

Comparación de dos esquemas numéricos en la modelación de flujo mixto en colectores pluviales

José Luis Aragón

Ingeniero Civil; Estudiante de doctorado, Grupo de investigación FLUMEN,

Universitat Politècnica de Catalunya

jose.luis.aragon@upc.edu

Rodrigo Concha

Ingeniero Civil; Académico, Departamento de Ingeniería en Obras Civiles, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile

rodrigo.concha@upc.edu

Ernest Bladé

Ingeniero de Caminos; Profesor colaborador, Grupo de Investigación FLUMEN,

Universitat Politècnica de Catalunya

ernest.blade@upc.edu

Manuel Gómez

Ingeniero de Caminos; Catedrático, Grupo de Investigación FLUMEN,

Universitat Politècnica de Catalunya

manuel.gomez@upc.edu

1 Introducción

El objetivo de una red de drenaje urbana es principalmente la conducción de aguas pluviales y residuales, bajo ciertos criterios de diseño. Un criterio común, es asegurar la capacidad hidráulica adecuada para conducir un caudal máximo, por ejemplo, para eventos de precipitación menores a 5 años de periodo de retorno, en lámina libre. Cuando una tormenta excede el evento de diseño y la capacidad de uno o más colectores es superada, el sistema puede trabajar bajo presión. El flujo mixto es el fenómeno de transición de flujo en lámina libre a flujo en presión con la posibilidad de aire atrapado, que puede presentarse en muchas situaciones, entre ellos, los colectores pluviales. Este fenómeno puede ser inducido por cambios bruscos en las condiciones de contorno e inestabilidades (Yen, 2001).

La propia entrada en presión del colector o la liberación de aire a través de los pozos puede inducir severos transitorios de presión dañando los colectores y causar otros problemas relacionados como: retroceso de flujo, desbordamiento, voladura de tapaderas de pozos y expulsión de agua. Este es un fenómeno muy dinámico incluso sin cambios rápidos de cualquier condición de contorno (Song et al., 1983).

En la literatura existe un gran número de investigaciones experimentales sobre la transición de flujo en lámina libre a flujo en presión, y para reproducir numéricamente la parte en presión de este fenómeno han sido propuestas principalmente tres aproximaciones generales de cálculo: el método de la ranura de Preissmann, el método de la columna rígida, y métodos basados en modelos dinámicos completos; estas son las principales metodologías que se incluyen en los modelos comerciales de cálculo de redes de alcantarillado. En este trabajo se analiza el fenómeno de flujo mixto aplicando los modelos numéricos CARPA y EPA SWMM 5.0 a un caso en particular, sin considerar la posibilidad de aire atrapado.

1.1 Carpa

CARPA es una herramienta para el cálculo de flujo en lámina libre y régimen variable en una y dos dimensiones y presión en una dimensión desarrollada en el grupo de investigación FLUMEN, UPC (Bladé y Gómez, 2006). Utiliza esquemas numéricos de alta resolución, discretizando el dominio de cálculo en volúmenes finitos mediante el método de Roe. Para flujo variable en una dimensión, CARPA resuelve las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa, que escritas en notación vectorial son:

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} F = H \quad (1)$$

Donde U es el vector de variables de flujo, F el tensor de flujo, y H es el término independiente o término fuente, que responden a las expresiones:

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} Q \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde A es el área de la sección mojada, Q el caudal circulante, g la aceleración de la gravedad, S_0 la pendiente del fondo, S_f la pendiente motriz I_1 la fuerza debida a la presión del agua en una sección, e I_2 la fuerza de presión del contorno en un tramo de canal no prismático.

Los esquemas numéricos en volúmenes finitos tienen la habilidad de capturar discontinuidades en la solución automáticamente, sin necesidad de rastrearlas (Toro, 2001). El método de volúmenes finitos se basa en las ecuaciones de gobierno escritas en forma integral sobre una celda o volumen finito. El dominio de estudio o malla de cálculo es discretizado en un dominio temporal x , en celdas de longitud Δx y dominio temporal t en intervalos de tiempo Δt , y las variables utilizadas (A y Q) representan el valor medio de las variables dependientes en cada celda i , centrada en el nodo x_i y se extiende de $i-1/2$ a $i+1/2$. De esta forma, el esquema numérico para la solución de la ecuación (1) y determinar el valor medio de las variables (U_i^{n+1}) en la celda i en el instante de tiempo t^{n+1} , es dado por:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*) + \Delta t H_i^* \quad (3)$$

Donde F^* es el flujo numérico, U_i^n el valor medio del vector U en la celda i en el instante de tiempo t^n , y H_i^* un valor representativo del promedio de H en la celda i en el paso de tiempo de t^n a t^{n+1} . F^* y H_i^* en general dependen de las variables de las celdas contiguas a la celda i en los instantes de tiempo t^n y t^{n+1} ; esto es en definitiva lo que hace la diferencia de un esquema numérico a otro.

El método de Godunov es un esquema conservativo que utiliza una discretización en volúmenes finitos, cuya particularidad es que el flujo numérico $F_{i+1/2}^*$ entre dos celdas i e $i+1$, se obtiene de la solución de un problema de Riemann local entre dos estados constantes U_i^n y U_{i+1}^n . El problema de Riemann tiene una estructura compleja y encontrar su solución es costoso, por lo cual varios autores desarrollaron métodos para encontrar una solución aproximada del problema de Riemann, conocidos como *approximate Riemann solvers*. Uno de ellos es el *Riemann solver* de Roe, lo que lleva a un esquema conservativo denominado método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe; este esquema es de primer orden de aproximación y será utilizado en el desarrollo de este trabajo, aunque es necesario destacar que CARPA, además del esquema anterior, dispone de esquemas numéricos de alta resolución para la simulación numérica de flujo en lámina libre y en presión

Para la entrada en presión CARPA utiliza dos formulaciones, una mediante el uso de las ecuaciones completas en lámina libre y en presión y otra mediante el método de la ranura de Preissmann; ésta última será utilizada para realizar las simulaciones.

La implementación de este método tiene la ventaja de usar solo un tipo de flujo (lámina libre) en toda la tubería, y cuando ésta entra en carga, es capaz de cuantificar fácilmente la carga de presión agregando una ranura en la clave de la tubería. El ancho de la ranura debe ser calculado tal que la velocidad de la onda de gravedad, sea igual a la velocidad de la onda de presión ($a = \sqrt{gA/B_s}$), para asegurar una equivalencia entre ambas (figura 1).

El uso de esta aproximación presenta ciertas desventajas que son: la inhabilidad para simular flujo con presiones menores a la presión atmosférica y aire atrapado, problemas de balance de masa relativos al ancho de la ranura y de inestabilidad cuando el flujo cambia rápidamente de lámina libre a presión (Gómez et al., 1992; Yen, 2001). Tales problemas pueden ser removidos haciendo ranuras más anchas. Sin embargo, cambiar el ancho de la ranura destruye la equivalencia mencionada anteriormente. El ancho de la ranura o la velocidad de la onda en presión es un parámetro significativo, y una elección óptima determinará la calidad de los resultados.

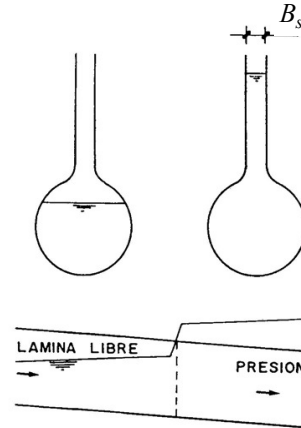


Figura 1 Flujo en lámina libre y en presión con el método de la ranura de Preissman

1.2 EPA SWMM 5.0

EPA SWMM 5.0, desarrollado por la Agencia de Protección del Medioambiente de los Estados Unidos (EPA), es un código numérico focalizado en el análisis hidrológico, hidráulico y de calidad de la escorrentía, en redes de drenaje en zonas urbanas (Rossman, 2006). La componente de cálculo hidrológico modela los procesos de transformación lluvia-escurrimiento, obteniendo los hidrogramas de entrada en la red de drenaje; luego, la componente hidráulica de EPA SWMM 5.0 propaga estos flujos a través de la red de drenaje, determinando caudales y calados. La componente de calidad de la escorrentía permite simular procesos asociados a la generación y arrastre de la carga contaminante en la cuenca urbana, y su posterior transporte en la red de drenaje. La más reciente versión, la versión 5.0, permite al usuario trabajar en base a objetos que representan diversos elementos de la red de drenaje en análisis.

Para la propagación de caudales en los colectores, EPA SWMM 5.0 resuelve las ecuaciones del flujo no permanente unidimensional utilizando un esquema numérico de diferencias finitas de tipo explícito. En cada elemento de conducto (objeto *conduit* de EPA SWMM 5.0) se obtiene el caudal Q en cada instante de tiempo aplicando las siguientes formas de las ecuaciones de conservación de la masa y momentum (ecuaciones de Saint Venant):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gAS_f + gAh_L = 0 \quad (5)$$

Donde A es el área de la sección transversal al flujo, Q el caudal, t la variable temporal, x la variable espacial, g la constante de aceleración de gravedad, H la carga piezométrica en el conducto, S_f las pérdidas unitarias por fricción, y h_L las pérdidas unitarias por singularidades.

Por otro lado, en cada nodo (objeto *node*) se obtiene el nivel de la lámina de agua aplicando la siguiente ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\sum Q}{A_{Store} + \sum A_s} \quad (6)$$

Donde A_{store} es el área en planta del nodo, $\sum Q$ el flujo neto hacia el nodo, y $\sum A_s$ la suma de las áreas superficiales que contribuyen todos los conductos al nodo.

Además, EPA SWMM 5.0 permite considerar elementos especiales que regulan el flujo, tales como vertederos, orificios y bombas, y al mismo tiempo se pueden emplear reglas de control, de tal forma de realizar cambios sobre ciertas propiedades de los elementos reguladores durante el transcurso de la simulación.

EPA SWMM 5.0 considera la condición de entrada en carga a través de los nodos: un nodo está en carga cuando el nivel de la lámina de agua en este nodo supera el nivel de la clave del conducto más alto conectado a él. En esta situación, EPA SWMM 5.0 determina los flujos y los niveles de la lámina de agua en los nodos en carga a través de una ecuación de perturbación de caudal (ecuación 7), de tal forma de que se cumpla la ecuación de continuidad en los nodos que están entrando en carga.

$$\Delta H = \frac{-\sum Q}{\sum \partial Q / \partial H} \quad (7)$$

Donde:

$$\frac{\partial Q}{\partial H} = \frac{-g\bar{A}\Delta t / L}{1 + \Delta Q_{fricción} + \Delta Q_{sin\ gularidades}} \quad (8)$$

Donde L corresponde a la longitud del conducto, \bar{A} es el área de flujo promedio de la sección transversal del conducto, Δt el intervalo de tiempo de cálculo, mientras que los términos $\Delta Q_{fricción}$ y $\Delta Q_{sin\ gularidades}$ corresponden a la contribución del tipo de fuerza de acuerdo a la ecuación de momentum.

De esta forma, los niveles de la lámina de agua son calculados en los nodos usando la ecuación (7), y los caudales en los conductos quedan en función de estos niveles.

2 Caso de estudio

Para evaluar el funcionamiento de ambos códigos en la modelación de flujo mixto, se considera el experimento tipo A1 (Trajkovic et al., 1999), que consiste de una tubería de 10 m de longitud, diámetro interno de 0.10 m, coeficiente de fricción de Manning estimado en $0.008\text{ s/m}^{1/3}$, y una pendiente de 2.7 %. Dos compuertas automáticas fueron colocadas en los extremos aguas arriba y aguas abajo de la tubería. Operando una de estas compuertas, las condiciones de flujo pueden variar rápidamente. Tubos de ventilación fueron colocados en la clave de la tubería para evitar la posible interferencia de la fase de aire.

En este experimento las condiciones iniciales fueron, abriendo la compuerta en el extremo aguas arriba $e_1=0.014\text{ m}$, se genera la entrada de un caudal constante de aproximadamente $0.0013\text{ m}^3/\text{s}$ para una condición de flujo permanente supercrítico y la compuerta aguas abajo totalmente abierta. En un instante dado a lo largo del experimento, la compuerta del extremo aguas abajo fue rápidamente cerrada (no instantáneo), lo cual generó un frente de onda moviéndose hacia aguas arriba. Después de 30 segundos, dicha compuerta fue parcialmente abierta $e_2=0.008\text{ m}$, para generar un fenómeno hidráulico registrado como una pequeña disminución de la carga de presión, pero como la salida del caudal es menor a la de la entrada, la carga de presión continuó incrementándose. Valores de la carga de presión fueron medidos en las secciones P5 y P7, localizadas a 7.2 y 9.2 m respectivamente, desde el extremo aguas arriba.

Para realizar un análisis más completo y sin modificar la esencia del experimento A1, nuestra modelación inicia con fondo seco para evaluar numéricamente la transición de fondo seco-flujo en lámina libre. Posteriormente, en la reapertura parcial de la compuerta del extremo aguas abajo consideraremos que se abre completamente para evaluar la transición de flujo en presión a flujo en lámina libre. De esta forma, solamente utilizaremos los datos del experimento desde el cierre de la compuerta aguas abajo ($t=30\text{ s}$) hasta que se reabre dicha compuerta transcurridos 30 segundos ($t=60\text{ s}$).

2.1 Resultados

Para conocer la actuación de cada uno de los modelos, se han estudiado alternativas diferentes, variando la velocidad de la onda de presión, el tamaño de celda, y analizado su influencia en los resultados calculados.

Para evaluar la influencia de la velocidad de la onda de presión, se realizaron simulaciones para diferentes valores de la misma (1, 3, 6, 9, 12, 15, 30, y 50 m/s), y para la discretización del dominio se utilizaron tamaños de celda de 0.10 m para CARPA y 0.25 m para EPA SWMM 5.0.

En particular, la modelación realizada con EPA SWMM 5.0 considera la resolución del método de atenuación de los términos inerciales en la ecuación de cantidad de movimiento. Esto se realiza para atenuar estos términos cuando el flujo se acerca al régimen crítico e ignorarlos cuando se está en régimen supercrítico. También se considera la incorporación de varios nodos intermedios, de tal manera de poder estudiar y analizar los cambios de la lámina de agua en toda la longitud del conducto. La cantidad de nodos está directamente relacionada con la longitud de cada elemento de conducto a utilizar. Además, en el caso de EPA SWMM 5.0 no es posible modificar la velocidad de la onda en presión explícitamente. Sin embargo, una forma aproximada de tener en cuenta la velocidad de la onda de presión es considerar el diámetro de los nodos igual al ancho de la ranura de Preissmann, y de esta forma intentar asegurar una equivalencia entre la velocidad de las ondas de gravedad y acústica o de presión, además de evitar problemas de laminación y retardo en el flujo; finalmente, en el extremo aguas abajo del conducto se ha dispuesto de un elemento tipo vertedero que simulará las acciones de cierre y apertura de compuerta, el que será controlado durante la simulación utilizando elementos de reglas de control que incorpora EPA SWMM 5.0.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2 en el caso de CARPA y en la figura 3 para EPA SWMM 5.0, como una diferencia de cargas de presión entre los resultados calculados con los medidos en las secciones P5 y P7. Las graficas etiquetadas con (a) corresponden a la sección P5 y con (b) a la sección P7.

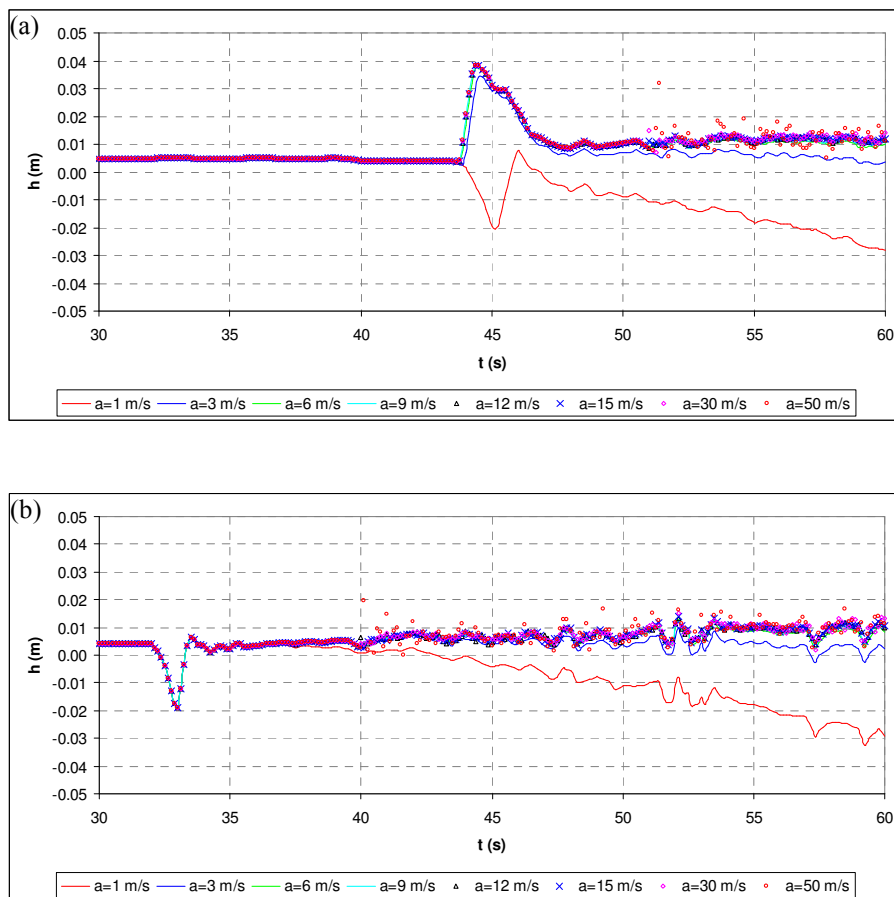


Figura 2 Diferencia de las cargas de presión calculadas y medidas en las secciones P5 (a) y P7 (b) con CARPA

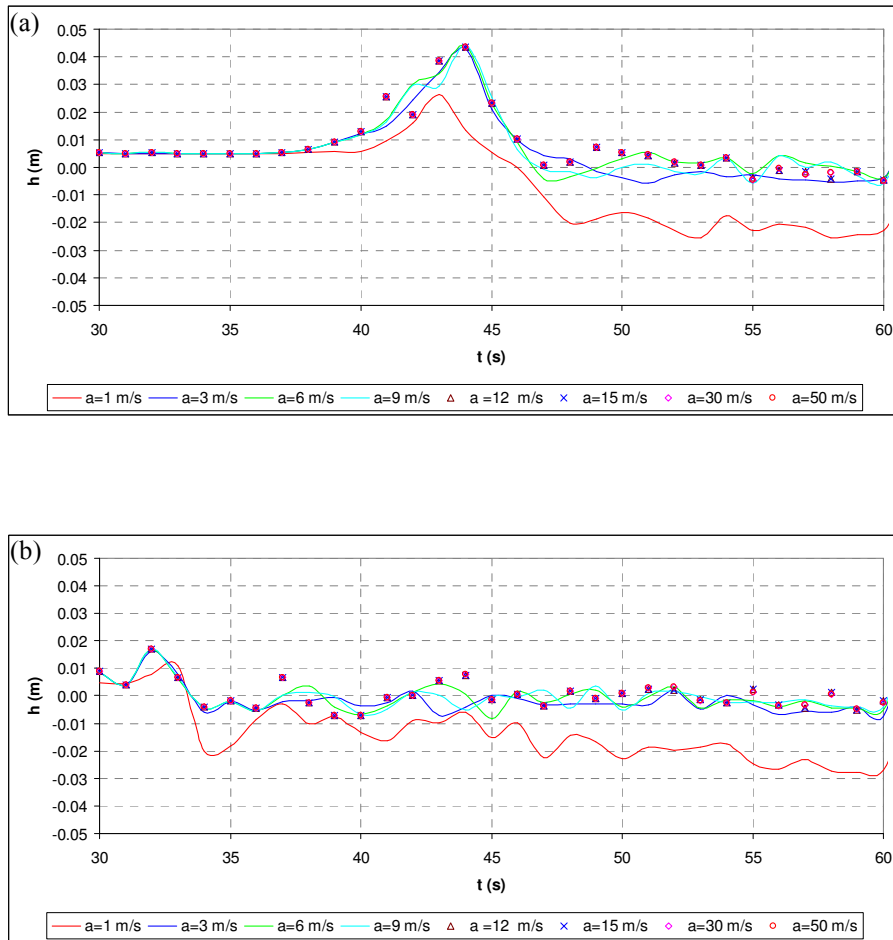


Figura 3 Diferencia de las cargas de presión calculadas y medidas en las secciones P5 (a) y P7 (b) con EPA SWMM 5

Por otro lado, para conocer el efecto del tamaño de celda se realizaron simulaciones discretizando el dominio de cálculo en celdas de 0.10, 0.25, 0.50 y 1.00 m, y la velocidad de onda de presión con el menor promedio de la diferencia de cargas de presión, el cual corresponde a 3 m/s (figuras 2 y 3). Los resultados obtenidos con CARPA se pueden ver en la figura 4, y en la figura 5 los correspondientes a EPA SWMM 5.0, para una sección a la mitad de la tubería (sección 5 m desde el extremo aguas arriba).

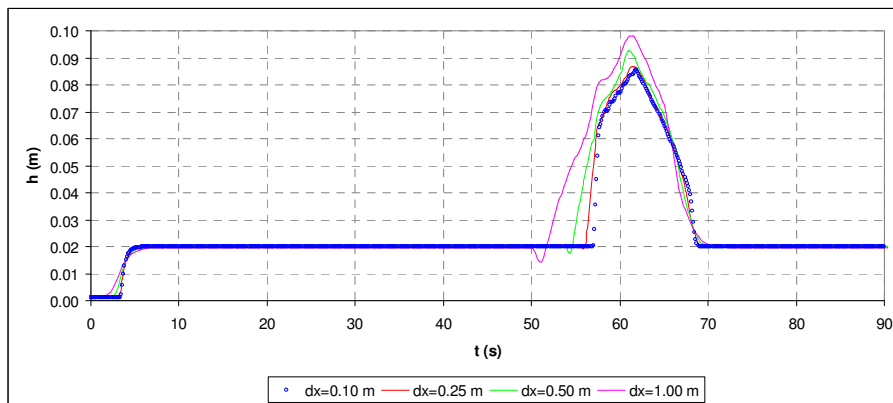


Figura 4 Efecto del tamaño de celda en la sección 5 m, calculado con CARPA

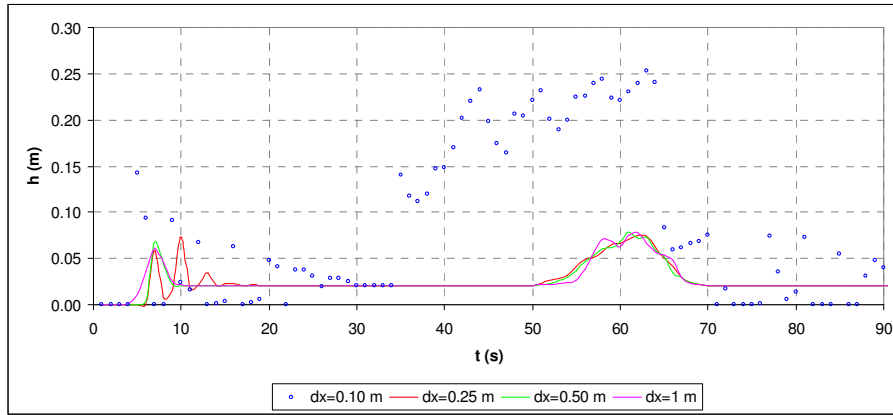


Figura 5 Efecto del tamaño de celda en la sección 5 m, calculado con EPA SWMM 5.0

Finalmente, en las figuras 6 y 7 se puede observar una comparación de los resultados medidos y calculados, para las secciones P5 y P7 respectivamente, considerando una velocidad de la onda de presión de 3 m/s y tamaño de celda de 0.10 m con el modelo CARPA y 0.25 m con EPA SWMM 5.0.

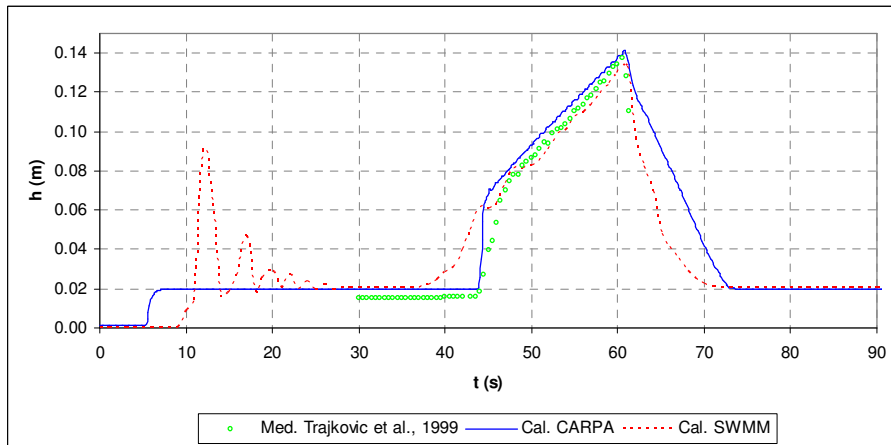


Figura 6 Comparación numérico experimental en la sección P5

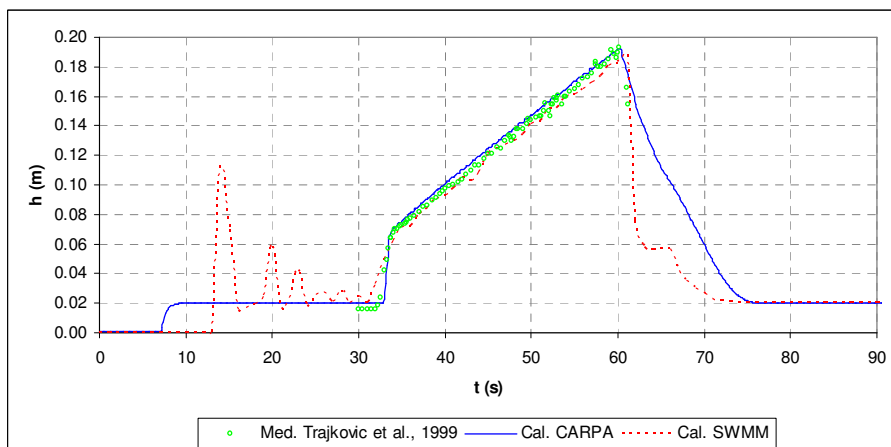


Figura 7 Comparación numérico experimental en la sección P7

3 Análisis de resultados

Del análisis de las figuras 2 y 3 se desprende que con el valor de la velocidad de onda de presión de 3 m/s se obtiene las menores diferencias de carga de presión entre los resultados calculados y medidos para ambos modelos numéricos, con un promedio de 0.005 m para CARPA y 0.002 para EPA SWMM 5.0. Este valor, es similar al reportado por los autores del experimento al realizar sus cálculos numéricos; ellos utilizaron un ancho de ranura del 10 % del diámetro (0.01 m) que corresponde a una celeridad de 2.7 m/s; para valores mayores reportaron fuertes inestabilidades que llegaron a interrumpir los cálculos (Trajkovic et al., 1999). Para el valor de la velocidad de onda en presión de 1 m/s, existe una diferencia negativa con un comportamiento diferente al resto de las simulaciones, por el contrario, para valores mayores a 3 m/s, el comportamiento es muy similar, diferenciándose por un pequeño incremento en la carga de presión. También se analizó la velocidad del frente de onda en la sección 5 m desde aguas arriba, y en el caso de CARPA se observó que a mayor velocidad de onda mayor velocidad del frente de presión, por lo que lo que el frente de onda para velocidades de onda mayores a 9 m/s llega 1.25 s antes y para 6 m/s 0.875 s; para 1 m/s, no existe frente de onda; en el caso de EPA SWMM 5.0 no se presenta tal situación y solamente se presenta cuando la velocidad es de la onda es de 1 m/s, con la cual el frente llega 5 s tarde.

De lo anterior es de resaltar que EPA SWMM 5.0, presentó inestabilidades con el tamaño de celda de 0.10 m, y es por ello que se utilizó un tamaño de celda de 0.25 m para analizar la influencia de la velocidad de onda. Esto se debe principalmente a que el elemento de conducto es muy pequeño lo que limita el incremento de tiempo a valores menores a los permisibles por el modelo utilizado (0.10 s), mientras que CARPA fue estable para el todo el rango de valores analizado, inclusive para velocidades de onda de presión de 30 y 50 m/s.

En cuanto al tamaño de la celda se refiere, de las figuras 4 y 5 podemos observar que la variación del número de celdas utilizadas para discretizar el dominio de cálculo, tiene repercusiones que se manifiestan de la siguiente manera: a mayor tamaño de celda, mayor velocidad del frente de onda, esto para ambos modelos y mayor carga de presión, para el caso de CARPA, pero no siendo así para EPA SWMM. 5.0.

De todas formas, queda en evidencia la sensibilidad del esquema de resolución de EPA SWMM 5.0 a la longitud de los elementos de conductos utilizados, pues a tamaños muy pequeños, las soluciones se vuelven muy inestables, pues vienen condicionadas por el intervalo de tiempo de cálculo de acuerdo a la condición de Courant. Es por esta razón que la discretización espacial de 0.25 m representa el proceso de entrada en carga, en este estudio, con el suficiente nivel de detalle sin presentar grandes inestabilidades en las soluciones.

Por último, de la comparación realizada observamos que ambos modelos simulan adecuadamente el flujo mixto, como lo dejan ver las figuras 6 y 7. Sin embargo existen ciertas diferencias inherentes a los esquemas de cálculo utilizados por cada modelo. En el caso de EPA SWMM 5.0, presenta inestabilidades en la modelación de la transición de fondo seco-flujo en lámina libre, además la llegada del frente de onda no es capturada con mucho nivel de detalle, habiendo una diferencia de 5 segundos en la sección P5. Por su lado CARPA, no presenta dichas inestabilidades y la entrada en presión está de acuerdo a los valores medidos; en cuanto a las diferencias existentes, podemos mencionar lo siguiente: la forma del frente de onda es más brusco comparado con el medido y esto se debe a que en el experimento el cierre fue muy rápido pero no instantáneo, tal como se asumió en las simulaciones. El cierre instantáneo de la compuerta en la simulación también causó cargas de presión ligeramente mayores, sobre todo en la sección P5, esto debido al mayor volumen de agua almacenado dentro de la tubería.

4 Conclusiones

Se ha realizado una comparación entre dos modelos numéricos para la modelación de flujo mixto en una tubería, donde se realizó un análisis de la influencia de la velocidad de onda de presión y el tamaño de celda. De los resultados obtenidos, se concluye que la velocidad de la onda de presión es complicada de determinar sin datos reales, además de influenciar la carga de presión y en menor medida la velocidad del frente de onda. Para el caso analizado, los resultados muestran que el flujo mixto está bien resuelto; así lo deja ver la comparación realizada en las figura 6 y 7.

EPA SWMM 5.0 presentó una inestabilidad notable cuando pasa de la condición de fondo seco a flujo en lámina libre supercrítico, pero dicha inestabilidad es de corta duración y no relevante a los objetivos de este trabajo de comparar el proceso de entrada en carga. Por otro lado, para modelar con mayor nivel de detalle la entrada en carga, es necesario colocar un número definido de nodos, de tal forma de conocer la variación longitudinal de la presión durante la entrada en carga. Este número de nodos viene definido por la longitud de los elementos de

conducto, y a su vez, esta longitud condiciona la estabilidad de las soluciones numéricas, pues EPA SWMM 5.0 utiliza un esquema de diferencias finitas de tipo explícito.

Se ha definido el área en planta de los nodos en EPA SWMM 5.0 utilizando el método de la ranura de Preissmann. Si bien EPA SWMM 5.0 no utiliza esta metodología para cuantificar la entrada en carga, esta metodología nos permite controlar la celeridad de la onda. Cuando se trabaja con valores altos de celeridad, mayores inestabilidades se presentan en los resultados.

Por otro lado, los resultados muestran que el esquema numérico en volúmenes finitos de primer orden con el método de Roe implementado en CARPA, modela sin presencia de inestabilidades el proceso de transición de fondo seco-flujo en lámina libre, la transición de flujo en lámina libre-flujo en presión y la transición de flujo en presión-flujo en lámina libre o mejor conocido como flujo mixto.

Los resultados calculados con ambos modelos muestran similitud con los datos experimentales. Se puede apreciar que existen pequeñas diferencias entre los resultados entregados por CARPA y EPA SWMM 5.0, por ejemplo en los instantes de inicio del proceso de carga. A pesar de ello, ambos códigos representan bien el experimento mostrado, destacando la estabilidad de los resultados de CARPA frente a aquellos generados por el código EPA SWMM 5.0.

5 Referencias bibliográficas

- Bladé, E., y Gómez, M. (2006). *Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado en una y dos dimensiones*, Monografía No. 97, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Universitat Politècnica de Catalunya, 227 pp.
- Gómez, M., Pérez, A., y Dolz, J. (1992). "Transients free surface-pressure flow. Slot width sensitivity analysis." HYDROSOFT, Fourth International Conference on Hydraulic Engineering Software, Valencia, Spain, 419-430.
- Rossman, L. (2006). *Storm water management Model Quality Assurance Report: Dinamic wave flow routing*, U. S. Environmental Protection Agency, Cincinnati.
- Song, C. C. S., Cardle, J. A., y Leung, K. S. (1983). "Transient mixed-flow models for storm sewers." *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(11), 1487-1504.
- Toro, E. F. (2001). "Shock-capturing methods for free surface shallow flows." John Wiley & Sons, LTD, Chichester, U. K, 309 pp.
- Trajkovic, B., Ivetic, M., Calomino, F., y Dippolito, A. (1999). "Investigation of transition from free surface to pressurized flow in a circular pipe." *Water Science Technology*, 39(9), 105-112.
- Yen, B. C. (2001). *Hydraulics of sewer systems*, Stormwater collection systems desing handbook, McGraw-Hill, New York.