

SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA EL PROBLEMA DE DEFORMACIÓN PLÁSTICA DE UN CUERPO CILÍNDRICO

J. Antonio Travieso Rodríguez¹, Hernán A. González Rojas²

¹ Universitat Politècnica de Catalunya. Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Barcelona. C/ Comte d'Urgell, 187, 08036 Barcelona, España. Tel +34934137338. antonio.travieso@upc.edu

² Universitat Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona. Av. Diagonal, 647, 08028 Barcelona, España. Tel +34934054016. hernan.gonzalez@upc.edu

Área Temática: 21. Procesos de fabricación

RESUMEN

En este artículo se relata la obtención de una solución para predecir la presión media hecha por una prensa en un proceso de recalado de un cuerpo cilíndrico. La principal novedad en este trabajo es la consideración de la velocidad de la prensa en el modelo de deformación plástica y la estimación de la relación que tiene esta velocidad, con el endurecimiento por deformación.

Los principales resultados son: Se ha podido estimar la presión media en un proceso de recalado y el endurecimiento por deformación asociado, también se ha podido determinar las condiciones de operación, velocidad de la prensa y espesor de material de forma que no aparezca el fenómeno de endurecimiento por deformación.

PALABRAS CLAVES: Deformación plástica, tensión plana, auto-endurecimiento

INTRODUCCIÓN

La distribución de presión en la superficie de una pieza durante un proceso de recalado con prensa, no es uniforme. En general son varios los factores que influyen sobre la presión de recalado, como son; el rozamiento en la interfase prensa-material, las propiedades del material y geometría a deformar. Dentro de este último grupo se encuentra, entre otros, el endurecimiento por deformación, que es principalmente función de la tasa de velocidad de deformación. En el caso de los aluminios el auto endurecimiento es un factor importante [1].

En este trabajo se obtiene una función analítica para predecir la distribución de presión y la presión media P_a , sobre un cuerpo con geometría axisimétrica. La solución desarrollada se construye sobre un método de equilibrio de fuerzas, sobre un cuerpo libre infinitesimal. Este balance de fuerzas ha permitido construir una ecuación diferencial unidimensional, con variables esfuerzo normal en la dirección radial σ_r y presión de recalado P , variables que son función solo de la variable independiente radio r .

La principal novedades de este trabajo radica en la consideración de los efectos de la tasa de velocidad de deformación y su efecto sobre el endurecimiento del material bajo un proceso de recalado.

MODELO MATEMÁTICO

Para predecir la distribución de presión de recalado sobre un cuerpo cilíndrico, como el que se muestra en la figura 1, se desarrolla un modelo en base a una ecuación diferencial, bajo las siguientes hipótesis: el material se considera un plástico ideal, en el cual la tensión a la fluencia a tracción pura γ se considera solo función de la intensidad de la tasa de velocidad de deformación, por último, se asume rozamiento en la interfase prensa-material, considerando para ello un coeficiente de rozamiento constante μ .

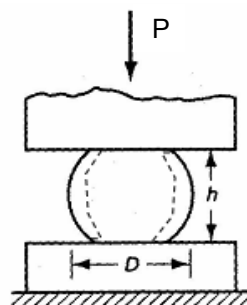


Figura 1. Recalado con prensa de un disco, de espesor h y diámetro D

Realizando un balance de fuerzas, en la dirección radial, sobre un elemento infinitesimal, se obtiene la ecuación diferencial que rige el problema de fuerzas para el caso en estudio:

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{2\mu P}{h} \quad (1)$$

Donde: h es el espesor del disco (ver figura 1), ρ es la densidad del material y u es la componente de velocidad del material en la dirección radial. La tasa de velocidad del material en la dirección radial se puede reescribir:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

Donde, v es la componente de velocidad del material en dirección axial. Asumiendo que v es constante, y que se cumple la ecuación de conservación de la masa para un volumen de control formado por un disco de espesor h y radio r, ecuación (3a). Se obtiene una forma más compacta de la ecuación (2), que es la que se muestra en la ecuación (3b).

$$u = v \frac{r}{2h} \quad \frac{du}{dt} = \frac{3v^2 r}{2h} \quad (3a,b)$$

Reemplazando (3b) en (1) se obtiene la ecuación que rige el problema de fuerzas (4a). En esta ecuación, v que es la velocidad del material en la dirección axial, se asocia a la velocidad de la prensa, con esto se tiene una ecuación y dos incógnitas σ_r y P.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{2\mu P}{h} = \rho \frac{3v^2 r}{4h^2} \quad P = A - B\sigma_r \quad (4a,b)$$

Asumiendo que la presión P se relaciona con la tensión en la dirección radial σ_r , por medio de una ecuación lineal o criterio de plasticidad (4b), se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas las que generan una única solución o función del estado de tensiones en el material. Las constantes A y B de la ecuación (4b) se definen más adelante, de momento se asumen como constantes. Adimensionalizando las variables; presión P, tensión en la dirección radial σ_r , radio r y constante A*, por medio de las siguientes ecuaciones:

$$P^* = \frac{P}{\gamma} \quad \sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{\gamma} \quad r^* = \frac{r}{R} \quad A^* = \frac{A}{\gamma} \quad (5,a,b,c,d)$$

Donde: R es el radio del disco y γ es la tensión de fluencia a tracción pura.

Considerando la condición de borde (6a), que asume que la presión en el borde del cilindro es igual a A. La función distribución de presión queda definida por la ecuación (6b), que es la solución del sistema definido por las ecuaciones (4a, b).

$$P^*|_{r^*=1} = A^* \quad P^* = \left[A^* - \frac{3}{16} \frac{\rho v^2 D}{\mu \gamma h} \left(\frac{1}{C} - 1 \right) \right] e^{C(1-r^*)} + \frac{3}{16} \frac{\rho v^2 D}{\mu \gamma h} \left(\frac{1}{C} - r^* \right) \quad (6a,b)$$

Donde, D es el diámetro del disco y C es una constante definida en (7a).

$$C = \frac{\mu B D}{h} \quad Pa^* = 2 \int_0^1 P^*(r^*) r^* dr^* \quad (7a,b)$$

Por último, a partir de la ecuación (6b) se puede obtener la presión media adimensional Pa^* , definida por el operador (7a), el cual aplicado a la ecuación (6b) genera la siguiente expresión general para Pa^* .

$$Pa^* = 2 \left[A^* - \frac{3}{16} \frac{\rho v^2 D}{\mu \gamma h} \left(\frac{1}{C} - 1 \right) \right] \left(\frac{e^C - 1 - C}{C^2} \right) + \frac{3}{16} \frac{\rho v^2 D}{\mu \gamma h} \left(\frac{1}{C} - \frac{2}{3} \right) \quad (8)$$

Donde: C se define en (7a). Luego la presión media, ecuación (8a) es una función de la velocidad de la prensa v y de la constante A*, entre otras variables. La constante A* tiene relación con el criterio de plasticidad utilizado y se define en el siguiente apartado.

El último ingrediente a considerar en el modelo de deformación plástica es el efecto del endurecimiento por deformación. Este efecto lo introducimos a través de la función $\phi(H)$ que corresponde a una tensión de fluencia o tensión umbral, función de la intensidad de la tasa de deformación a corte.

En general, las tensiones normales y de corte en un estado complejo de tensiones se pueden relacionar mediante el criterio de von Mises. Asumiendo que el material tiene un comportamiento plástico ideal, en el cual la tensión de fluencia a tracción pura depende de la velocidad de deformación. Se puede utilizar la ecuación de von Mises como criterio de plasticidad, la cual se reduce en nuestro caso a (9a).

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 = \gamma(H)^2 \left[1 - 3 \left(\frac{\tau_{rz}}{\gamma(H)} \right)^2 \right] \quad (\sigma_r^* + P^*) = \varphi(H) \quad (9a,b)$$

Asumiendo despreciable la tensión de corte τ_{rz} , y considerando $\sigma_z = -P$ la ecuación (9a), se reduce a (9b), donde la relación entre el esfuerzo en la dirección radial σ_r y la presión P , adimensionales, es una cierta función de la intensidad de la tasa de deformación a corte H . El criterio de plasticidad (9b) define el valor que tomará la constante A^* y B , es inmediato notar que $B=1$ y que $A^* = \varphi(H)$.

Según [1], el endurecimiento por deformación sigue una ley exponencial como se muestra en (10a), donde K y n son dos constantes características del material, ε es la deformación real inducida en el material a tracción y σ es la tensión producida, considerando el endurecimiento del material. El modelo desarrollado en este artículo, corresponde a un estado de tensiones complejo, por lo tanto, generalizaremos la ecuación (10a) considerando que la tasa de deformación real a tracción ε , en un estado complejo de tensiones, estaría bien representada por la intensidad de la tasa de deformación a corte H . De igual forma, la tensión producida, considerando el endurecimiento del material σ en un estado complejo de tensiones, estaría bien representada por la tensión de von Mises. Determinando experimentalmente las constantes K y n , a partir de un ensayo de tracción, se obtiene la función que define la tensión de von Mises adimensional φ , en función de la intensidad de la tasa de deformación a corte H . La ecuación (10b) muestra la forma que toma la función $\varphi(H)$, donde H_1 es la intensidad de la tasa de deformación a corte asociada a la tensión de fluencia del material, H_1 a sido obtenido siguiendo una metodología descrita en [1].

$$\sigma = K \varepsilon^n \quad \varphi(H) = \begin{cases} 1 & \text{si } H < H_1 \\ \frac{K}{\gamma} \cdot (\sqrt{3}H)^n & \text{si } H \geq H_1 \end{cases} \quad (10a,b)$$

En la tabla 1 se pueden ver los valores que toman las constantes K , n , H_1 , y γ , para una probeta de aluminio.

Tabla 1, Constante del modelo y propiedades que caracterizan el material					
$\rho=0,0027 \text{gr/mm}^3$	$E=70000 \text{N/mm}^2$	$K=221 \text{N/mm}^2$	$n=0,267$	$H_1=0,5788$	$\gamma=45,3 \text{N/mm}^2$

Donde: E es el modulo de Young

El último ingrediente de este modelo es, relacionar la intensidad de la tasa de deformación a corte H , con la velocidad de la prensa. Asumiendo que las tensiones de corte $\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0$ y que $\sigma_r = \sigma_\theta$, las ecuaciones de Saint Venant-von Mises [2], se reducen en este caso a:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\frac{1}{3}(\sigma_r - \sigma_z)} = \frac{u}{\frac{1}{3}(\sigma_r - \sigma_z)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{\frac{2}{3}(\sigma_z - \sigma_r)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}}{2\tau_{rz}} \quad (11)$$

Donde: u es la componente de velocidad del material en la dirección radial y τ_{rz} es la tensión de corte en el plano r - z . Por otra parte, la intensidad de la tasa de deformación se define según [2] por:

$$H(r, z) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2} \quad (12)$$

Reordenando los términos en (11) de la siguiente forma: asociando el primer término con el segundo, asociando el segundo término con el tercero y asociando el primer término con el tercero, más la ecuación de conservación de la masa, se obtienen 4 ecuaciones diferenciales que remplazadas en la definición de la intensidad de la tasa de deformación (12), reducen esta expresión a (13a)

$$H(r, z) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial v}{\partial z} \sqrt{2 + 6 \left(\frac{\tau_{rz}}{\sigma_z - \sigma_r} \right)^2} \quad H(r, z) = \sqrt{3} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (13a,b)$$

Asumiendo que la magnitud de la tensión de corte es mucho más pequeña que la diferencia entre las tensiones normales, la expresión (13a) se reduce a (13b), en donde v es una función de r y z .

Reemplazando la ecuación de la conservación de la masa en (13b), se tiene (14a), a su vez, promediando sobre r (14a), de forma tal de que H sea solo función de z , mediante el operador (14b), se tiene (15a).

$$H(r, z) = -\sqrt{3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) \quad H(z) = \frac{2}{R^2} \int_0^R H(r, z) r \, dr \quad (14a,b)$$

Por último, introduciendo la ecuación de la conservación de la masa para un volumen de control definido por un disco, se tiene (15b) una relación entre la intensidad de la tasa de deformación H y la velocidad en la dirección axial v , velocidad que asociamos al movimiento de la prensa.

$$H(z) = -2\sqrt{3} \frac{u}{R} \qquad H(z) = -\sqrt{3} \frac{v}{h} \qquad (15a,b)$$

De la ecuación (15b) se deduce que si la velocidad de la prensa es constante, la intensidad de la tasa de deformación H es constante, con lo cual, A^* también es constante, ya que A^* se relaciona con H por medio de la ecuación (10b).

RESULTADOS

Primero se ha analiza como varía el criterio umbral ϕ , que es función de la intensidad de la tasa de deformación a corte H , con el cambio de espesor o altura de la superficie a deformar, para diferentes velocidades de deformación, ver figura 2. En esta figura se muestra una gráfica de la tensión umbral ϕ en función del espesor h y de la velocidad de la prensa v , para ello se remplaza (15b) en (10b). Aquí, se puede ver que la cota inferior para la tensión umbral es $\phi=1$, este es un caso en el cual no existe endurecimiento por deformación. Por lo tanto, si se desea trabajar con una prensa a una velocidad $v=2\text{mm/s}$, los espesores ha deformar h , deberían ser superiores a 6mm para no tener el efecto del endurecimiento por deformación, o inferiores a 6mm si se quiere que el proceso de deformación aumente la dureza del material deformado. También se puede ver que para velocidades de la prensa del orden de 10mm/s y espesores iguales o menores de 20mm, siempre hay endurecimiento por deformación, para el caso del aluminio en estudio.

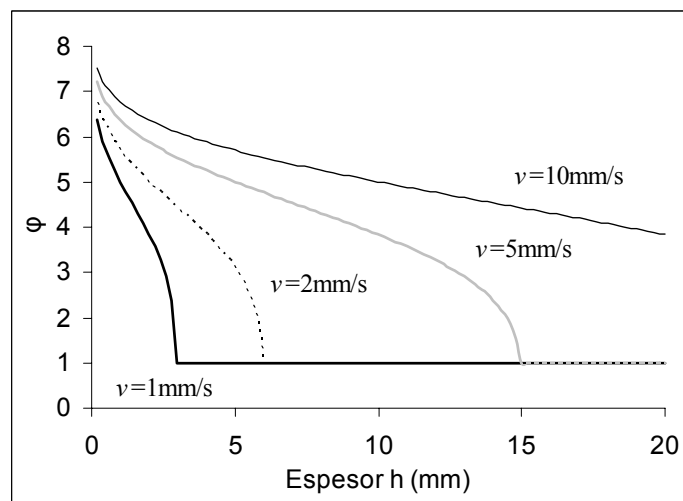


Figura 2. Valores que toma el criterio umbral en función de la altura de la pieza a deformar para diferentes valores de velocidad de deformación.

Utilizando las ecuaciones (8, 10b, 15b) y los datos de la tabla 1, se pueden realizar simulaciones de la presión media adimensional, considerando entre otras variables la velocidad de la prensa y el efecto del endurecimiento por deformación en un proceso de recalado de discos macizos. Para estudiar el efecto que tiene la velocidad de la prensa sobre la presión media, se estudia el efecto que tiene el valor adimensional mostrado en (16) sobre los términos de la ecuación de presión media adimensional (8). Si asumimos que se deforma una arandela de aluminio con una relación de esbeltez $D/h=10$, una velocidad de la prensa de $v=10\text{mm/s}$ y las propiedades definidas en la tabla 1, el número adimensional mostrado en (16) es de un orden muy pequeño en comparación a A^* , que corresponde al valor del criterio de plasticidad definido en (10b) y que siempre será mayor o igual que 1.

$$\frac{\rho v^2 D}{\mu \gamma h} = 12.0 \times 10^{-9} \qquad (16)$$

Donde: el coeficiente de rozamiento $\mu=0,5$.

Por lo tanto para el caso de un recalado de una arandela de aluminio, con las propiedades antes mostradas (Tabla 1), y una relación de esbeltez entre 1 y 10, la ecuación (8) se reduce a (17) ya que el número adimensional (16) toma valores entre 12×10^{-8} y 12×10^{-9} , con lo cual se tiene una expresión más simple. En esta expresión, la velocidad de la prensa v solo aparece en el término A^* , por lo tanto, v influye sobre la presión media adimensional, por medio del endurecimiento por deformación y no por los términos que aparecen en la solución (8).

$$Pa^* = 2A^* \left(\frac{e^c - 1 - C}{C^2} \right) \qquad (17)$$

Una forma más útil de la constante C definida en (7a) es la siguiente:

$$C = \mu \sqrt{\frac{4 \cdot Vol}{\pi h^3}} \quad (18)$$

Donde: Vol es el volumen del material a deformar, π número Pi. La expresión (18) se obtiene despejando D/h de la ecuación de conservación de la masa, si asumimos que la densidad del material ha de deformar es constante durante todo el proceso, el volumen se debe conservar durante todo el proceso, con lo cual se puede reescribir (7a) como una función del volumen del material a deformar.

Con C definida por (18) y Pa* definida por (17) se obtiene la grafica siguiente:

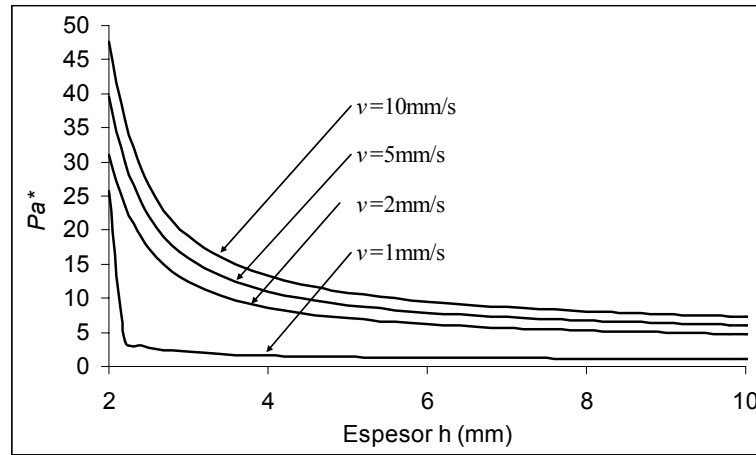


Figura 3. Valores de presión media adimensional Pa* función del espesor h, para diferentes valores de velocidad de deformación.

En la figura 3 se puede ver que para valores pequeños del espesor h, la presión media Pa* aumenta, por lo tanto deformar arandelas o laminas de poco espesor, requieren de una gran presión, debido fundamentalmente al endurecimiento por deformación. Si la velocidad de deformación es del orden de 1mm/s, la presión de recalcado se mantiene constante, es independiente del espesor, siempre que h sea mayor o igual que 3mm. Para esta última condición, la presión media adimensional no se encuentra afectada por el endurecimiento por deformación.

CONCLUSIONES

Una vez analizados los resultados se podría concluir que:

1. Se ha desarrollado un modelo para predecir las presiones en el proceso de deformación de un cuerpo cilíndrico, donde se consideran los efectos de la velocidad de deformación y del endurecimiento del material.
2. Este modelo es analítico, de fácil implementación numérica que consideran el proceso como un problema de tensión plana.
3. Se ha podido analizar como influye el efecto del endurecimiento por deformación sobre la presión media en el recalcado.

REFERENCIAS

1. Hosford, W.F.; Caddell, R.M. Metal forming, Mechanics and metallurgy. Second edition, Ed. PTR Prentice-Hall inc., (1993).
2. Kachanov, L.M. Fundamentals of the theory of plasticity. Dover Publications, INC (2004).