

**XXIV CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA  
PUNTA DEL ESTE, URUGUAY, NOVIEMBRE 2010**

**ESTUDIO EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO 3D DEL FLUJO  
SUPERCRÍTICO EN UN CRUCE DE CALLES**

**Leonardo S. Nanía<sup>1</sup>, Jorge D. Abad<sup>2</sup>, Yovanni A. Cataño<sup>3</sup>, Ernest Bladé<sup>4</sup>, Marcelo H. García<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Dpto. de Mec. de Estructuras e Ing. Hidráulica, Universidad de Granada, España, LNania@ugr.es

<sup>2</sup>Dept. of Civil and Environmental Engineering, University of Pittsburgh, USA, jabad@pitt.edu

<sup>3</sup> Dept. of Civil and Environmental Engineering, U. of Illinois at Urbana-Champaign, USA, catano@illinois.edu

<sup>4</sup>Dpto. de Ing. Hidráulica, Marítima y Ambiental, Universitat Politècnica de Catalunya, España, ernest.blade@upc.edu

<sup>5</sup>Dept. of Civil and Environmental Engineering, U. of Illinois at Urbana-Champaign, USA, mhgarcia@illinois.edu

**RESUMEN:**

Se estudia el comportamiento del flujo supercrítico en un cruce de canales a 90° el cual simula un cruce de calles con sección transversal rectangular. Aunque en general el flujo es supercrítico, en el cruce tiende a ser subcrítico formándose resaltos hidráulicos en la zona del cruce o en las calles inmediatamente aguas arriba (Nanía, 1999 y Nanía et al, 2004). Se comparan los resultados numéricos realizados con FLOW-3D con datos experimentales de uno de los casos, observándose que, a pesar de ser los caudales de entrada constantes, los resaltos presentan una oscilación en su posición, verificada experimentalmente, lo cual se traduce en una variabilidad en la distribución de caudales aguas abajo del cruce de un 13 %. También se observa que el flujo es en general débilmente tridimensional, excepto en las zonas de los resaltos. Dado que aún con una simulación 3D existe una incertidumbre en la distribución de caudales y que el flujo no es altamente 3D, se concluye que es probable que una simulación 2D del flujo en el cruce podría dar un resultado lo suficientemente aproximado cuando el objetivo sea averiguar el reparto de caudales en el cruce, siendo el coste computacional mucho menor.

**ABSTRACT:**

Supercritical flow behavior in a four-branch open channel junction with rectangular cross-section is studied. Flow in general is supercritical but in the junction tends to be subcritical forming hydraulic jumps either in the junction area or in the upstream channels (Nanía, 1999 y Nanía et al, 2004). Numerical results with FLOW-3D compares well with experimental data and oscillations in the position of the jumps is detected, despite the fact that the inflow are constant, producing a variability in the flow distribution of near 13%. Flow is also observed to be weakly three-dimensional, except on the jumps zones. Since even a 3D simulation does not guarantee an exact flow distribution prediction and flow is not fully 3D, it is concluded that a 2D flow simulation in the junction could give reasonably good results when the objective is knowing the flow distribution in the junction, being the computational cost much lower.

**PALABRAS CLAVES:**

Cruce de calles, Flujo supercrítico, Distribución de caudales.

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la distribución del flujo en un cruce de calles es de interés en el análisis de los caudales de escorrentía en zonas urbanas (Nanía et al, 2006). El flujo en las calles suele ser más bien unidimensional, pero en los cruces, en general, se produce una variación del flujo en las 3 dimensiones. Dado que el objetivo en muchos casos es conocer el reparto de caudales para calcular los niveles de inundación en las calles y las áreas involucradas pueden ser extensas, la utilización de un modelo hidrodinámico en tres dimensiones (3D) para resolver los parámetros del flujo en toda el área involucrada sería prohibitivo económicamente si no inabordable.

El objetivo de esta investigación es analizar la estructura tridimensional del flujo en un cruce de canales para evaluar su relevancia en la distribución de los caudales aguas abajo. Se prestará especial interés en el análisis de las componentes verticales de la velocidad y su importancia en la distribución de caudales. Si éstas no fuesen relevantes, como cabe esperar, se podría utilizar un enfoque mucho más barato desde el punto de vista computacional, por ej. 2D, obteniendo resultados de exactitud similar. Este enfoque 2D o incluso un 1D en calles combinado con 2D en cruces podría hacer abordable un problema que en 3D no lo sería por su tamaño, sin sacrificar precisión en el resultado.

## OBJETIVOS

Analizar las características tridimensionales del flujo supercrítico en un cruce de calles de geometría simple y su influencia en la distribución de caudales aguas abajo.

## METODOLOGÍA

Se realizarán simulaciones con código 3D, las cuales serán contrastados con resultados experimentales. Dado que se desea trabajar con flujos principalmente supercríticos, se trabajará con canales con pendientes de 1 al 4 %. Los resultados experimentales se obtuvieron en un dispositivo construido en la Universidad Politécnica de Cataluña (Nanía, 1999). Las características del flujo a comparar serán distribución de caudales aguas abajo del cruce y calados, velocidades en general y posición de los resaltos. Los casos de estudio se resumen en la Tabla 1. En esta tabla, Q son los caudales, S son las pendientes de las calles, los subíndices e y s significan entrada y salida, respectivamente, mientras que los subíndices x e y representan la dirección.

**Tabla 1:** Resumen de los casos estudiados.

Nombre	Q <sub>ex</sub> [l/s]	Q <sub>ey</sub> [l/s]	S <sub>x</sub> %	S <sub>y</sub> %	Características estudiadas
Q1S1	25,0	24,9	1	1	Sólo distribución de caudales
Q1S2	49,9	50,3	1	2	Sólo distribución de caudales
Q1S3	99,9	67,2	1	4	Sólo distribución de caudales
EXP	43,1	99,3	1	2	Distribución de caudales y campos de calados y velocidades

## DESCRIPCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO FLOW-3D

Para estudiar la estructura 3D del flujo en condiciones tanto supercríticas como subcríticas, se usa el código comercial de volúmenes finitos no hidrostático, FLOW-3D (Flow Science Inc., 2008). Este código se ha usado previamente para resolver el flujo alrededor de numerosas estructuras, incluyendo pilas de puente (Richardson and Panchang, 1998), tuberías submarinas (Smith and Foster, 2005, Hatton et al., 2007), aliviaderos curvos (Abad et al., 2008), estaciones de aireación (Abad et al. 2004), entradas de túneles en presas (Groeneveld et al., 2007). El código resuelve interfases fluido-fluido y fluido-aire con una malla rectangular y un enfoque de volumen de fluido (volume of fluids, VOF). El código resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D promediadas para flujo incompresible simultáneamente con la ecuación de continuidad. Ambas ecuaciones están dadas por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left\{ u_j A_{[j]} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i + f_i \quad (1)$$

$$V_F \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i A_{[i]}) = 0.0 \quad (2)$$

Donde  $i, j = 1, 2, 3$  representan las componentes  $x, y, z$  del sistema de coordenadas cartesianas, respectivamente,  $V_F$  es el volumen fraccional abierto al flujo,  $\rho$  es la densidad del flujo,  $t$  es el tiempo,  $x_i$  son las coordenadas espaciales,  $u_i$  son las componentes de la velocidad,  $A_i$  son las áreas fraccionales abiertas al flujo,  $G_i$  son las aceleraciones gravitatorias y  $f_i$  son los términos viscosos. Junto con las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, se necesita usar un cierre de turbulencia. El modelo de turbulencia RNG se describe como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left\{ u_j A_{[j]} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} = P + Diff - \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left\{ u_j A_{[j]} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} = \frac{C_{\varepsilon 1} \cdot \varepsilon}{k} P + DDif - C_{\varepsilon 2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

donde  $P$  es la producción de corte (shear production),  $Diff$  y  $DDif$  son los términos de difusión,  $C_{\varepsilon 1} = 1,42$  y  $C_{\varepsilon 2}$  es la función de tasa de corte (shear rate, no constante, como en el caso del modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  estándar). El modelo RNG descrito por las ecuaciones (3) y (4) se implementa de manera muy similar al cierre  $\kappa$ - $\varepsilon$  estándar para las ecuaciones de energía cinética turbulenta y disipación de energía cinética turbulenta, respectivamente. Los modelos basados en RNG dependen menos de constantes empíricas en tanto que brindan un marco para la derivación de un rango de modelos de diferentes escalas (Flow Science Inc., 2008).

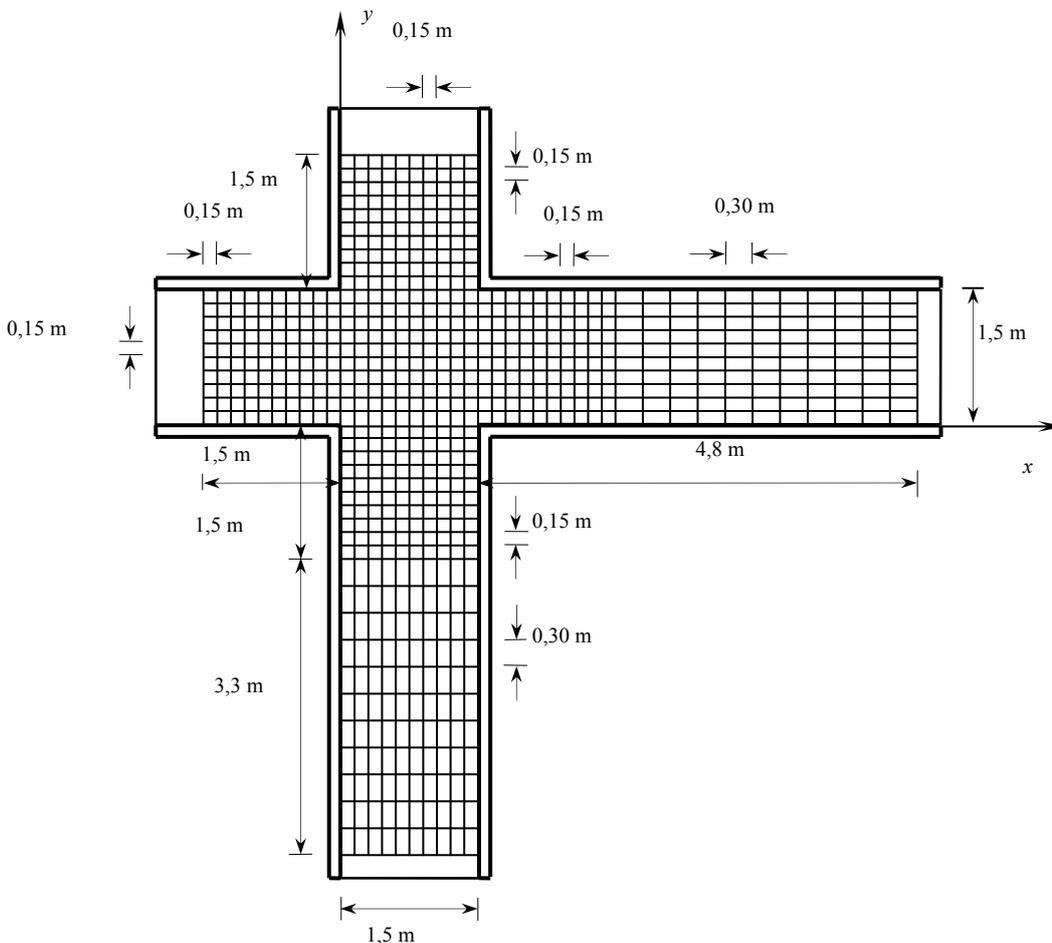
### Análisis de sensibilidad del tamaño de malla

Dado que se necesita un compromiso entre el tamaño de la malla y tiempo de cálculo para alcanzar resultados hidráulicos representativos, se realizó un análisis de resolución del tamaño de la malla. Esto deriva del hecho de que si se necesitan resultados muy precisos, el tamaño de las celdas debe ser lo suficientemente pequeño como para resolver las variables hidráulicas más importantes. Resolver las características tanto del flujo principal como turbulentas de manera adecuada requeriría usar celdas de cálculo muy pequeñas, lo cual consumiría una gran cantidad de tiempo de cálculo principalmente debido al tamaño de las estructuras. Cada simulación con FLOW3D fue llevada a cabo en un cluster con 32 procesadores, usando 8 procesadores a la vez, lo cual permitió realizar las simulaciones en un tiempo razonable. Inicialmente, se utilizaron celdas cúbicas de 2 cm de lado y

para todo el dominio. Una segunda serie de simulaciones fue realizada con celdas de 0,75 cm de lado cuyos resultados se compararon con el caso inicial. Dado que se observó una pequeña variabilidad en los resultados, se concluyó que debería disminuirse aún más el tamaño de malla, adoptándose como definitiva la de 0,5 cm de lado. Debe notarse que cada caso fue simulado un número de pasos de tiempo suficiente para lograr la estacionariedad de variables hidráulicas tales como caudal a la salida y calados. En el caso de flujos supercríticos los pasos de tiempo necesarios fueron muy superiores de lo cabe esperar debido a la variabilidad en los caudales asociada a oscilaciones en los resaltos hidráulicos que se forman aguas arriba de la unión de los flujos así como en el cruce mismo. En general, las simulaciones fueron de 250 a 300 segundos, tiempo suficiente para observar una estacionariedad en las oscilaciones de los flujos, lo que permitió la estimación de caudales medios y periodos de oscilación asociados.

## DESCRIPCIÓN DEL DISPOSITIVO DE LABORATORIO

El dispositivo de laboratorio está formado por 2 canales de 8,5 m de largo y 1,5 m de ancho que se cruzan a 90°, constituyendo una superficie de intersección de 1,5 m de lado que permanece siempre horizontal y fija (Figura 1). Los canales de entrada quedan de 2 m de longitud y los de salida de 5 m de longitud, pudiéndose variar las pendientes de los de entrada y los de salida de manera independiente. Sin embargo, se ha colocado siempre la misma pendiente en los canales de la misma dirección, simulando lo que suele ocurrir generalmente en los cruces de calles. Los caudales pueden alimentar los canales de entrada de forma independiente en un rango de 0 a 100 l/s.



**Figura 1.-** Esquema del dispositivo experimental señalando las celdas de medición de calados y velocidades.

## RESULTADOS EXPERIMENTALES

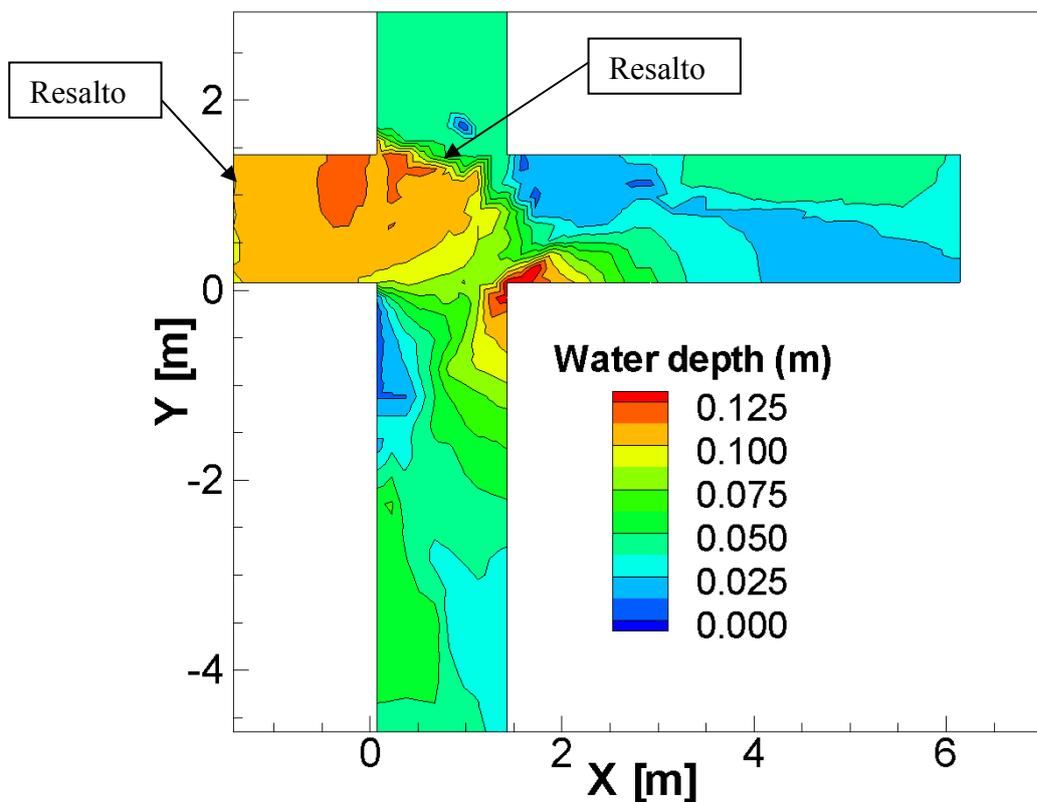
En la Tabla 2 se resumen las distribuciones de caudales en cada caso estudiado.

**Tabla 2.-** Resumen de las distribuciones de caudales obtenidas en la campaña experimental.

ID	Qix [l/s]	Qiy [l/s]	Sx %	Sy %	Qox [l/s]	Qoy [l/s]
Q1S1	25,0	24,9	1	1	27,1	22,8
Q1S2	49,9	50,3	1	2	53,4	46,8
Q1S3	99,9	67,2	1	4	92,7	74,4
EXP	43,1	99,3	1	2	52,8	89,6

Puede observarse que para los casos en los cuales los caudales de entrada son iguales en ambas direcciones (Q1S1 y Q1S2) se distribuye más caudal en la dirección “x”, en tanto que en los casos restantes, donde los caudales de entrada son diferentes, el cruce funciona como un igualador del flujo, es decir, que en la dirección donde entra mayor caudal, sale menos y viceversa. Se observa una aparente falta de simetría, siendo la dirección “x”, la preferente.

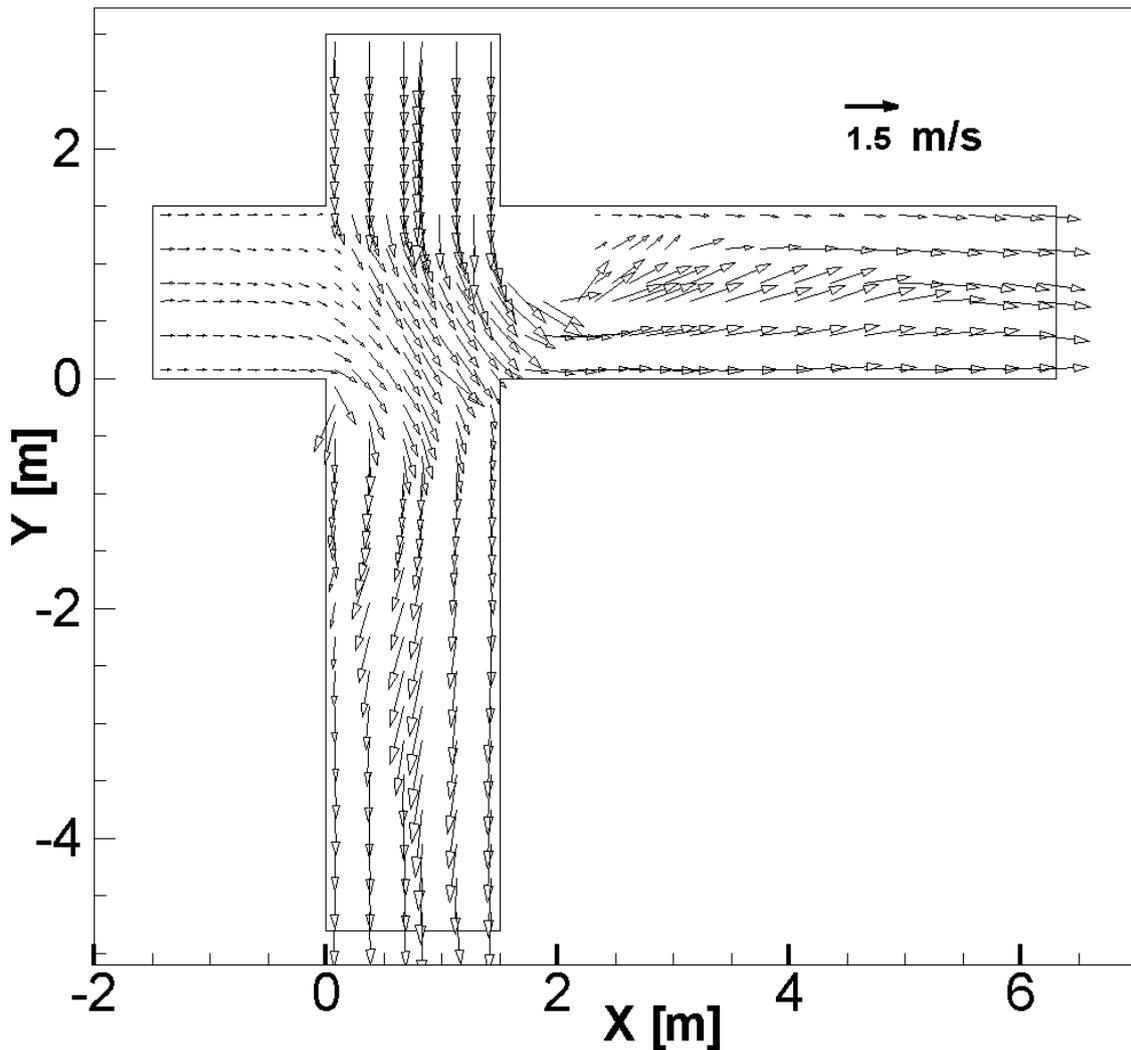
En la Figura 2 se presenta los calados medidos para el caso EXP. En todos los casos se observa la ocurrencia de resaltos debido a que en la zona del cruce es flujo tiende a ser subcrítico, tal como se describe por primera vez en Nanía (1999).



**Figura 2.-** Medida de los calados en laboratorio, Caso EXP.

Otras características típicas de los casos analizados son la existencia de zonas de recirculación o secado junto a las esquinas donde se encuentra una calle de entrada con una de salida y ondas

cruzadas en las calles de salida que parten desde la esquina donde se encuentran las 2 calles de salida y se propagan hacia aguas abajo, tal como se espera del flujo supercrítico que sucede en ellas. En la Figura 3 se presentan las velocidades medias en la vertical para el caso EXP, pudiéndose observar también las características del flujo comentadas en la anterior figura.



**Figura 3.-** Medida de las velocidades media en la vertical en laboratorio, Caso EXP.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

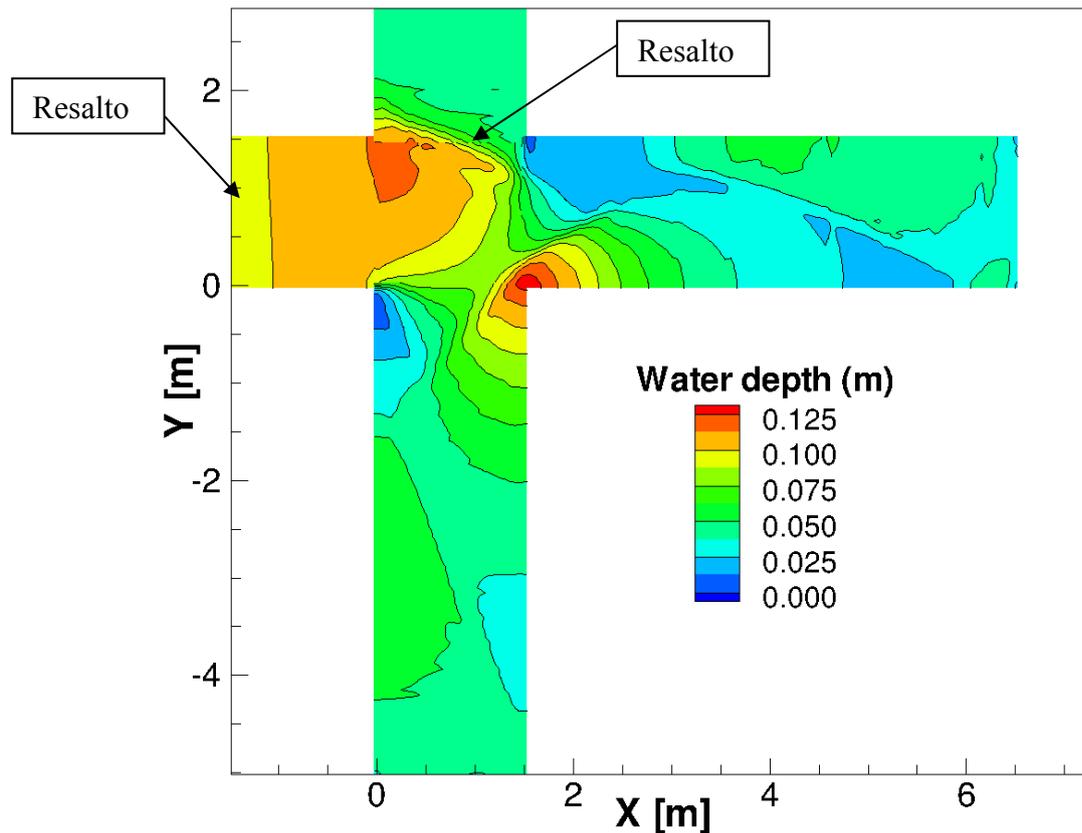
En la Tabla 3 se resumen las distribuciones de caudales obtenidas en las simulaciones numéricas.

**Tabla 3.-** Distribución de flujos obtenidos con modelo 3D.

ID	Q <sub>ex</sub> [l/s]	Q <sub>ey</sub> [l/s]	Q <sub>sx</sub> [l/s]	Q <sub>sy</sub> [l/s]
Q1S1	25,0	24,9	25,0	25,0
Q1S2	49,8	50,3	50,9	48,9
Q1S3	99,8	65,8	85,4	76,5

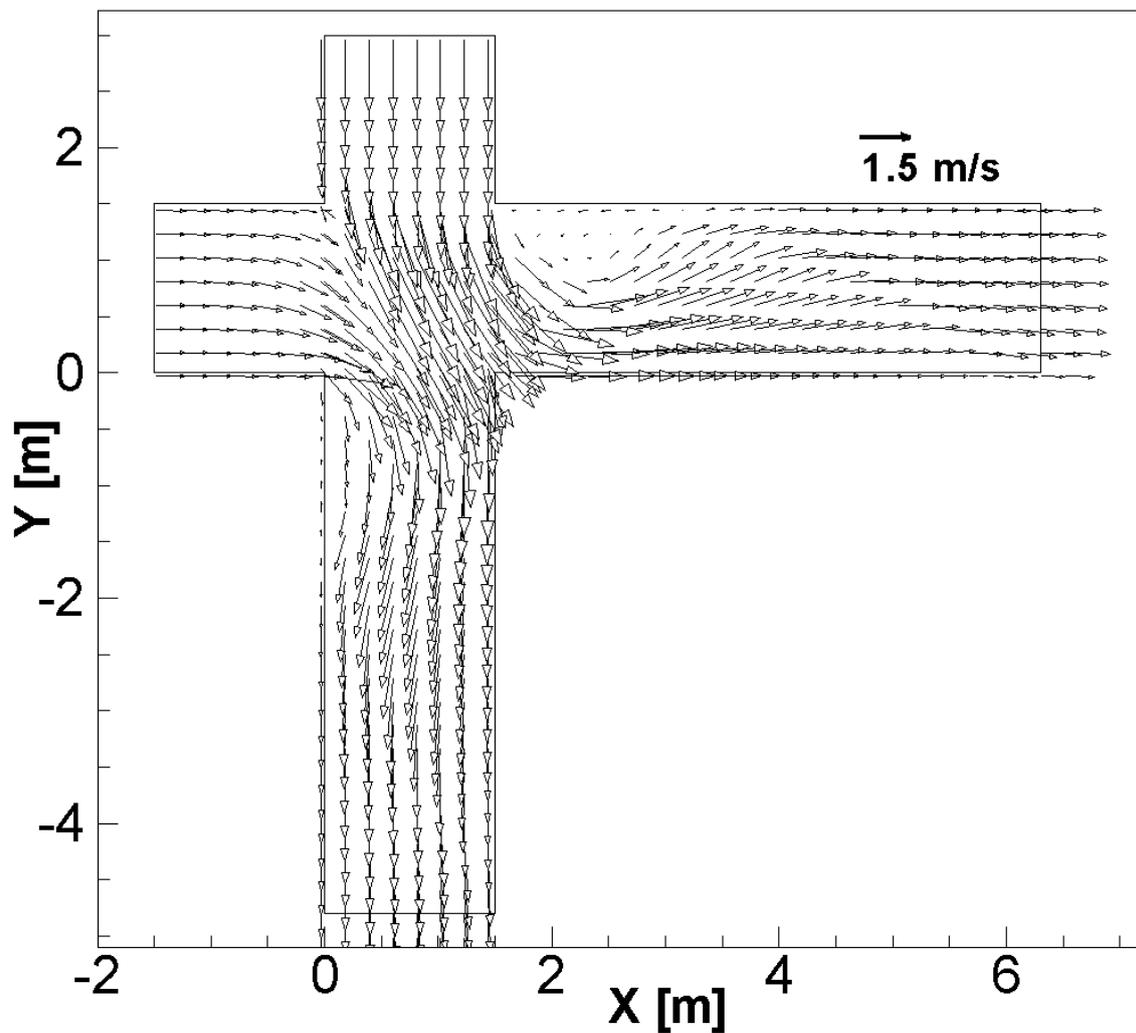
Puede observarse la misma tendencia en la distribución de flujos que las obtenidas en la campaña experimental, pero la simetría es evidente aquí. Se destaca que en los casos Q1S1 y Q1S2 se obtiene una distribución de caudales muy similar, cercana a 50%-50%, a pesar de la geometría es diferente, es decir, en Q1S1 las pendientes son iguales en ambas direcciones, mientras que en Q1S2 son diferentes.

En la Figura 4 se presentan los calados modelados para el caso EXP. Se observa que en general las características hidráulicas (e.g. localización y orientación del resalto hidráulico, zonas de recirculación y ondas cruzadas) son representadas correctamente.



**Figura 4.-** Calados simulados con FLOW-3D, Caso EXP.

En la Figura 5 se presenta el campo de velocidades promediadas en la vertical. Se observa una gran similitud con el campo de velocidades medido experimentalmente y presentado en la Figura 3.

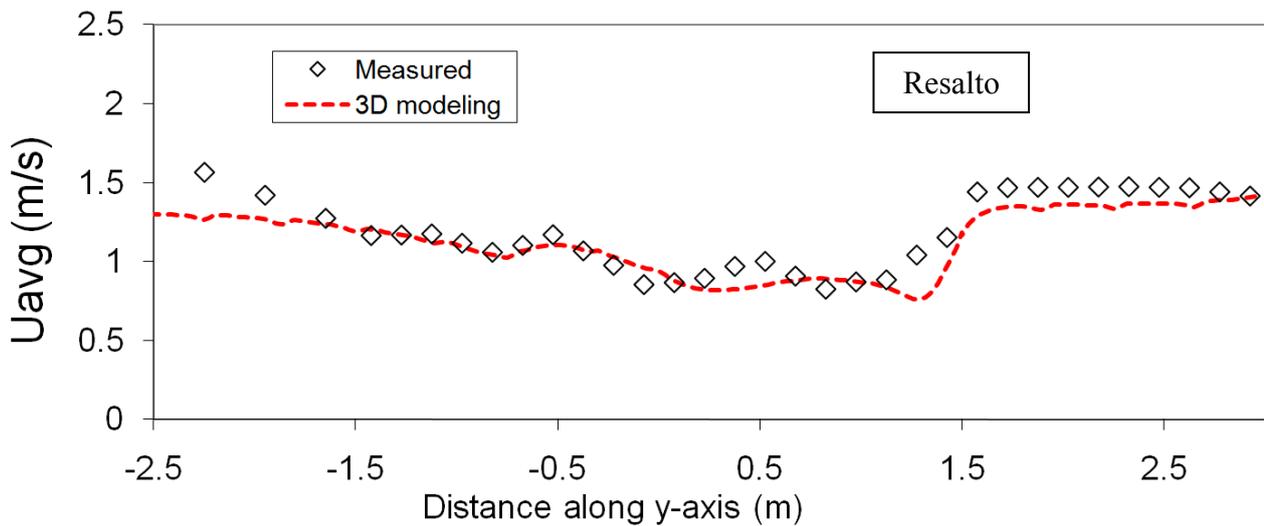


**Figura 5.-** Velocidades promediadas en la vertical simulados con FLOW-3D, Caso EXP.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

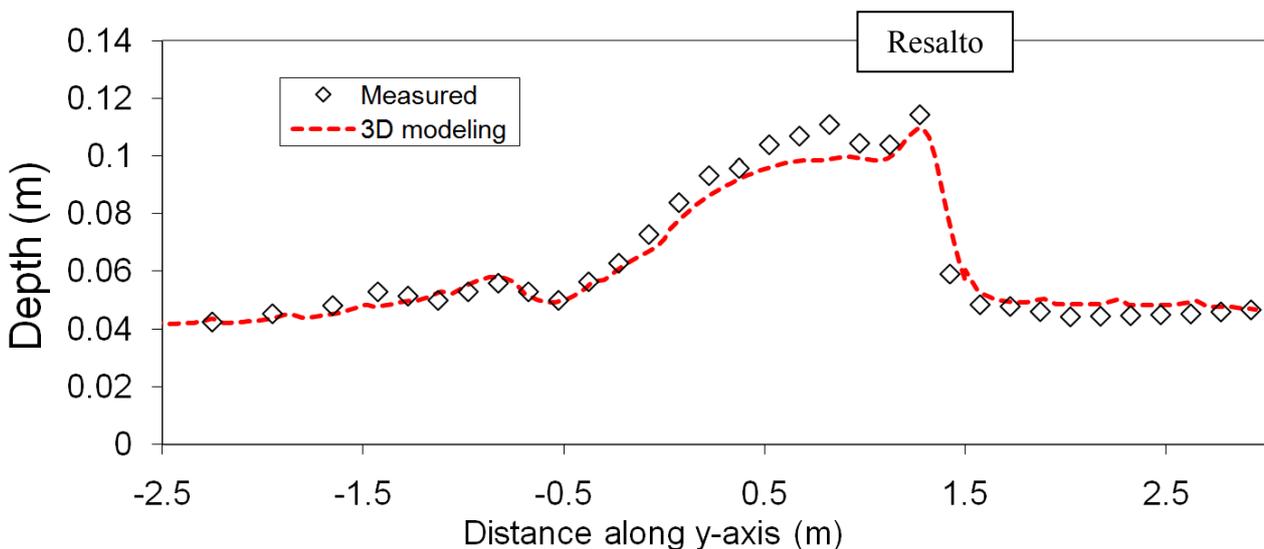
### Calados y Velocidades

Se observa una excelente concordancia entre los resultados experimentales, tanto de calados como de velocidades promediadas en la vertical. En la Figura 6 se presenta la velocidad promediada en la vertical para el caso EXP. Se observa que la modelación 3D se compara adecuadamente con la velocidad medida.



**Figura 6.-** Comparación de resultados numéricos y experimentales de las velocidades en el perfil  $x = 0,675$  m.

En la Figura 7 se presenta sólo la comparación de los calados, para el perfil  $x = 0,675$  para el caso EXP.



**Figura 7.-** Comparación de los resultados numéricos y experimentales de los calados en el perfil  $x = 0,675$  m.

En la Figura 8 se presenta una vista en 3D donde se observa la lámina de agua en el caso EXP y con colores se indica la magnitud de la velocidad en la superficie.

En las Figuras 9 y 10 se presentan perfiles longitudinales con vectores indicando la dirección del flujo y colores indicando la magnitud de la velocidad. Puede observarse que las mayores componentes verticales de la velocidad aparecen en las inmediaciones de los resaltos hidráulicos y en menor medida en la zona de ondas cruzadas que se detectan en las calles de salida.

En la Figura 11 se presentan perfiles transversales a unos 0,75 m aguas arriba del cruce, en cada dirección ( $x = -0,75$  m e  $y = 2,25$  m, respectivamente) y a unos 0,75 m aguas abajo del cruce, en cada dirección ( $x = 2,25$  m e  $y = -0,75$  m, respectivamente). Se observa una relativa uniformidad en los flujos de aguas arriba, mientras que en las secciones de aguas abajo se presentan componentes

verticales de cierta importancia y una gran variabilidad en los calados a lo ancho, formándose corrientes secundarias de tipo circular.

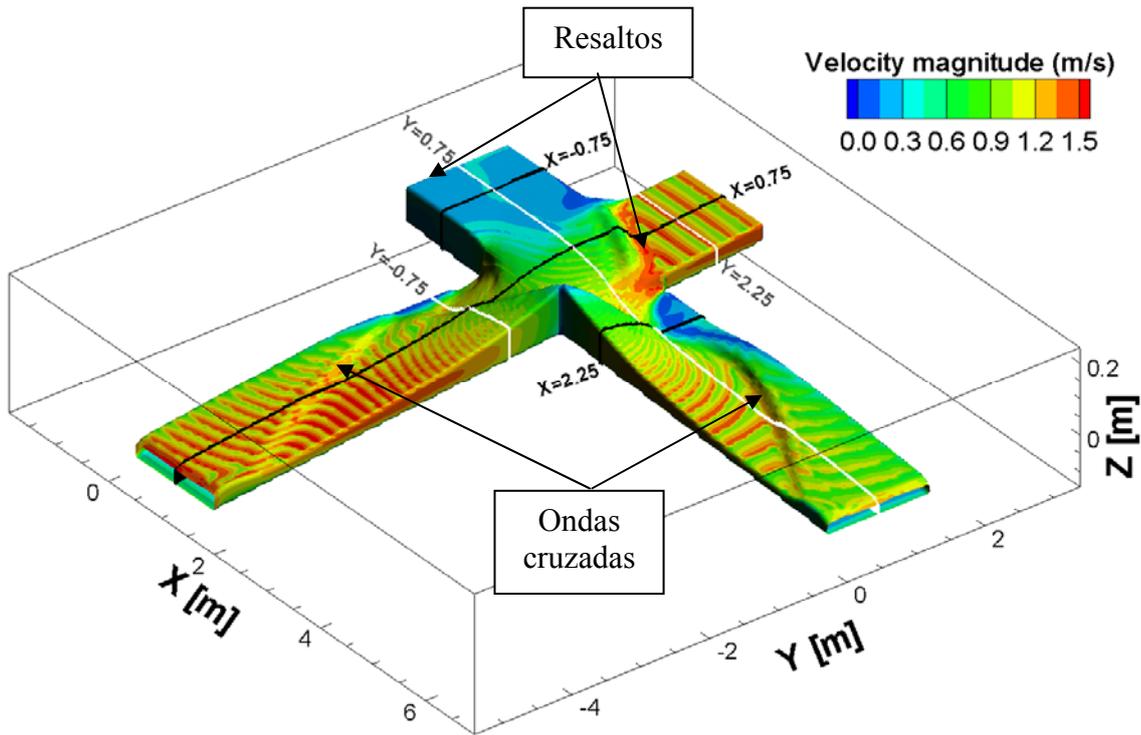


Figura 8.- Vista 3D de la lámina de agua junto con velocidades en la superficie. Caso EXP.

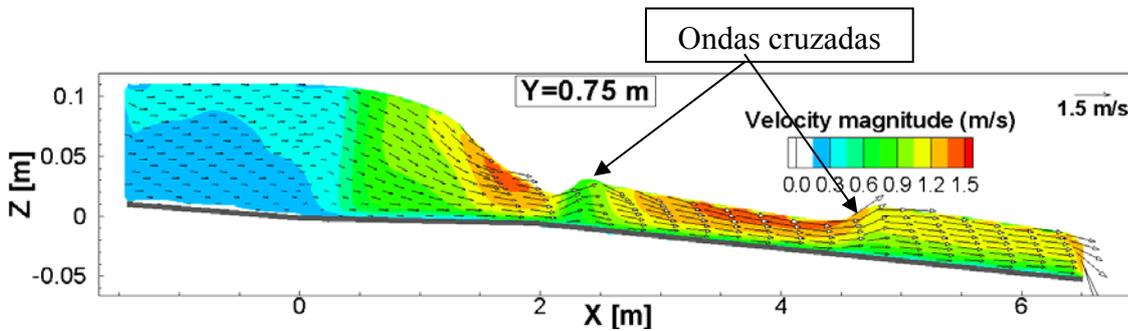
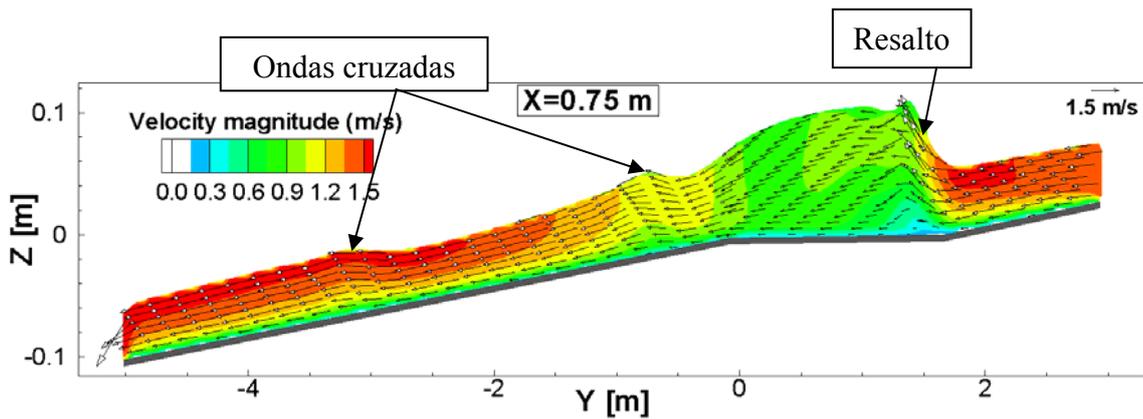
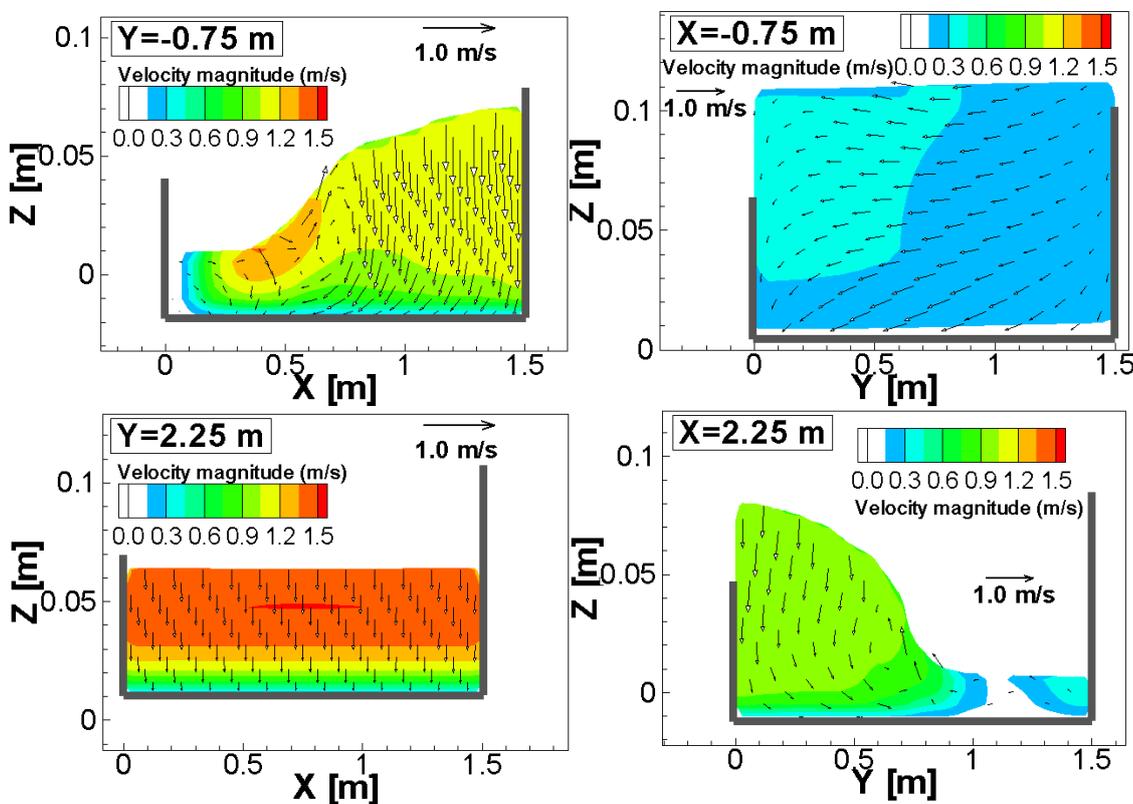


Figura 9.- Perfil longitudinal por  $y = 0,75$  m, con vectores que indican la dirección del flujo y colores que indican magnitud. Caso EXP.



**Figura 10.-** Perfil longitudinal por  $x = 0,75$  m, con vectores que indican la dirección del flujo y colores que indican magnitud. Caso EXP.

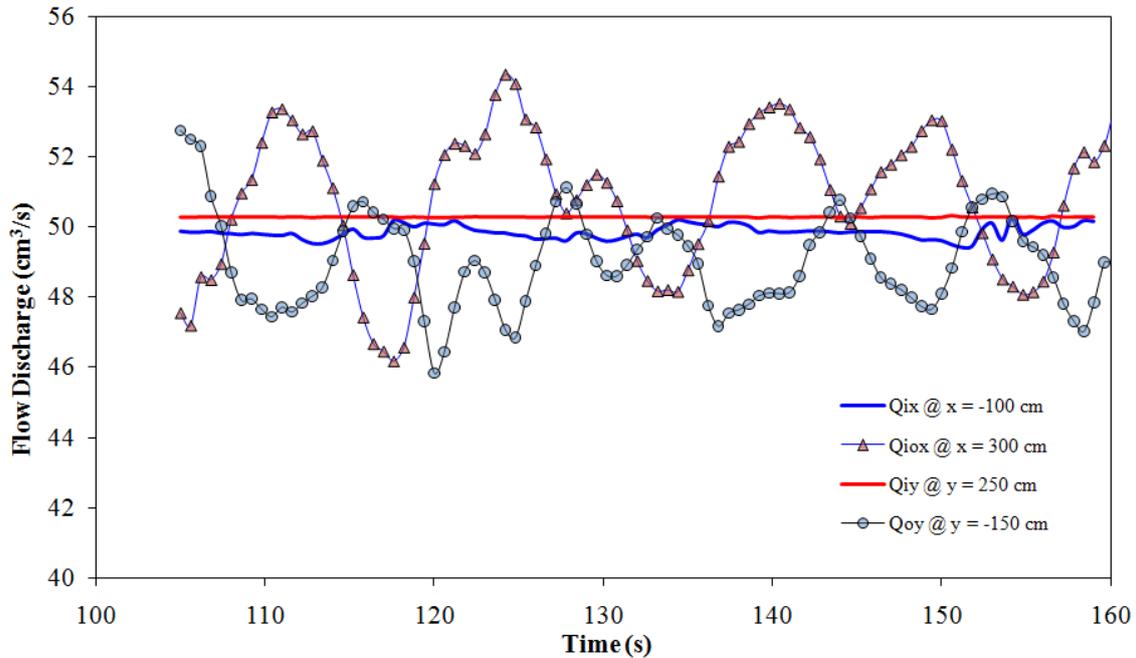


**Figura 11.-** Perfiles longitudinales por  $y = -0,75$  m y  $2,25$  m así como por  $x = -0,75$  m y  $2,25$  m, con vectores que indican la dirección del flujo y colores que indican magnitud. Caso EXP.

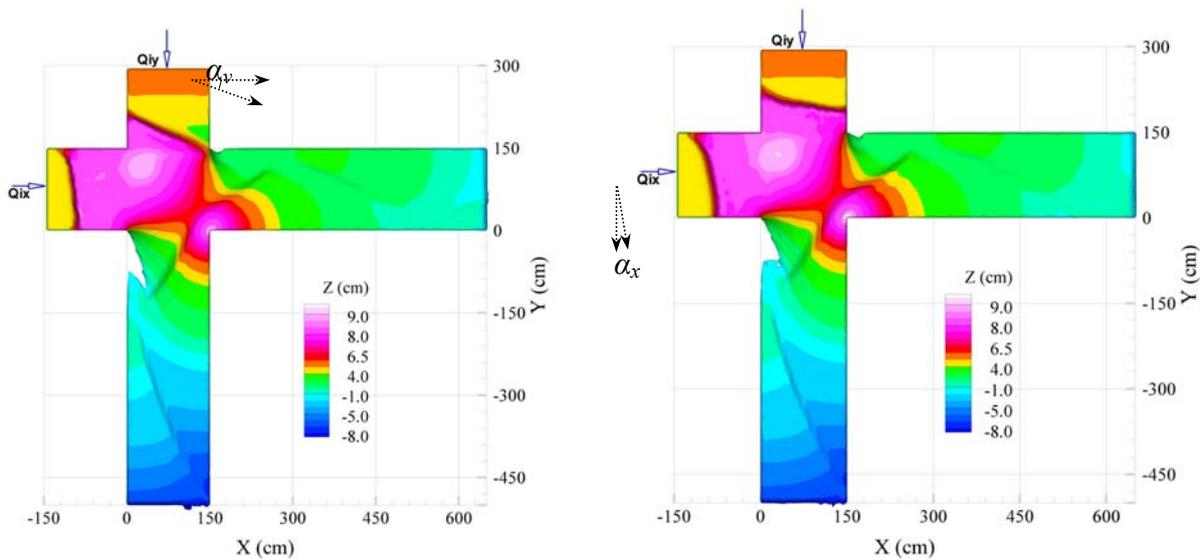
### Características del flujo: oscilación de los resaltos

El resalto hidráulico que se forma aguas arriba del cruce oscila, lo cual influye en el caudal que se desagua por cada una de las calles de salida, como se muestra en la Figura 12. Partiendo de la evolución de los caudales en el tiempo, el período de oscilación medio se puede obtener a través de cualquiera de las técnicas de procesamiento de señales ampliamente usadas, tales como transformadas de Fourier rápidas (FFT) o análisis de wavelet. En este caso se ha usado el segundo debido a su capacidad probada de dar una representación completa de las características de espacio-frecuencia de señales de series temporales (Torrence and Compo, 1998; Elsayed, 2006).

La Figura 13 muestra la posición relativa de los resaltos hidráulicos en dos instantes de tiempo,  $t = 166$  s y  $t = 172,6$  s. Ambos resaltos se mueven alternativamente: mientras el del canal en la dirección “x” se mueve hacia aguas abajo, el del canal en la dirección “y” se mueve hacia aguas arriba y viceversa. Puede observarse que los resaltos son oblicuos con respecto a la perpendicular a la dirección del flujo y que este ángulo de inclinación aumenta según su cercanía al cruce. En esta misma figura puede apreciarse una gran similitud en los patrones de flujo registrados en ambos instantes de tiempo.



**Figura 12.-** Caudales de entrada y salida obtenidos en la simulación del caso Q1S2. La variación en los caudales es de alrededor del 13% en ambas direcciones.



**Figura 13.-** Cota de lámina de agua simulada en dos instantes diferentes donde los resaltos están localizados en posiciones extremas (izquierda:  $t = 166$ s; derecha:  $t = 172,6$  s). Caso Q1S2 de Tabla 1.

La Tabla 4 resume las características espaciales asociadas a la variabilidad del resalto, tales como periodo de oscilación,  $T$ , desplazamiento máximo horizontal,  $\Delta S$ , y ángulo máximo de inclinación,  $\alpha$  en las dirección “x” e “y”.

**Tabla 4.-** Características de la oscilación asociada a los resaltos.

ID	<i>Simulated (CFD)</i>						
	$Q_{ox}$ [l/s]	$Q_{oy}$ [l/s]	$T$ [s]	$\Delta S_x$ [cm]	$\Delta S_y$ [cm]	$\alpha_x$	$\alpha_y$
Q1S1	25.0	25.0	9.5	53.2	43.3	18.6	9.1
Q2S2	50.9	48.9	6.6	16.2	24.3	17.3	23.0
Q3S3	85.4	76.5	7.2	48.6	32.4	15.9	16.4

## CONCLUSIONES

Se estudia la estructura del flujo en un cruce de calles con flujos supercríticos. Se describen características típicas de este tipo de flujo, tales como resaltos aguas arriba y dentro del cruce, zonas de recirculación y ondas cruzadas en las calles de salida. Se concluye que en los casos de cruces de calles analizados el flujo tiene un comportamiento débilmente 3D, excepto en zonas localizadas, como por ejemplo, inmediaciones de resaltos, lo cual en sí mismo no afecta sobremanera al reparto de caudales y elevaciones de agua. Sin embargo, se ha apreciado una oscilación en la posición de los resaltos, lo cual provoca una variabilidad en el reparto de caudales de aproximadamente el 13 %, con periodos de oscilación de entre 6 y 10 s, lo cual coincide con lo observado experimentalmente. Esta variabilidad en la distribución de los caudales que producen las oscilaciones, a pesar de ser los caudales de entrada constantes, indica que un estudio tridimensional detallado no garantizaría poder lograr una predicción fiable, lo cual, unido a la estructura débilmente tridimensional del flujo, hace pensar que una simulación de tipo 2D podría dar un resultado lo suficientemente aproximado cuando el objetivo sea averiguar el reparto de caudales en el cruce, siendo el coste computacional mucho menor. Sin embargo es necesaria mayor investigación para determinar más exactamente bajo qué condiciones hidráulicas y de configuración de calles, se requeriría un estudio 3D.

## REFERENCIAS

**Abad, J. D., Rhoads, B. L., Guneralp, I., García, M. H.** (2008) "Flow structure at different stages in a meander-bend with bendway weirs". *Journal of Hydraulic Engineering*, 138 (8): 1052-1053.

**Abad, J.D., Bombardelli, F.A., Waratuke, A.R. and García, M.H.** (2004) "*Modeling and alternative analysis for SEPA Station No. 3*". In report "SEPA Station No. 3, Siltation Alleviation Study " from Greeley and Hansen LLC to Metropolitan Water Reclamation District of Greater Chicago. March.

**Elsayed, M.A.K.** (2006) A novel technique in analyzing non-linear wave-wave interaction. *Ocean engineering*, 33 (2), 168-180.

**Flow Science Inc.** (2008) Flow-3D V 9.2 User's Manual. Santa Fe, New México.

**Hatton, K.A., Foster, D.L., Traykovski, P., and Smith, H.D.** (2007) "Numerical simulations of the flow and sediment transport regimes surrounding a short cylinder." *IEEE J. Ocean. Eng.*, 32(1), 249-259.

- Hirt, C.W. and Nichols, B.D.** (1981) "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *Journal of Computational Physics* 39, 201.
- Groeneveld, J., Sweeney, C., Mannheim, C., Simonsen, C., Fry, S., and Moen, K.** (2007) "Comparison of Intake Pressures in Physical and Numerical Models of the Cabinet Gorge Dam Tunnel, Waterpower XV, Copyright HCI Publications.
- Nanía, L.S.** (1999) "Metodología numérico-experimental para el análisis de riesgo asociado a la escorrentía pluvial en una red de calles". Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
- Nanía, L.; Gómez, M; Dolz, J.** (2004) "Experimental study of the dividing flow in steep street crossings". *Journal of Hydraulic Research*, 42(4), 406-412.
- Nanía-Escobar, L.; Gómez-Valentín, M; Dolz-Ripollés, J.** (2006) "Análisis de la peligrosidad de la escorrentía pluvial en zona urbana utilizando un enfoque numérico-experimental". *Ingeniería Hidráulica en México*, XXI(2), 5-15.
- Richardson, J.E., and Panchang, V.G.** (1998) "Three-dimensional simulation of scour-inducing flow at bridge piers." *J. Hydraulic Eng.*, vol. 124, no. 5, pp. 530–540.
- Smith, H.D., and Foster, D.L.** (2005) "Modeling of flow around a cylinder over a scoured bed." *J. Waterway Port Coast. Ocean Eng.*, vol. 131, no. 1, pp. 14–24.
- Torrence, C., and Compo, G.P.** (1998) A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79 (1), 61-78.