte de casos per a les imatges del nivell N6 sense píxels a l'eix.

174		$\epsilon=0.001$		$\epsilon=0.002$		$\epsilon=0.004$		$\epsilon=0.008$		$\epsilon = 0.016$	
N6	ef1 < ϵ	159	91,4	167	96,0	171	98,3	173	99,4	174	100,0
	ef2 < ϵ	140	80,5	150	86,2	157	90,2	162	93,1	167	96,0
	ef3 < ϵ	166	95,4	168	96,6	172	98,9	173	99,4	173	99,4
	f1_f2_f3	137	78,7	148	85,1	157	90,2	162	93,1	167	96,0
	f1_nf2_nf3	2	1,1	2	1,1	1	0,6	0	0,0	1	0,6
	nf1_nf2_f3	6	3,4	1	0,6	2	1,1	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_nf3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	nf1_f2_f3	3	1,7	2	1,1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	f1_nf2_f3	20	11,5	17	9,8	13	7,5	11	6,3	6	3,4
	f1_f2_nf3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0	0	0,0
nf1_nf2_nf3	6	3,4	4	2,3	1	0,6	1	0,6	0	0,0	

A més de la validessa de l'aproximació també hem valorat el fet de quina fórmula ens dona l'aproximació amb error mínim. Vegeu la taula següent:

Taula D.8 Recompte d'error mínim per a les imatges de cada nivell sense píxels a l'eix.

N1/119	F1	F2	F3	Cap	N2/145	F1	F2	F3	Cap	N3/155	F1	F2	F3	Cap
<.001	21	7	91	4	<.001	19	2	122	3	<.001	20	6	124	7
<.002	23	7	93	0	<.002	20	2	123	1	<.002	22	7	127	2
<.004	23	7	93	0	<.004	21	2	123	0	<.004	23	7	128	0
<.008	23	7	93	0	<.008	21	2	123	0	<.008	23	7	128	0
<.016	23	7	93	0	<.016	21	2	123	0	<.016	23	7	128	0

N4/162	F1	F2	F3	Cap	N5/163	F1	F2	F3	Cap	N6/174	F1	F2	F3	Cap
<.001	18	4	134	7	<.001	18	10	141	2	<.001	51	42	151	6
<.002	22	4	136	2	<.002	18	10	141	2	<.002	52	42	152	4
<.004	23	4	136	1	<.004	19	10	142	0	<.004	53	42	154	1
<.008	23	4	137	0	<.008	19	10	142	0	<.008	53	42	154	1
<.016	23	4	137	0	<.016	19	10	142	0	<.016	54	42	154	0

Observeu que en tots els casos la F3 dona error mínim.

De totes maneres aquesta homogeneïtat es perd en el moment que afegim a l'estudi les imatges amb píxels a l'eix, per aquestes imatges les aproximacions del valor mig són més dèbils. Observeu les taules següents.

Taula D.9 Recompte d'error mínim per a les imatges amb píxels a l'eix de la mostra.

180	F1	F2	F3	Cap	180	F1	F2	F3	Cap
<.001	10	2	20	148	<.001	5,6	1,1	11,1	82,2
<.002	18	6	33	124	<.002	10,0	3,3	18,3	68,9
<.004	27	11	41	103	<.004	15,0	6,1	22,8	57,2
<.008	43	18	54	67	<.008	23,9	10,0	30,0	37,2
<.016	61	21	68	32	<.016	33,9	11,7	37,8	17,8

El conjunt d'imatges amb píxels a l'eix és d'un total de 180 imatges, d'aquestes sigui quina sigui la fórmula i la cota de l'error fixada hi ha imatges que es queden sense aproximació vàlida.

Taula D.10 Recompte de casos per a les imatges amb píxels a l'eix.

No Random	$\epsilon=0.001$	$\epsilon=0.002$	$\epsilon=0.004$	$\epsilon=0.008$	$\epsilon = 0.016$
ef1 < ϵ	10	5,6	24	13,3	50
ef2 < ϵ	4	2,2	10	5,6	26
ef3 < ϵ	20	11,1	39	21,7	58
T f1_f2_f3	0	0,0	2	1,1	12
O f1_nf2_nf3	10	5,6	14	7,8	12
T nf1_nf2_f3	18	10,0	24	13,3	17
S nf1_f2_nf3	2	1,1	3	1,7	3
nf1_f2_f3	2	1,1	5	2,8	7
f1_nf2_f3	0	0,0	8	4,4	22
f1_f2_nf3	0	0,0	0	0,0	4
nf1_nf2_nf3	148	82,2	124	68,9	103

Tal com ja he comentat amb anterioritat, per a les imatges amb píxels a l'eix resten un 18% d'imatges sense aproximació vàlida, i hi ha un empat entre F3 i F1 com a valors vàlids.

Per aquestes imatges, hi havia l'opció de donar valor random a la component tonalitat, en un supòsit que això milloraria l'aproximació. Vegem i comparem resultats.

Taula D.11 Recompte d'error mínim per a les imatges amb píxels a l'eix de la mostra.

180	F1	F2	F3	Cap	180	F1	F2	F3	Cap
<.001	10	0	17	153	<.001	5,6	0,0	9,4	85,0
<.002	17	2	32	129	<.002	9,4	1,1	17,8	71,7
<.004	27	6	41	106	<.004	15,0	3,3	22,8	58,9
<.008	44	9	55	73	<.008	24,4	5,0	30,6	40,6
<.016	65	11	67	39	<.016	36,1	6,1	37,2	21,7

Donant valor random als píxels sense tonalitat, fins hi tot augmenta el nombre d'imatges que no tenen aproximació vàlida. Abans de rebutjar aquesta opció farem també l'estudi de les fórmules F4 i F5.