

Integración de decisiones de inversión en capacidad en la Planificación Agregada*

Albert Corominas¹, Amaia Lusa¹, Carme Martínez²

¹ Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales y Dpto. de Organización de Empresas. albert.corominas@upc.edu / amaia.lusa@upc.edu. Universitat Politècnica de Catalunya. Av. Diagonal, 647, p 11, 08028, Barcelona. ² Dpto. de Organización de Empresas. Instituto de Organización y Control. ETSEIB. Universitat Politècnica de Catalunya. Avda. Diagonal 647, p7, 08028 Barcelona. mcarme.martinez@upc.edu

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo de programación lineal mixta para un problema de planificación agregada en el que se incluyen decisiones de ampliación de la capacidad que suelen inscribirse en un nivel de planificación estratégica. Se supone que el equipo adicional (que puede adquirirse o no) y el antiguo se integran para dar lugar a una nueva configuración productiva única, con costes variables distintos de los correspondientes al equipo antiguo. El modelo, cuyo objetivo consiste en maximizar el beneficio, incluye además la gestión financiera.

Palabras clave: Planificación agregada, Planificación de la capacidad, Inversiones, financiación, Programación Lineal Entera Mixta

1. Introducción

El proceso de planificación y programación de actividades se lleva a cabo, salvo casos particulares extremadamente simples, jerárquicamente. Los planes y programas se sitúan en niveles sucesivos y cada nivel obtiene como salida la entrada del nivel inmediatamente inferior. La complejidad de los sistemas productivos obliga a este enfoque jerárquico (no se dispone de instrumentos para definir, en un solo nivel, todas las decisiones relevantes) que presenta problemas diversos (por ejemplo, la desagregación al pasar de un nivel al inmediatamente inferior), entre los cuales el mayor es el de la coherencia entre los niveles; es decir, las decisiones definidas en un nivel superior pueden revelarse como no factibles en un nivel inferior, lo que obliga a utilizar procedimientos iterativos de ajuste, de convergencia poco segura (Hax, 1978; Hax y Candea, 1984).

En cualquier caso, el esquema habitual es que hay un nivel de planificación estratégica, en el cual se definen, entre otras, las decisiones de inversión en capacidad productiva, al que sigue el nivel de planificación agregada (PA), que corresponde al medio plazo (por ejemplo, un año) dividido en períodos de, por ejemplo, un mes y en el que se trabaja con productos y recursos agregados. Se supone que la planificación estratégica corresponde a la dirección general y que la PA y los niveles que se sitúan por debajo de la misma se inscriben en el área de producción (o de operaciones, según la terminología adoptada), la cual recibe, procedente del área comercial, una previsión de demanda a la que intenta ajustar la producción con el menor coste posible, considerando como variables, generalmente, la dimensión de la plantilla, las horas extras y el nivel de producción en cada período.

* Este trabajo se deriva de la participación de sus autores en un proyecto de investigación financiado por MICINN-FEDER con referencia DPI2007-61588, titulado "Planificación Agregada Integrada de la Empresa".

Sin embargo, como indican Singhal y Singhal (2006a), la PA es susceptible de jugar un papel más relevante, puesto que puede verse como el punto de encuentro de la planificación de las actividades de las principales áreas de la empresa. Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que tiene por objetivo el desarrollo de modelos y procedimientos de resolución para problemas de PA integrada de la empresa (se han desarrollado modelos para la planificación agregada en los que se integran decisiones de diversas áreas funcionales de la empresa como producción, personal, finanzas, aprovisionamientos y marketing).

Además de la integración horizontal, la PA debería servir de enlace entre las operaciones y la estrategia de la empresa (Singhal y Singhal, 2006b). Normalmente las decisiones sobre inversiones se sitúan en el nivel de la planificación estratégica; por consiguiente, la capacidad instalada es un dato para la PA, lo cual introduce una rigidez inadecuada e innecesaria. Es obvio que de la resolución del problema de planificación agregada puede derivarse la conveniencia de renovar un equipo o adquirir uno para cubrir una nueva función o para ampliar la capacidad.

En el presente trabajo se propone un modelo para un problema de PA en el que se integran decisiones de capacidad que son tratadas tradicionalmente en un nivel estratégico. De todas formas, cabe destacar que lo que aquí se propone no sería adecuado para inversiones que comprometan las finanzas de la empresa a largo plazo, puesto que para ello se debería considerar un horizonte superior al que es propio de la PA y, además, consideramos que la incertidumbre (no sólo en la demanda, sino en otros factores que influyen en las inversiones) debería ser incluida para, de algún modo, tener en cuenta el riesgo en que se incurre al tomar este tipo de decisiones.

2. Descripción del problema

La aportación principal de este trabajo es el desarrollo de un modelo para la integración de decisiones de inversión en capacidad y de financiación en la PA. Se asume que se dispone de una previsión de la demanda, que los productos son almacenables y que se produce contra stock. Por otra parte, que la organización del tiempo de trabajo se basa en un esquema rígido (como es el caso de empresas que trabajan a tres turnos o de aquellas en las que no están permitidas las horas extras) y que la capacidad de producción depende de los equipos instalados. Se considera, como es habitual en sistemas en los que interviene la mano de obra directa (no completamente automatizados), que los incrementos de capacidad que tienen lugar tras la compra de uno o más equipos pueden ir acompañados de una variación en la plantilla.

Se supone que el incremento de capacidad (que puede hacerse o no) se consigue mediante (a) la sustitución de un equipo (en cuyo caso, debe tenerse en cuenta el valor residual del mismo) o (b) la incorporación de un equipo adicional. En este último supuesto, hay que distinguir dos casos: (b1) el equipo adicional y el antiguo trabajan de forma independiente; (b2) el equipo adicional y el antiguo se integran para dar lugar a una nueva configuración productiva única, con costes variables distintos de los correspondientes al equipo antiguo. Este último caso es el que requiere un tratamiento más complejo, que es el que se expone en la presente comunicación y que es fácil adaptar a (a) y a (b1); en el supuesto (a) se requiere, como dato, el valor contable y el valor residual, para cada período, del activo sustituido, con el fin de tenerlos en cuenta en el cálculo del beneficio y, en el caso del valor residual, supuesto realizable mediante una venta, del movimiento de fondos. En todos los supuestos, el nuevo equipo se puede elegir entre un número finito de opciones con diferentes capacidades y costes asociados.

En el caso considerado, (b2), la compra del equipo en un período t implica, en el caso más general, en dicho período y en períodos posteriores unos pagos (al proveedor del equipo, al nuevo personal que puede requerir el mismo o por otros conceptos —instalación, reformas en la planta, etc.—), así como unos nuevos valores de la capacidad (puede que el valor nominal de la capacidad del nuevo sistema sólo pueda alcanzarse tras un cierto número de períodos de adaptación) y de los costes variables unitarios de los productos o familias de productos.

Se plantea el modelo en el supuesto de que el incremento de capacidad se refiere a un único recurso productivo (la extensión a dos o más recursos independientes es inmediata) y que puede tener lugar solamente una vez en el curso del horizonte de planificación.

Aunque todas las consideraciones anteriores se refieren a la ampliación de capacidad mediante la adquisición de nuevos activos materiales, se puede tratar de forma similar la ampliación de capacidad mediante el establecimiento de un nuevo turno de trabajo.

Para la adquisición de un equipo, es muy probable que la empresa deba solicitar financiación externa (por supuesto la necesidad de financiación puede existir aunque no se adquiera un equipo). Obviamente, existen opciones diversas para ello por lo que debe seleccionarse la más adecuada, en el momento más adecuado. Esto implica que la gestión de la tesorería (y, en general, la gestión financiera), deben ser incluidas en el modelo, para ello se han tenido en cuenta los elementos siguientes:

- **Gestión de los cobros:** es habitual que la empresa no cobre al contado sino que conceda un período de cobro a sus clientes. Además se considerará la posibilidad de poder realizar una operación de *factoring* (venta de facturas con aplicación de una comisión y un descuento según el número de días que se adelanta el importe de la factura) o de descuento de facturas por una institución financiera (también con aplicación de un descuento). En la gestión de cobros no se tiene en cuenta la posibilidad de pago al contado y de descuento por pronto pago a clientes debido a que la empresa no puede prever si los clientes querrán acogerse a esta opción de pago.
- **Gestión de los pagos a proveedores:** se supone que los proveedores ofrecen un crédito comercial o concesión de un determinado plazo de pago de las compras. En este caso, también se contempla la posibilidad de descuento por pronto pago a proveedores.
- **Gestión de pagos de nóminas:** suponiendo un valor medio de gasto de personal por empleado y considerando que una modificación de la capacidad puede ir acompañada de un cambio en el tamaño y/o composición de la plantilla (véase Corominas et al., 2010, para un tratamiento más detallado de este aspecto).
- **Gestión de otros pagos:** pagos correspondientes a **costes fijos** (suministros, seguros, alquileres, etc.) e **impuestos** (como el impuesto de sociedades y el IVA).

El cálculo de los pagos correspondientes al impuesto de sociedades depende de los períodos que comprenda el horizonte de planificación y de la modalidad escogida para los pagos a cuenta. En este trabajo se considera el caso en que el horizonte cubre períodos correspondientes a dos años fiscales consecutivos, i e $i+1$, y los pagos a cuenta son función de la cuota íntegra correspondiente al último período impositivo vencido en el momento de realizar el pago a cuenta (por ejemplo, de agosto del año i hasta septiembre del año $i+1$, de manera que los pagos a cuenta se consideran conocidos y, en cambio, la cuota íntegra depende del beneficio obtenido en los períodos correspondientes al año i); en Boiteux (2009) se incluye la descripción y modelización de todas las opciones posibles.

- **Gestión de las necesidades de financiación.** Se consideran dos posibilidades:
 - Cuenta de crédito remunerada, para cubrir necesidades de tesorería a corto plazo.

- Préstamo, para financiar por ejemplo incrementos de capacidad productiva al renovar o adquirir nuevos activos.
- **Gestión de la colocación de excedentes.** Existen muchas opciones para aplicar los excedentes de tesorería (Martínez, 2006), pero al tratarse de un modelo de planificación agregada sólo se consideran las de inversión a corto plazo, con mayor liquidez, que conllevan menores riesgos, pero a su vez menores rentabilidades potenciales; entre ellas, se consideran las siguientes: (TD) Títulos al descuento (como letras del Tesoro o pagarés de empresa), que se supone que pueden venderse antes del vencimiento (normalmente con pérdida de rentabilidad); (FI) Fondos de inversión en activos del mercado monetario o del tipo Fondtesoro, que son los que conllevan menores riesgos y cuya principal ventaja es su liquidez, ya que la empresa se puede retirar del fondo (venta de participaciones) en cualquier momento; (DP) Depósitos a plazo.

3. Modelo

El problema ha sido modelizado mediante un programa lineal mixto. A continuación se detalla la nomenclatura (datos y variables) y se presentan y describen las ecuaciones.

3.1. Datos

T	Horizonte temporal
τ^0	Número de períodos entre la venta y el cobro correspondiente.
t^i	Número de períodos entre el uso de recursos (inputs) correspondientes a costes variables y su pago.
T^w	Conjunto de períodos en los que tienen lugar los pagos de personal.
T_t^{IVA}	Conjunto de períodos a considerar en la liquidación del IVA del período t ($t=1, \dots, T$). Lógicamente, si en el período t no existe liquidación del IVA, entonces $T_t^{IVA} = \emptyset$.
tf^{IS}	Período en que finaliza el año fiscal en curso al inicio del horizonte de planificación.
P^{IS}	Total de pagos a cuenta del impuesto de sociedades (incluye también los realizados con anterioridad al inicio del horizonte de planificación).
τ^{IS}	Período de vencimiento de la cuota íntegra del impuesto de sociedades correspondiente al ejercicio que finaliza dentro del horizonte de planificación.
b^{IS0}	Beneficio obtenido en los períodos que corresponden al ejercicio fiscal que está en curso al inicio del horizonte de planificación.
Q, M	Número de familias de productos y de materiales, respectivamente
e_{qm}	Número de unidades de la familia de materiales m necesarias para producir una unidad de la familia de productos q ($q=1, \dots, Q$; $m=1, \dots, M$).
g_{qt}	Capacidad necesaria para la obtención de una unidad de la familia de productos q en el período t ($q=1, \dots, Q$; $t=1, \dots, T$).
d_{qt}	Demanda de producto q prevista para el período t ($q=1, \dots, Q$; $t=1, \dots, T$).
$s_{q0}^Q, s_{qT}^Q, s_{m0}^M, s_{mT}^M$	Stock inicial y final de producto q y de material m , respectivamente ($q=1, \dots, Q$; $m=1, \dots, M$).
cs_{qt}^Q, cs_{mt}^M	Coste de almacenar en stock una unidad de producto q y de material m , respectivamente, en el período t ($q=1, \dots, Q$; $m=1, \dots, M$).

	$t=1, \dots, T$.
K	Número de opciones en relación con la adquisición de un nuevo equipo para modificar la capacidad.
P_t^{w0}	Pago de personal en el período t correspondiente a la plantilla inicial ($t=1, \dots, T$).
P_{kjt}^w	Modificación en el pago de personal en el período t , si se adquiere la opción k en el período j ($k=1, \dots, K; j=1, \dots, T; t=j, \dots, T$).
P_{kjt}^K	Pago, en el período t , si se adquiere la opción k en el período j ($k=1, \dots, K; j=1, \dots, T; t=j, \dots, T$).
P_{kt}^{K-IVA}	IVA correspondiente a adquirir la opción k en el período t ($k=1, \dots, K; t=1, \dots, T$).
B	Valor máximo del valor absoluto del saldo negativo de la cuenta de crédito remunerada.
$i_t^b, i_t^d, i_t^a (< i_t^b)$	Tipos de interés que se aplican, respectivamente, a la cantidad tomada de la cuenta de crédito (el valor absoluto del saldo de la cuenta, cuando este es negativo), a la cantidad depositada (el saldo de la cuenta, cuando este es positivo) y a la cantidad disponible no utilizada (B menos el valor absoluto del saldo negativo), en el período t ($t=1, \dots, T$).
b^{c0}	Saldo de la cuenta de crédito al inicio del horizonte de planificación.
PR	Conjunto de préstamos que se pueden solicitar.
TD	Conjunto de productos financieros tipo títulos al descuento.
FI	Conjunto de productos financieros tipo fondos de inversión.
DP	Conjunto de productos financieros tipo depósitos a plazo.
ti_p, tf_p	Períodos de inicio y de vencimiento del producto financiero p ($p \in PR \cup TD \cup FI \cup DP$). Los productos tipo FI no tienen fecha de vencimiento, pero sí fecha de inicio.
$r_{pt}^{PR-i}, r_{pt}^{PR-n}$	Coefficientes para el cálculo del pago de los costes e intereses y del nominal, respectivamente, del préstamo p en el período t ($p \in PR; t = ti_p, \dots, tf_p$).
$L_p^{PR/TD/FI/DP}, U_p^{PR/TD/FI/DP}$	Importes mínimo y máximo asociados al producto financiero p ($p \in PR \cup TD \cup FI \cup DP$).
r_{pt}^{TD}	Coefficientes para el cálculo del precio de compra/venta correspondiente al producto p , en el período t ($p \in TD; t = ti_p, \dots, tf_p$).
r_{pt}^{FI}	Coefficiente de revalorización entre el valor de una participación del FI p en el período t y el de una participación del mismo FI en la fecha de inicio de dicho fondo, ti_p ($p \in FI; t = ti_p + 1, \dots, T$).
r_{pt}^{DP}	Coefficientes para el cálculo de los intereses del depósito a plazo p en el período t ($p \in DP; t = ti_p + 1, \dots, \min(tf_p, T)$; con $r_{p,tf_p}^{DP} = 1$).
b_t^F	Balace de cobros y pagos, en el período t ($t=1, \dots, T$), que son conocidos con anterioridad al inicio del horizonte de planificación (i.e. no dependen de las decisiones incluidas en el modelo).
I_t^{FB}, G_t^{FB}	Ingresos y gastos, en el período t ($t=1, \dots, T$), conocidos con anterioridad al inicio del horizonte de planificación.
b_j^{I0}, b_j^{P0}	Parte de los saldos iniciales por cobrar y por pagar,

	respectivamente, que vencen en el período j ($j=1, \dots, \tau^0-1$ / $j=1, \dots, \tau^j-1$)
p_{qt}^Q	Precio de venta del producto q en el período t ($q=1, \dots, Q$; $t=1, \dots, T$).
C_t^0	Capacidad correspondiente a la situación inicial ($t=1, \dots, T$).
C_{kjt}^K	Incremento de capacidad, en relación con la correspondiente a la situación inicial, en el período t , si se adquiere la opción k , en el período j ($k=1, \dots, K$; $j=1, \dots, T$; $t=j, \dots, T$).
c_{qt}^{Q0}	Coste variable de producir una unidad de la familia q en el período t , correspondiente a la situación inicial ($q=1, \dots, Q$; $t=1, \dots, T$).
c_{qkjt}^Q	Coste variable de producir una unidad de la familia q en el período t , si se adquiere la opción k , en el período j ($q=1, \dots, Q$; $k=1, \dots, K$; $j=1, \dots, T$; $t=j, \dots, T$).
P_{mt}^M	Precio de compra del material m en el período t ($m=1, \dots, M$; $t=1, \dots, T$).
r_j^I	Coefficientes para considerar el descuento en el cobro con j períodos de anticipación ($j=0, \dots, \tau^0$).
r_j^P	Coefficientes para considerar el descuento por pronto pago, con j períodos de anticipación ($j=0, \dots, \tau^j$).
r^{IVA}	Tipo impositivo del IVA
r^{IS}	Tipo impositivo para el cálculo del impuesto de sociedades.

3.2. Variables

x_{qt}^Q	Producción de producto q en el período t ($q=1, \dots, Q$; $t=1, \dots, T$)
$y_{kt}^K \in \{0, 1\}$	Variable binaria que vale 1 si y sólo si se adquiere la opción k en el período t ($k=1, \dots, K$; $t=1, \dots, T$)
x_{mt}^M	Compra de materiales tipo m en el período t ($m=1, \dots, M$; $t=1, \dots, T$)
s_{qt}^Q, s_{mt}^M	Stock de producto q y de material m , respectivamente, al final del período t ($q=1, \dots, Q$; $m=1, \dots, M$; $t=1, \dots, T$).
f_{qt}	Demanda perdida de producto q en el período t ($q=1, \dots, Q$; $t=1, \dots, T$).
b_t^-, b_t^+	Valores absolutos para el saldo negativo y positivo, respectivamente, de la cuenta de crédito remunerada, en el período t ($t=1, \dots, T$).
I_{ij}	Cobro total o parcial, en el período t , de ventas que vencen en el período j ($t=1, \dots, T$; $j=t, \dots, t+\tau^0$).
I_{ij}^0	Cobro total o parcial, en el período t , del saldo inicial por cobrar que vence en el período j ($t=1, \dots, T$; $j=1, \dots, \tau^0-1$).
b_j^{IT}	Saldo final por cobrar de ventas que vencen en el período j ($j=T+1, \dots, T+\tau^0$).
P_{ij}	Pago total o parcial, en el período t , de compras de materiales que vencen en el período j ($t=1, \dots, T$; $j=t, \dots, t+\tau^j$).
P_{ij}^0	Pago total o parcial, en el período t , del saldo inicial por pagar que vence en el período j ($t=1, \dots, T$; $j=1, \dots, \tau^j-1$).
b_t^{PT}	Saldo final por pagar de compras de materiales que vencen en el período t ($t=T+1, \dots, T+\tau^j$).
c_t^Q	Costes variables de producción en el período t ($t=1, \dots, T$).
x_{pt}^{PR}	Cantidad solicitada del préstamo tipo p en el período t ($p \in PR$; $t=ti_p, \dots, tf_p$).

$y_{pt}^{PR} \in \{0,1\}$	Variable binaria que indica si se solicita el préstamo tipo p en el período t ($p \in PR$; $t = ti_p, \dots, tf_p$).
x_{pt}^{TD}	Importe nominal adquirido en el período t , del producto financiero (tipo títulos al descuento) p ($p \in TD$; $t = ti_p, \dots, tf_p - 1$).
$y_{pt}^{TD} \in \{0,1\}$	Variable binaria que indica si se invierte en el producto financiero (tipo títulos al descuento) p en el período t ($p \in TD$; $t = ti_p, \dots, tf_p - 1$).
v_{pjt}^{TD}	Venta (en valor nominal), total o parcial, en el período t , del título al descuento p adquirido en el período j ($p \in TD$; $j = ti_p, \dots, tf_p - 1$; $t = j + 1, \dots, tf_p$).
b_{pjt}^{TD}	Saldo en valor nominal, en el período t , de los títulos al descuento p adquiridos en el período j ($p \in TD$; $j = ti_p, \dots, tf_p - 1$; $t = j + 1, \dots, tf_p$).
x_{pt}^{FI}	Inversión en el fondo p , en el período t ($p \in FI$; $t = ti_p, \dots, T - 1$).
$y_{pt}^{FI} \in \{0,1\}$	Variable binaria que indica si se invierte en el producto financiero (tipo fondo de inversión) p en el período t ($p \in FI$; $t = ti_p, \dots, T - 1$).
$z_{pjt}^{FI} \in \{0,1\}$	Variable binaria auxiliar para imponer que las participaciones del fondo de inversión p se vendan en el mismo orden en que han sido adquiridas ($p \in FI$; $j = ti_p, \dots, T - 1$; $t = j + 1, \dots, T$). Si en el período t se venden participaciones del fondo p adquirido en j , entonces la binaria toma valor 1 y se impone que el saldo de las participaciones adquiridas en períodos anteriores a j sea igual a 0 (ecuación (22)).
v_{pjt}^{FI}	Venta (en valor nominal), total o parcial, en el período t , del fondo de inversión p adquirido en el período j ($p \in FI$; $j = ti_p, \dots, T - 1$; $t = j + 1, \dots, T$).
b_{pjt}^{FI}	Saldo, en el período t , de los fondos de inversión p adquiridos en el período j ($p \in FI$; $j = ti_p, \dots, T - 1$; $t = j + 1, \dots, T$).
x_p^{DP}	Imposición en el depósito a plazo p , en su fecha de inicio ti_p ($p \in DP$).
$y_p^{DP} \in \{0,1\}$	Variable binaria que indica si se realiza o no una imposición en el depósito a plazo p en su fecha de inicio ti_p ($p \in DP$).
B^{IS}	Beneficio total obtenido en el año fiscal que está en curso al inicio del horizonte de planificación.

3.3. Ecuaciones

Función objetivo:

$$[MAX] z = \sum_{t=1}^T \left[b_{t-1}^+ \cdot i_t^d + I_t^{FB} + \sum_{q=1}^Q \frac{p_{qt}^Q \cdot (d_{qt} - f_{qt})}{1 + r^{IVA}} + \left(\sum_{p \in TD} \sum_{ti_p < t \leq tf_p} r_{pt}^{TD} \cdot v_{pjt}^{TD} - \sum_{p \in TD} \sum_{ti_p \leq t < tf_p} r_{pt}^{TD} \cdot x_{pt}^{TD} \right) + \left(\sum_{p \in FI} \sum_{ti_p < t} r_{pt}^{FI} \cdot v_{pjt}^{FI} - \sum_{p \in FI} \sum_{ti_p \leq t} r_{pt}^{FI} \cdot x_{pt}^{FI} \right) + \sum_{p \in DP} \sum_{ti_p < t < tf_p} r_{pt}^{DP} \cdot x_p^{DP} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{t=1}^T \left[b_{t-1}^- \cdot (i_t^b - i_t^a) + B \cdot i_t^a + G_t^{FB} + \sum_{m=1}^M \frac{p_{mt}^M \cdot x_{mt}^M}{1 + r^{IVA}} + \sum_{p \in PR | t_p \leq t \leq t_p} r_{pt}^{PR-i} \cdot x_{pt}^{PR} + \right. \\
& \left. + C_t^Q + \sum_{q=1}^Q c s_{qt}^Q \cdot s_{qt}^Q + \sum_{m=1}^M c s_{mt}^M \cdot s_{mt}^M + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^t P_{kjt}^K \cdot y_{kj}^K \right] - \sum_{t \in T^W | t \leq T} \left(P_t^{W0} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^t P_{kjt}^W \cdot y_{kj}^K \right) + \\
& + \sum_{q=1}^Q \frac{p_{qt}^Q \cdot s_{qt}^Q}{1 + r^{IVA}} + \sum_{m=1}^M \frac{p_{mt}^M \cdot s_{mt}^M}{1 + r^{IVA}} + \sum_{p \in TD | t_p < T \leq t_p} \sum_{j=t_i^p}^{t_f^p} r_{pT}^{TD} \cdot b_{pjT}^{TD} + \sum_{p \in FI | t_p < T} \sum_{j=t_i^p}^T r_{pT}^{FI} \cdot b_{pjT}^{FI}
\end{aligned} \tag{1}$$

Capacidad de producción:

$$\sum_{q=1}^Q g_{qt} \cdot x_{qt}^Q \leq C_t^0 + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^t C_{kjt}^K \cdot y_{kj}^K \quad t = 1, \dots, T \tag{2}$$

Balances de stock de productos finales y de materiales (siendo los stocks iniciales y finales conocidos):

$$s_{q,t-1}^Q + x_{qt}^Q + f_{qt} = d_{qt} + s_{qt}^Q \quad q = 1, \dots, Q; t = 1, \dots, T \tag{3}$$

$$s_{m,t-1}^M + x_{mt}^M = \sum_{q=1}^Q e_{qm} \cdot x_{qt}^Q + s_{mt}^M \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \tag{4}$$

Cobros:

$$\sum_{q=1}^Q p_{qt}^Q \cdot (d_{qt} - f_{qt}) = \sum_{j=t}^{t+\tau^0} \frac{I_{j,t+\tau^0}}{r_{j-t}^I} \quad t = 1, \dots, T - \tau^0 \tag{5}$$

$$\sum_{q=1}^Q p_{qt}^Q \cdot (d_{qt} - f_{qt}) = \sum_{j=t}^T \frac{I_{j,t+\tau^0}}{r_{j-t}^I} + b_{t+\tau^0}^{IT} \quad t = T - \tau^0 + 1, \dots, T \tag{6}$$

$$b_j^{I0} = \sum_{t=1}^{\tau^0} \frac{I_{tj}^0}{r_{j-t}^I} \quad j = 1, \dots, \tau^0 \tag{7}$$

Pagos a proveedores:

$$\sum_{m=1}^M p_{mt}^M \cdot x_{mt}^M = \sum_{j=t}^{t+\tau^i} \frac{P_{j,t+\tau^i}}{r_{j-t}^P} \quad t = 1, \dots, T - \tau^i \tag{8}$$

$$\sum_{m=1}^M p_{mt}^M \cdot x_{mt}^M = \sum_{j=t}^T \frac{P_{j,t+\tau^i}}{r_{j-t}^P} + b_{t+\tau^i}^{PT} \quad t = T - \tau^i + 1, \dots, T \tag{9}$$

$$b_j^{P0} = \sum_{t=1}^{\tau^i} \frac{P_{tj}^0}{r_{j-t}^P} \quad j = 1, \dots, \tau^i \tag{10}$$

Préstamos:

$$L_p^{PR} \cdot y_{pt}^{PR} \leq x_{pt}^{PR} \leq U_p^{PR} \cdot y_{pt}^{PR} \quad p \in PR; t = t_{i_p}, \dots, t_{f_p} \tag{11}$$

Inversión en capacidad:

$$\sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^K y_{kj}^K \leq 1 \tag{12}$$

$$c_t^Q \geq \sum_{q=1}^Q c_{qkt}^Q \cdot x_{qt}^Q - M_{jtk} \cdot (1 - y_{kj}^K) \quad j=1, \dots, T; t=j, \dots, T; k=1, \dots, K \quad (13)$$

donde $M_{jtk} = \max_{q=1, \dots, Q} \left(c_{qkt}^Q \cdot \frac{C_t^0}{g_{qt}} \right)$

$$c_t^Q \geq \sum_{q=1}^Q c_{qt}^{Q0} \cdot x_{qt}^Q - M_t^0 \cdot \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^K y_{kj}^K \quad t=1, \dots, T \quad \text{donde } M_t^0 = \max_{q=1, \dots, Q} \left(c_{qt}^{Q0} \cdot \frac{C_t^0}{g_{qt}} \right) \quad (14)$$

Títulos al descuento (vencen en una determinada fecha; pueden venderse total o parcialmente con anterioridad a dicha fecha):

$$L_p^{TD} \cdot y_{pt}^{TD} \leq x_{pt}^{TD} \leq U_p^{TD} \cdot y_{pt}^{TD} \quad p \in TD; t = ti_p, \dots, tf_p \quad (15)$$

$$b_{pj, j+1}^{TD} = x_{pj}^{TD} - v_{pj, j+1}^{TD} \quad p \in TD; j = ti_p, \dots, tf_p - 1 \quad (16)$$

$$b_{pj, t}^{TD} = b_{pj, t-1}^{TD} - v_{pj, t}^{TD} \quad p \in TD; j = ti_p, \dots, tf_p - 1; t = j + 2, \dots, tf_p - 1 \quad (17)$$

$$v_{pj, tf_p}^{TD} = b_{pj, tf_p}^{TD} \quad p \in TD; j = ti_p, \dots, tf_p - 1 \quad (18)$$

Fondos de inversión (no tienen fecha de vencimiento, pueden venderse total o parcialmente siempre y cuando el orden de venta se corresponden con el orden de compra):

$$L_p^{FI} \cdot y_{pt}^{FI} \leq x_{pt}^{FI} \leq U_p^{FI} \cdot y_{pt}^{FI} \quad p \in FI; t = ti_p, \dots, T - 1 \quad (19)$$

$$b_{pj, j+1}^{FI} = x_{pj}^{FI} - v_{pj, j+1}^{FI} \quad p \in FI; j = ti_p, \dots, T - 1 \quad (20)$$

$$b_{pj, t}^{FI} = b_{pj, t-1}^{FI} - v_{pj, t}^{FI} \quad p \in FI; j = ti_p, \dots, T - 1; t = j + 2, \dots, T \quad (21)$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{pj, t}^{FI} \leq U_p^{FI} \cdot z_{pj, t}^{FI} \\ \sum_{\tau=ti_p}^{j-1} b_{p\tau, t}^{FI} \leq (j - ti_p) \cdot U_p^{FI} \cdot (1 - z_{pj, t}^{FI}) \end{array} \right\} \quad p \in FI; j = ti_p, \dots, T - 1; t = j + 1, \dots, T \quad (22)$$

Depósitos a plazo:

$$L_p^{DP} \cdot y_p^{DP} \leq x_p^{DP} \leq U_p^{DP} \cdot y_p^{DP} \quad p \in DP \quad (23)$$

Balance cuenta de crédito:

$$\begin{aligned} b_t^+ - b_t^- &= \left[b_{t-1}^+ \cdot (1 + i_t^d) - b_{t-1}^- \cdot (1 + i_t^b - i_t^a) - B \cdot i_t^a + b_t^F \right] + \sum_{j \in [1, \dots, \tau^0] | t \leq \tau^0} I_{ij}^0 + \sum_{j=t}^{t+\tau^0} I_{ij}^0 + \\ &+ \sum_{j \in I_t^{IVA}} \left(r^{IVA} \cdot \left(\sum_{m=1}^M p_{mj}^M \cdot x_{mj}^M - \sum_{q=1}^Q p_{qj}^Q \cdot (d_{qj} - f_{qj}) \right) + \sum_{k=1}^K y_{kj}^K \cdot P_{kj}^{K-IVA} \right) + \sum_{p \in PR} x_{pt}^{PR} + \\ &\sum_{p \in TD | ti_p < t \leq tf_p} \sum_{j=ti_p}^{t-1} r_{pt}^{TD} \cdot v_{pj, t}^{TD} - \sum_{p \in TD | ti_p \leq t < tf_p} r_{pt}^{TD} \cdot x_{pt}^{TD} + \sum_{p \in FI | ti_p < t} \sum_{j=ti_p}^{t-1} r_{pt}^{FI} \cdot v_{pj, t}^{FI} - \sum_{p \in FI | ti_p \leq t} r_{pt}^{FI} \cdot x_{pt}^{FI} + \\ &+ \sum_{p \in DP | ti_p < t \leq tf_p} r_{pt}^{DP} \cdot x_p^{DP} - \sum_{p \in DP | ti_p = t} x_p^{DP} - \sum_{p \in PR | ti_p \leq t \leq tf_p} (r_{pt}^{PR-i} + r_{pt}^{PR-n}) \cdot x_{pt}^{PR} - \sum_{j \in [1, \dots, \tau^i] | t \leq \tau^i} P_{ij}^0 - \\ &- \sum_{j=t}^{t+\tau^i} P_{ij} - \left[P_t^{W0} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^t P_{kjt}^W \cdot y_{kj}^K \right]_{t \in T^W} - c_t^Q - \sum_{q=1}^Q c s_{q, t-\tau^i}^Q \cdot s_{q, t-\tau^i}^Q - \\ &- \sum_{m=1}^M c s_{m, t-\tau^i}^M \cdot s_{m, t-\tau^i}^M - \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^t P_{kjt}^K \cdot y_{kj}^K - [r^{IS} \cdot B^{IS} - P^{IS}]_{t=if^{IS}} \end{aligned} \quad (24)$$

$t = 1, \dots, T$

Impuesto de Sociedades:

$$\begin{aligned}
 B^{IS} = & b^{IS0} + \sum_{t=1}^{tf^{IS}} \left[\begin{aligned} & b_{t-1}^+ \cdot i_t^d + I_t^{FB} + \sum_{q=1}^Q \frac{p_{qt}^Q \cdot (d_{qt} - f_{qt})}{1 + r^{IVA}} + \\ & \left(\sum_{p \in TD | t_p < t \leq tf_p} \sum_{j=t_i^p}^{t-1} r_{pj}^{TD} \cdot v_{pj}^{TD} - \sum_{p \in TD | t_p \leq t < tf_p} r_{pt}^{TD} \cdot x_{pt}^{TD} \right) + \\ & \left(\sum_{p \in FI | t_p < t} \sum_{j=t_i^p}^{t-1} r_{pj}^{FI} \cdot v_{pj}^{FI} - \sum_{p \in FI | t_p \leq t} r_{pt}^{FI} \cdot x_{pt}^{FI} \right) + \sum_{p \in DP | t_p < t < tf_p} r_{pt}^{DP} \cdot x_p^{DP} + \end{aligned} \right] - \\
 & - \sum_{t=1}^{tf^{IS}} \left[\begin{aligned} & b_{t-1}^- \cdot (i_t^b - i_t^a) + B \cdot i_t^a + G_t^{FB} + \sum_{m=1}^M \frac{p_{mt}^M \cdot x_{mt}^M}{1 + r^{IVA}} + \sum_{p \in PR | t_p \leq t \leq tf_p} r_{pt}^{PR-i} \cdot x_{pt}^{PR} + \\ & + c_t^Q + \sum_{q=1}^Q c s_{qt}^Q \cdot s_{qt}^Q + \sum_{m=1}^M c s_{mt}^M \cdot s_{mt}^M + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^t P_{kjt}^K \cdot y_{kj} \end{aligned} \right] - \\
 & - \sum_{t \in T^W | t \leq tf^{IS}} \left(P_t^{WO} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^t P_{kjt}^W \cdot y_{kj} \right) + \sum_{q=1}^Q \frac{p_{q,tf^{IS}}^Q \cdot s_{q,tf^{IS}}^Q}{1 + r^{IVA}} + \sum_{m=1}^M \frac{p_{m,tf^{IS}}^M \cdot s_{m,tf^{IS}}^M}{1 + r^{IVA}} + \\
 & + \sum_{p \in TD | t_p < tf^{IS} \leq tf_p} \sum_{j=t_i^p}^{tf^{IS}} r_{pj,tf^{IS}}^{TD} \cdot b_{pj,tf^{IS}}^{TD} + \sum_{p \in FI | t_p < tf^{IS}} \sum_{j=t_i^p}^{tf^{IS}} r_{pj,tf^{IS}}^{FI} \cdot b_{pj,tf^{IS}}^{FI}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Referencias

Boiteux, O. (2009). Planificación agregada de la producción, la plantilla, el tiempo de trabajo y la tesorería. Lusa, A.; Corominas, A. (directores). Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials.

Corominas, A.; Lusa, A.; Olivella, J. (2010). A detailed workforce planning model including non-linear dependence of capacity on the size of the staff and cash management. *Working Paper*, IOC-DT-P-2010-01, Institut d'Organització i Control, Universitat Politècnica de Catalunya. <http://hdl.handle.net/2117/7046>

Hax, A.C. (1978). Aggregate Production Planning, en *Handbook of Operations Research. Models and Applications* (Moder, J.J.; Elmaghraby, S.E., eds.)

Hax, A.; Candea, D. (1984). *Production and Inventory Management*. Prentice-Hall.

Martínez, C. (2006). Gestión de la tesorería. Working Paper IOC-DT-P-2006-20, Universitat Politècnica de Catalunya.

Singhal, J.; Singhal, K. (2006a). Holt, Modigliani, Muth, and Simon's work and its role in the renaissance and evolution of operations management. *Journal of Operations Management*, Vol. 25, No. 2, pp. 300-309.

Singhal, J.; Singhal, K. (2006b). The domain of production and operations management and the role of Elwood Buffa in its delineation. *Journal of Operations Management*, Vol. 25, No. 2, pp. 310-327.