PROPUESTAS Y SUGERENCIAS PARA UN PROYECTO DOCENTE DE UN MÓDULO DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS: HACIA LA INTEGRACIÓN DE LAS INGENIERÍAS TÉCNICAS EN EL MARCO DEL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR

PELAYO MELERO, Ignacio M. [(1)]

BLANCO ABELLAN, Mónica[(2)]**; GINOVART GISBERT, Marta**[(2)]

ignacio.m.pelayo@upc.edu

[(1)]Universidad Politécnica de Cataluña, España, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona, Departamento de Matemática Aplicada III

[(2)]Universidad Politécnica de Cataluña, España, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Barcelona, Departamento de Matemática Aplicada III

RESUMEN

Aunque aún falta precisar el significado, cometido e instrumentación de la propuesta de 60 créditos ECTS comunes a los títulos de cada una de las Ramas de conocimiento establecidas, estamos convencidos de que materias básicas del área de Matemática Aplicada estarán presentes en todos los planes de estudios de la Rama de Ingeniería y Arquitectura. El objetivo de esta comunicación es presentar propuestas concretas para insertar en proyectos docentes de módulos de Fundamentos Matemáticos, diseñadas en el ámbito específico de las escuelas de Ingeniería Técnica Agrícola y de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona (Universidad Politécnica de Cataluña), que podrán ser implementadas en las correspondientes titulaciones de grado enmarcadas en el EEES. A partir de la experiencia docente acumulada en las mencionadas escuelas, hemos articulado propuestas específicas que permitirán contextualizar de forma conveniente contenidos básicos comunes para estos módulos en el EEES, facilitando distintas configuraciones para las competencias específicas. Estas sugerencias combinan diferentes metodologías docentes y alternan distintos tipos de actividades para favorecer el desarrollo de competencias en la resolución de problemas. Problemas que en esta presentación se centrarán en el contenido "Optimización", proponiendo actividades formativas con sus créditos ECTS y su relación con las competencias que debe adquirir un estudiante en los estudios de estas escuelas universitarias.

Palabras clave: Módulo de fundamentos matemáticos, Optimización, Objetivos comunes y objetivos específicos.

1. Introducción

A petición de los Presidentes de las Subcomisiones del Consejo de Coordinación Universitaria (CCU), el Ministerio de Educación y Ciencia a mediados de Febrero de 2007 ha elaborado un documento inicial de trabajo, para poder disponer de una base sobre la que debatir en el seno de las propias Subcomisiones del CCU que permita realizar y consolidar, en el calendario previsto, un anexo sobre Materias Básicas por Ramas, el cual formará parte del documento general “Directrices para la elaboración de títulos universitarios de Grado y Master” (Resolución BOE, 20-12-2006). Las materias se han seleccionado a partir de la lista de materias troncales de los actuales títulos. Son materias que se encuentran distribuidas en los primeros cursos y que son frecuentes en más de una titulación. Esta configuración, ya revisada, pretende atender a la sugerencia del CCU sobre la posibilidad de que puedan existir diferentes configuraciones de estos contenidos, de manera que puedan adaptarse a las peculiaridades de cada título, sin que deban entenderse como un único curso o conjunto cerrado de materias únicas y comunes a todos los títulos de una Rama. La propuesta consta de una lista dividida en cinco Ramas del conocimiento (Artes y Humanidades, Ciencias, Ciencias de la Salud, Ciencias Sociales y Jurídicas, Ingeniería y Arquitectura). Esta presentación se centra en la Rama de Ingeniería y Arquitectura, ya que los autores del trabajo han desarrollado fundamentalmente su actividad docente en la Rama de Ingeniería. El plan de estudios de todos los títulos de la Rama de Ingeniería deberá contener 60 créditos ECTS diseñados a partir de las materias básicas contenidas en el listado general del documento emitido por el MEC (Comunicaciones, Economía, Electrónica, Estadística, Expresión Gráfica, Física, Geología, Informática, Matemáticas, Materiales, Mecánica, Medio Ambiente, Medios Continuos, Química, Redes, Termodinámica), que deberán ser programadas en los dos primeros cursos. Estas materias básicas se podrán concretar en asignaturas con una extensión mínima de 6 créditos cada una dentro del contexto European Credit Transfer System (ECTS). De esos 60 créditos ECTS, al menos 36 han de pertenecer a una de las Ramas. Los créditos restantes podrán estar configurados con materias básicas de otras Ramas o de otras materias diferentes de las contenidas en el listado, siempre que se justifique su carácter básico para la formación inicial del estudiante y se garantice su carácter de competencia transversal. En este contexto es indudable el papel relevante que tienen y desempeñarán las Matemáticas. Las asignaturas correspondientes a estas materias básicas podrán adaptarse a las características de la titulación y especificarse de acuerdo con las necesidades de la misma. Es importante tener presente que el ECTS es un sistema centrado en el estudiante, basado en la carga de trabajo que éste requiere para alcanzar los objetivos del programa, objetivos preferentemente presentados en términos de resultados de aprendizaje y competencias a adquirir [1]. Los resultados del aprendizaje consisten en conjuntos de competencias, que expresan lo que el estudiante debe conocer, entender y ser capaz de hacer una vez completado el proceso de aprendizaje. Las competencias representan una combinación dinámica de atributos, habilidades y aptitudes, en consonancia con los resultados del aprendizaje especificados (conocimiento, comprensión y habilidades). En este contexto somos conscientes de que en un número importante de casos será necesario llevar a cabo una revisión profunda y seria de los programas docentes de muchas de las asignaturas de matemáticas que se incluyen dentro de lo que conocemos actualmente como área de conocimiento Matemática Aplicada. Si realmente deseamos que una asignatura básica de Matemática Aplicada tenga la posibilidad de ser adaptable a distintas titulaciones, garantizando un contenido básico común, necesitamos hacer una reflexión sobre los distintos módulos que pueden articular una asignatura como ésta y contextualizarlos en el entorno en que tenga que ser impartida o desarrollada, o al menos, estar convencidos de que esto se pueda llevar a cabo con éxito.

Conocidas, pues, las directrices para la elaboración de títulos universitarios de grado y master elaboradas por el Ministerio de Educación y Ciencia, es evidente la necesidad de una profunda reforma curricular basada en la flexibilidad, en la transversalidad y en la multidisciplinariedad como mecanismo de respuesta a las necesidades de la nueva sociedad. A pesar de que aún queda por precisar el significado, cometido e instrumentación de la propuesta de 60 créditos ECTS comunes a los títulos de cada una de las Ramas de conocimiento establecidas, estamos convencidos de que materias básicas del área de Matemática Aplicada estarán presentes en todos los planes de estudios de la Rama de

Ingeniería y Arquitectura. Desde hace unos años, los autores de este trabajo han manifestado su interés por la innovación docente, por el cambio de metodología docente que el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) conlleva, por el proceso de aprendizaje de los estudiantes, y por el uso cada vez más frecuente de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación que permiten cambiar el tipo de relación que se establece entre profesor y grupo de alumnos [2,3].

2. Objetivos

El objetivo de esta comunicación es presentar propuestas concretas para insertar en proyectos docentes de módulos de fundamentos Matemáticos, diseñadas en el ámbito específico de las escuelas de Ingeniería Técnica Agrícola y de Ingeniería Técnica Industrial de Barcelona (actualmente escuelas universitarias adscritas a la Universidad Politécnica de Cataluña) y que pueden ser utilizadas para su futura implementación en las correspondientes titulaciones de grado enmarcadas en el EEES. A partir de la dilatada actividad docente y de la experiencia acumulada en las mencionadas escuelas, hemos articulado propuestas específicas que permitirán contextualizar de forma conveniente contenidos básicos y compartidos para estos módulos en el nuevo entorno de títulos de grado, facilitando distintas configuraciones para las competencias específicas y peculiaridades de cada uno de los títulos futuros. Estas sugerencias elaboradas combinarán diferentes metodologías docentes y alternarán distintos tipos de actividades para favorecer el desarrollo de competencias en la resolución de problemas. Nos centraremos en el contenido "Optimización" para proponer actividades formativas con sus créditos ECTS, su metodología de enseñanza-aprendizaje, y su relación con las competencias que creemos que debe adquirir un estudiante en los estudios impartidos hasta ahora en estas escuelas universitarias. Como casos particulares que la experiencia de los autores permite abordar, se comentarán los perfiles correspondientes a la ingeniería técnica agrícola o agronómica, y a la industrial (con especial énfasis en las especialidades de electrónica, electricidad y mecánica).

3. Método de trabajo para la planificación didáctica del módulo Optimización

El desarrollo de un módulo centrado en "Optimización" para ser incluido en una asignatura de contenido básico matemático es una actividad que requiere reflexionar sobre diversos aspectos de la actividad docente llevada a cabo hasta ahora, así como sobre la actividad docente que será necesario articular en el nuevo e inminente futuro del EEES [4]. En relación al contenido que se prepara, es importante: i) decidir el lenguaje a utilizar y la notación a seguir; ii) sopesar ventajas y desventajas de presentar el tema de forma genérica e ir analizando los distintos casos particulares que se pueden derivar, o bien hacer una aproximación sucesiva a partir de problemas específicos que permita finalmente visualizar una estructura general conjunta; iii) decidir qué programas matemáticos específicos utilizar, ya que su uso muchas veces se ve condicionado a un entorno académico o universitario propio de la titulación, durante el desarrollo de la misma, así como, pueden ser también de gran utilidad para futuros estudios de master. Por otro lado, potenciar el uso de la hoja de cálculo convencional, a pesar de que tiene las limitaciones propias de su naturaleza, tiene a favor el estar presente en todos los entornos profesionales y en todos los ordenadores personales. Conjugando la experiencia docente de los autores proponemos un desarrollo de módulo que tenga una primera parte general o común, y que sean los problemas propuestos o casos estudiados los que permitan pasar a tratar los aspectos específicos del tema según los perfiles de la Rama de ingeniería.

3.1. Sentido e importancia formativa del módulo Optimización

Es necesario transmitir a los estudiantes la importancia formativa del módulo en el proyecto completo de la asignatura en la cual se inserte, para que éstos entiendan lo que les aporta en su proceso de formación como universitarios y futuros profesionales. El módulo Optimización contribuye a la función de dotar a los estudiantes de ingeniería de una formación básica matemática adecuada, a la vez que permite consolidar y homogeneizar el nivel de matemáticas con que ingresan los estudiantes en la

Rama de Ingeniería, básicamente en relación al manejo de funciones reales y en el estudio del cálculo diferencial de una variable. Este módulo también facilita dotar de herramientas matemáticas básicas que precisarán los estudiantes para afrontar otras asignaturas, sin olvidar el interés que supone para el futuro ingeniero desde el punto de vista instrumental. Como primera y muy general aproximación, podemos decir que la Optimización persigue resolver ciertos problemas en los que se busca la mejor decisión posible entre un conjunto de alternativas. Así pues, entendemos que este tema permite conjugar distintos tipos de habilidades y competencias que todo estudiante de ingeniería debería conseguir. En nuestra vida cotidiana, a menudo nos enfrentamos al problema de maximizar ciertas variables respuestas, o minimizar otras. También es evidente que no siempre de entre diversas opciones que tenemos para escoger, todas sean necesariamente viables o posibles. Hay un compromiso entre las variables y la función objetivo, la función que representa parte de nuestro problema y que requiere nuestra atención. Hay que entender el problema cualitativamente antes de resolverlo cuantitativamente. Así pues, vamos a organizar la información necesaria para poder tratar esta clase de problemas, siendo el primer paso modelizar la situación que nos ocupa, es decir, expresar el problema en términos matemáticos precisos. Requerimos, pues, tener funciones y variables, sujetas o no a restricciones o ligaduras.

Un aspecto que es importante no obviar es la historia de las distintas contribuciones a este tema de Optimización, lo cual permite encajar y visualizar los distintos pasos que se han dado para alcanzar lo que ahora consideramos como un conjunto. Por ejemplo, conocer los desarrollos claves de los siglos XVII y XVIII (Fermat, Newton, Euler y Lagrange), así como los de la segunda mitad del siglo XX (Dantzig, Kuhn y Tucker), y los más recientes de los últimos años consideramos que es interesante para una formación integral. Esta presentación histórica permite exponer que la teoría, tal como la conocemos hoy, así como los métodos actuales de resolución, no han existido siempre, sino que son el resultado del esfuerzo de muchos investigadores destacados a lo largo del tiempo. Por otro lado, hoy en día se producen grandes avances en computación que permiten abordar métodos diversos de resoluciones de problemas de optimización.

A las preguntas de quién hace Optimización, quién utiliza la Optimización, o dónde se puede aplicar la Optimización, se debería responder con ejemplos diversos, de campos de conocimiento distinto y que muchas veces pertenecen a departamentos universitarios distintos (matemática aplicada o investigación operativa), con aplicaciones en todas las áreas de ingeniería (producción, planificación y logística entre otras). Dentro de la Optimización hay dos grandes grupos, la Optimización continua y la Optimización discreta. Hay que matizar que en esta presentación entendemos el término programación como programación matemática determinista, y nuestro módulo se centrará únicamente en la Optimización continua. Ésta puede ser con restricciones o sin restricciones, y suponemos que manejamos Optimización basada en modelos (no la empírica). En relación a la resolución del problema de esta optimización, trabajaremos con resoluciones de tipo grafico, de tipo analítico y/o de tipo numérico. Otro aspecto importante a desarrollar en el módulo es la búsqueda de ejemplos por parte del estudiante en el resto de asignaturas participantes en la titulación, o bien en la vida real, que permitan caracterizar y definir un problema de Optimización y encajarlo en la notación matemática introducida en el desarrollo del módulo. Pueden ser ejemplos muy simples, o bien algo más sofisticados y complejos, pero estamos convencidos de que la actividad resulta relevante y fundamental para el estudiante; el ser capaz de identificar problemas de optimización en su entorno ya tiene de por sí un valor elevado en la formación integral de éste.

3.2. Objetivos generales y objetivos específicos del módulo Optimización

En primer lugar, presentamos los objetivos, que no debemos confundir con los contenidos, pues si los objetivos meramente señalaran a los contenidos que se desea que los alumnos aprendan, éstos no aportarían nada a la guía docente. Los objetivos deben explicitar las "ganancias" que los alumnos obtienen como consecuencia de cursar este módulo, además de la incorporación de nuevos contenidos o consolidación de los ya conocidos. Al empezar el curso se les entrega a los estudiantes un documento donde se especifican los resultados de aprendizaje, clasificados según la taxonomía simplificada de niveles de competencia de Bloom [5]: i) conocimiento, definido como la capacidad de recordar información pertinente, previamente aprendida; ii) comprensión, como la capacidad de interpretar y extrapolar el significado de los conocimientos aprendidos; iii) aplicación, en el sentido de usar los conocimientos aprendidos en nuevas situaciones para resolver un problema concreto, valorando la mejor solución posible.

Así los resultados de aprendizaje de optimización han sido articulados en grado creciente de dificultad, como se expone a continuación. En lo que respecta al desarrollo de la parte común para una asignatura de la materia básica matemáticas en la Rama de Ingeniería, después de cursar el módulo de Optimización, el estudiante será capaz de:

- ✓ Enumerar las distintas posibilidades de resolución de un problema de optimización planteado. [Conocimiento]
- ✓ Identificar el método adecuado de resolución de la optimización. [Comprensión]
- ✓ Identificar situaciones reales de su entorno que permitan utilizar la teoría de la optimización. [Comprensión]
- ✓ Definir con precisión, máximo y mínimo relativo y absoluto de una función real de varias variables. [Conocimiento]
- ✓ Identificar los puntos críticos de una función real de varias variables. [Comprensión]
- ✓ Enunciar la condición suficiente de extremo relativo. [Conocimiento]
- ✓ Caracterizar extremos relativos. [Comprensión]
- ✓ Discutir los extremos absolutos de una función dada sobre un conjunto determinado. [Comprensión]
- ✓ Optimizar una función real de varias variables. [Aplicación]
- ✓ Reducción de variables de una función objetivo. Expresar la función objetivo después de sustituir una restricción dada de forma explícita. [Comprensión]
- ✓ Resolver un problema de optimización con dos o tres variables con restricciones de igualdad. [Aplicación]
- ✓ Resolver un problema de optimización con restricciones de dos o tres variables de desigualdad. [Aplicación]
- ✓ Resolver un problema de optimización con restricciones de igualdad y de desigualdad de tres variables. [Aplicación]
- ✓ Comunicar los principales hechos históricos que permitieron avanzar en el campo de la teoría de la optimización y de sus aplicaciones, tal y como los conocemos ahora. [Conocimiento]
- ✓ Traducir enunciados de problemas “reales” en términos de optimización de funciones reales y de variables reales. [Comprensión]

Después de cursar el módulo de Optimización, y considerando el desarrollo de la parte complementaria, según su formación específica y de acuerdo con su titulación o perfil, el estudiante para resolver un problema de optimización con restricciones será capaz de:

- ✓ Describir el método de los multiplicadores de Lagrange. [Comprensión]
- ✓ Resolver un problema de optimización con restricciones de igualdad mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. [Aplicación]
- ✓ Describir el método de Kuhn-Tucker. [Comprensión]
- ✓ Resolver un problema de optimización con restricciones mediante el método de Kuhn-Tucker. [Aplicación]
- ✓ Describir el método Simplex. [Comprensión]
- ✓ Resolver un problema de optimización de una función lineal con restricciones lineales mediante el método de la programación lineal. [Aplicación]
- ✓ Manejo de fuentes internacionales o publicaciones propias de la titulación en que se trabaje y que traten sobre algún aspecto presentado en el proceso de optimización. [Comprensión]

Finalmente, después de haber asistido a las sesiones en aula informática correspondientes a esta unidad de contenido, el estudiante manipulará las utilidades de cálculo y gráficas de una hoja de cálculo general y de programas matemáticos de uso más corriente para alcanzar los objetivos listados, con una interpretación consistente de las salidas que proporciona el ordenador. [Aplicación]

El orden de prioridad para estos objetivos específicos que consideramos según sea el perfil agrícola (agronómico) y el perfil industrial, es el que detallamos a continuación. Para la ingeniería agrícola (agronómica) defendemos como prioritario el manejo de los métodos de resolución en la programación lineal, seguida del método Lagrange, y consideramos improbable que en una asignatura básica se pueda tratar el método Kuhn-Tucker en profundidad. Aquí enfatizamos la utilización de la hoja de cálculo. Por el contrario, para el perfil industrial, la prioridad para alcanzar los objetivos específicos en una asignatura básica la situamos en primer lugar en el método de Lagrange y después en el método de Kuhn-Tucker, para dejar quizás en una introducción básica o para otras asignaturas el método Simplex. En este caso proponemos la utilización de un programa matemático específico, por ejemplo el Maple.

3.3. Esquema de contenido del módulo Optimización

Hay que tener muy presente que no se pueden hipertrofiar o sobredimensionar los contenidos de las asignaturas, y en consecuencia, de los módulos que las configuran. No obstante, en el caso del módulo de Optimización que estamos desarrollando y planificando, su ubicación real en la estructura general de una asignatura será posterior. De hecho, insertar este módulo en una de las asignaturas de fundamentos de matemáticas será una tarea pendiente para el momento en que se conozca el plan de estudios y las asignaturas que lo configuran. En consecuencia, habrá que respetar y tomar en cuenta el número de créditos que finalmente vaya a tener la asignatura que lo acoja, siendo coherentes con el peso curricular que se le desee otorgar. Como ahora el contexto de asignatura no está determinado, y queremos que esta propuesta de módulo sea útil en el diseño de una asignatura de fundamentos matemáticos futura, hemos optado por una selección de contenidos fundamentales para permitir un aprovechamiento del mismo en cualquier contexto de asignatura básica. Respecto a la última parte de los contenidos, ya se ha comentado en el apartado correspondiente a los objetivos, que se puede adaptar al perfil de la titulación, y por tanto, será versátil tanto su desarrollo, como la intensidad de este desarrollo, en el contexto en el que nos encontremos más adelante. Exponemos a continuación la relación de contenidos que puede ser subdividida en contenidos esenciales y contenidos necesarios [6]. La subdivisión de contenidos de ampliación debe ser consistente con los objetivos específicos formulados en el apartado anterior, y por tanto, deberán ser clasificados de acuerdo al perfil de la titulación que se curse.

Contenidos esenciales

- Reseña histórica y desarrollos claves para la optimización.
- Lenguaje y conceptos. Problema, modelo, programación matemática. Función objetivo. Variables principales. Restricciones de igualdad y de desigualdad.
- Programación no lineal y programación lineal. Programación clásica sin restricciones. Programación clásica con restricciones de igualdad.
- Clases de variables. Variables positivas. Variables libres. Variables de holgura.
- Tipos de soluciones. Solución factible. Solución interior. Solución de frontera.
- Tipos de óptimos. Máximo (o mínimo) global estricto y no estricto. Máximo (o mínimo) local estricto y no estricto.

Contenidos necesarios

- Transformación de problemas. Cambio de signo de la función objetivo y de las variables. Eliminación de una constante en la función objetivo. Intercambios entre igualdades y desigualdades.
- Conjuntos convexos. Funciones cóncavas y convexas. Teoremas básicos de la programación matemática. Teorema de Weiertrass. Teorema local-global.
- Programación no lineal clásica. Óptimos sin restricciones de igualdad. Condiciones necesarias de óptimos. Condiciones suficientes de óptimos. Óptimos con restricciones. Óptimos con restricciones de igualdad. Función Lagrangiana. Condición necesaria de Lagrange. Multiplicadores de Lagrange y

su interpretación. Resolución gráfica en el caso de una y dos variables. Resolución analítica. Resolución con Maple.
- Programación lineal continúa. Forma canónica y forma estándar de los problemas. Resolución gráfica en el caso dos variables. Método Simplex. Resolución con Excel. Resolución con Maple. Análisis de sensibilidad.
- Programación no lineal no clásica. Óptimos con restricciones de desigualdad. Función de Kuhn-Tucker. Multiplicadores de Kuhn-Tucker. Condiciones de Kuhn-Tucker. Interpretación de los multiplicadores. Diferentes opciones para la resolución de un problema.
- Problemas de aplicación de problemas para la búsqueda de óptimos de distinta dificultad y para contextos distintos relacionados con el perfil de la titulación correspondiente.

3.4. Indicaciones metodológicas y atribución de la carga ECTS del módulo Optimización

Las indicaciones sobre la metodología ayudan a clarificar y explicitar la metodología que cada profesor desarrolla, es decir, la forma en que se van a organizar los dispositivos que tenemos a nuestra disposición, para propiciar el aprendizaje de nuestros alumnos. A pesar de que los profesores siempre han sido conscientes de su actividad docente, es ahora, en el marco del EEES, donde se nos pide o se nos "exige" un nuevo tipo de guía docente, distinto al que estábamos acostumbrados. Esta nueva guía debe contener explícitamente las distintas metodologías docentes a utilizar en nuestras asignaturas descritas de forma cualitativa y cuantitativa. En este momento el ejercicio más interesante es el de planear y cuantificar con antelación estas distintas actividades. La combinación "ideal" de las clases magistrales en aula convencional, el trabajo en grupo y/o individual en aula convencional y en aula informática (laboratorio), y el estudio individual e independiente del estudiante fuera del aula permiten, a nuestro entender, conseguir una buena metodología y ritmo de trabajo, que reinvierte en un buen aprovechamiento del tiempo disponible, y en un rendimiento académico satisfactorio. Es esencial hacer variar de forma eficiente distintas modalidades de tiempos, actividades y recursos en el aula. Precisamente, la atribución de la carga en ECTS propiciará la propuesta de una mayor variabilidad de actividades dentro del proceso de aprendizaje, en oposición a las sesiones de formatos muy homogéneos y constantes a lo largo del tiempo, o sea, las sesiones "clásicas" para muchos entornos universitarios actuales. La distribución de la carga de trabajo que constituye el conjunto de las distintas actividades a desarrollar por el estudiante ("student workload") en el periodo de trabajo atribuido a este módulo es uno de los aspectos más novedosos del nuevo marco del EEES. Nuestra propuesta, teniendo en cuenta que 1 ECTS se considera que corresponde aproximadamente a 25-30 horas estimadas de trabajo del alumno, es de 2 ECTS. Es decir, el módulo de Optimización requerirá de 50-60 horas para su puesta en marcha y desarrollo completo. A continuación hay que identificar el conjunto de actividades a desplegar por nuestros estudiantes en el módulo, y estimar el factor o razón de presencialidad / trabajo autónomo que requieren las actividades mencionadas (tiempo presencial de los estudiantes en el aula / tiempo de trabajo no presencial para preparar o digerir o asimilar la actividad docente llevada a cabo). Todos sabemos que este tiempo no presencial depende tanto de la actividad a efectuar como del tipo de estudiante que la lleva a cabo, por lo que es difícil y arriesgado proponer una estimación de tipo puntual que sea plenamente acertada. A nuestro entender, sería más valioso poder utilizar una estimación por intervalo de confianza a partir de la información muestral que se pudiera conseguir en un futuro con la puesta en práctica de este módulo, dentro de alguna experiencia piloto en nuestros centros.

El objetivo de este apartado es aportar una estimación puntual subjetiva del tiempo a invertir, que debería ser posteriormente contrastada, en una segunda parte del trabajo, con la puesta en práctica del módulo y el control de la actividad real llevada a cabo por los estudiantes, haciendo uso de muestreos aleatorios y encuestas. Por lo tanto, la previsión que presentamos es una estimación basada en nuestra experiencia docente. Queda por tanto, para otro curso académico, poner el módulo diseñado en el contexto de una asignatura y contrastar la información recogida de los estudiantes con las previsiones hechas. En la Tabla 1 indicamos la previsión elaborada para este módulo de Optimización.

3.5. Indicaciones para la evaluación del módulo Optimización

Un punto esencial del proceso es hacer referencia a los aspectos que se evaluarán, a la forma de hacerlo, los criterios a utilizar y el peso o porcentaje que tendrá cada uno de estos aspectos en la nota final, en este caso, a la nota correspondiente a un módulo (como parte de una asignatura). La Tabla 2 indica los criterios de evaluación que consideramos convenientes y la manera en la que se llevará a cabo este control.

Tabla 1: Distribución de actividades y tiempos de dedicación en el módulo.

Actividades	*Horas presenciales*	*Horas no presenciales*	*Horas totales*
Sesiones teóricas (aula convencional)	8	10 - 12	18 - 20
Sesiones prácticas (aula informática)	4	3 - 4	7 - 8
Trabajo (individual o en grupo)	4	6 - 8	10 - 12
Tutoría	1	0 - 1	1 - 2
Prueba escrita	2	11 - 13	14 - 16
Prueba oral relativa al trabajo	1	0 - 2	1 - 3
total	20	30-40	50-60

Tabla 2: Criterios para la evaluación del módulo.

Aspecto a valorar	*Instrumento*	*Porcentaje*
Asistencia y participación	Observación del profesor	10%
Conocimientos teóricos y habilidades procedimentales	Prueba escrita Prueba oral	50% 15%
Realización de los informes de prácticas y del trabajo	Entregas realizadas	25%

3.6. Ejemplos de problemas de optimización para ser adaptados a distintas titulaciones

Los problemas de optimización pueden presentarse en la forma estándar, indicando la función objetivo y las restricciones, o bien plantearlos mediante enunciados de diferente naturaleza. A continuación, mostramos a través de dos ejemplos particulares o concretos, un modelo de exposición que incluye ambos tipos de presentación. Este modelo mixto hace posible que un módulo determinado pueda ser sumergido, de forma natural, en programas pertenecientes a diversas titulaciones de ingeniería. Asimismo, estos ejemplos pretenden mostrar que un mismo contenido esencial puede ser expuesto de diferentes formas y bajo diferentes configuraciones, en función de las peculiaridades de cada título o plan de estudios, de las características del grupo y de los objetivos generales y específicos que se programen.

Ejemplo 1

Dados $a > 0, b > 0$ tales que $a \neq 2b$ y $b \neq 2a$, clasificar y resolver el siguiente problema de programación matemática:

$$\text{Max}\{ax + by\} \text{ sujeto a las condiciones } \begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 50 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Es un problema de programación lineal con dos variables. Las hipótesis impuestas sobre los parámetros de la función objetivo permiten asegurar que existe una única solución, que es: $x = 20,\ y = 10$.

1a) Una fábrica manufactura dos tipos de envase para un mismo producto alimentario. La del primer tipo requiere 1 hora de corte y 2 de acabado. Cada envase del segundo tipo requiere 2 horas de corte y 1 de acabado. Las capacidades diarias de cortado y acabado son 40 y 50 horas respectivamente. Teniendo en cuenta que cada envase del primer tipo produce un beneficio de 70 euros, y la del segundo de 90 euros, se desea conocer la cantidad de envases de cada tipo que deben producirse diariamente para maximizar el beneficio.

Solución: La formulación matemática de este problema es precisamente la mostrada en el apartado anterior para la función objetivo: $z = 70x + 90y$. Por lo tanto, la solución óptima de este problema es: 20 envases del primer tipo y 10 del segundo.

1b) Un ingeniero tiene que diseñar una parcela rectangular tal que i) la suma de su dimensión mayor y el doble de la menor no sobrepase los 40 metros y ii) la suma de su dimensión menor y el doble de la mayor no sobrepase los 50 metros. ¿Cuáles son las dimensiones para las cuales el perímetro de dicha parcela es máximo?
Solución: La formulación matemática de este problema es precisamente la mostrada en el primer apartado para la función objetivo: $z = 2x + 2y$. Por lo tanto, la solución óptima de este problema es: 20 metros de largo y 10 metros de ancho.

Ejemplo 2

Dados $n \geq 1, s > 0, r = a^{n-1} > 0$, clasificar y resolver el siguiente problema de programación matemática:

$$\text{Min}\left\{\frac{x^n + y^n}{2}\right\} \text{ sujeto a las condiciones } \begin{cases} x + ry = s \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Es un problema de programación matemática no clásica y convexa. La función lagrangiana es:

$$L(x, y, \lambda, \mu_1, \mu_2) = \frac{x^n + y^n}{2} + \lambda(x + ry - s) + (-x)\mu_1 + (-y)\mu_2$$

Las condiciones de Khun-Tucker son:

$$\begin{cases} n\dfrac{x^{n-1}}{2} + \lambda - \mu_1 = 0 \\ n\dfrac{y^{n-1}}{2} + r\lambda - \mu_2 = 0 \\ x + ry - s = 0 \\ (-x)\mu_1 = (-y)\mu_2 = 0 \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

La solución es $(x, y) = (\frac{s}{1 + a^n}, \frac{sa}{1 + a^n})$.

2a) Demostrar la desigualdad $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$, si $n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Solución: Se trata de un corolario del apartado anterior, tomando $s = x + y$ y $r = 1$.

$$\frac{x^n + y^n}{2} = f(x, y) \geq f(s/2, s/2) = \frac{(s/2)^n + (s/2)^n}{2} = (s/2)^n = \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$$

2b) La función de costes de una empresa viene dada por $C(X, Y) = 4096X^4 + Y^4 + 50000$, donde X e Y son las cantidades producidas de dos artículos. Determinar el coste mínimo necesario para producir un total de 102 unidades de producto.
Solución: La formulación matemática de este problema es equivalente a la del primer apartado, tomando $n = 4$, $x = 8X$, $y = Y$, $r = 8$ y $s = 816$. Por lo tanto, la solución es: $C(6{,}96) = 90293072$.

4. Consideraciones finales

En este trabajo hemos mostrado una propuesta de modelo de planificación de un módulo de Optimización de 2 ECTS, para que forme parte de una materia básica de 6 créditos ECTS perteneciente al área de matemáticas, para su previsible ubicación en diferentes titulaciones de la Rama de Ingeniería y Arquitectura. A la hora de elaborar la mencionada planificación, características como su flexibilidad, adaptabilidad y permeabilidad, son fundamentales para obtener un "producto" docente que pueda satisfacer las exigencias previstas. Ciertamente, una vez llevado a cabo este trabajo previo y necesario, cuyas líneas maestras hemos dibujado, se hace necesario completarlo con una segunda parte, consistente en evaluar el mismo, una vez se haya puesto en práctica el módulo y se pueda efectuar el control de la actividad real llevada a cabo por estudiantes de diferentes titulaciones. A partir de los datos obtenidos, y después de interpretarlos y reflexionar sobre ellos, procederemos a llevar a cabo los cambios y mejoras que darán lugar a una versión previsiblemente perfeccionada de la propuesta inicialmente elegida. En esto precisamente consiste el método científico, y que en el ámbito de la planificación e implementación de un proyecto docente estimamos que es el procedimiento que debe ser utilizado. Esta propuesta elaborada y presentada ha necesitado, y a la vez ha favorecido, una reflexión seria y profunda, tanto de la metodología docente como de los contenidos escogidos, lo cual reinvierte en una mejora de nuestra actividad docente, y de forma extensiva, seguro que reinvertirá en un mejor rendimiento académico por parte de nuestros estudiantes.

5. Referencias

[1] *ECTS Users' Guide* (2005), [en línea]. Disponible en: http://ec.europa.eu/education/programmes/socrates/ects/doc/guide_en.pdf [Consulta: 10 de enero 2007].

[2] ESTELA M. R., M. BLANCO, M. GINOVART, J. FRANCH, E. JARAUTA, N. ROMAN, S. XAMBÓ. "Curs de Càlcul: Una nova metodología per a la impartició i gestió basades en l'entorn Moodle". En *Libro de Resúmenes del IV Congreso Internacional Docencia Universitaria y Innovación IV CIDUI (Barcelona, 5-7 de julio 2006)*. Universidad de Barcelona. Signo Impressió Gràfica SA, 2006. Vol 1 p. 228.

[3] BLANCO M., M. GINOVART, M. R. ESTELA, E. JARAUTA. "Teaching and learning mathematics and statistics at an agricultural engineering collage". En *Proceedings of the CIEAEM 58 Changes in Society: A Challenge for Mathematics Education (Srní, Czech Republic, 9-15 de Julio 2006)* University of West Bohemia, 2006. p. 152-157.

[4] ZABALZA BERAZA M. A. *Guía para la planificación didáctica de la docencia universitaria en el marco del EEES (Guía de guías)* Universidad de Santiago de Compostela, 2004 [en línea]. Disponible en: http://www.unavarra.es/conocer/calidad/pdf/guiaplan.PDF [Consulta: 9 de enero de 2007]

[5] BLOOM B.S. (Ed.). (1956). *Taxonomy of educational objectives, handbook I: Cognitive domain*. New York: Longmans, Green. Bloom, B.S., Englehart, M.D., Furst, E. J., & Krathwohl, D.R. (1956). Taxonomy of educational objectives: Cognitive domain. New York: McKay.

[6] CASTILLO, E., A.J. CONEJO, PEDREGAL P., GARCÍA, R. y N. ALGUACIL. *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*, Pure and Applied Mathematics Series, Wiley, New York, 2002. Versión en castellano disponible en: http://departamentos.unican.es/macc/personal/profesores/castillo/Libro.htm.