SUITES SPECTRALES

HINDA HAMRAOUI ET PERE PASCUAL

Résumé. Ces notes sont une version élargie des exposés soutenus par les auteurs dans divers séminaires sur la K-théorie algébrique développés à Barcelone et Casablanca les années 2007 et 2008. On suit de très proche l'article de J. Boardaman, [B], pour la théorie générale, et celui de R. Thomason, [T], pour les appplications à la cohomologie généralisée de faisceaux.

Table des matières

1. Travail réalisé avec le support du projet DGCYT MT M2006-14575
Date: 22 septembre 2009.

1. Introduction

Les suites spectrales sont une technique très utile pour l'étude des théories cohomologiques, soit dans la Topologie Algébrique, soit dans la Géométrie Algébrique ou l'Algèbre Homologique. Dans quelques courses et séminaires sur la K-théorie algébrique dévelopés par les auteurs à Barcelone et Casablanca, on a eu besoin de consacrer des séances aux suites spectrales, et plus particulièrement, aux suites spectrales de Brown-Gersten et Thomason. Le texte qui suit est une version élargie de ces exposés.

Il y a beaucoup de textes et articles dédiés aux suites spectrales et ses différentes applications. Presque tous les livres d'Algèbre Homologique ont un chapitre sur ce sujet. Ainsi, le lecteur peut consulter, entre beaucoup d'autres, le texte classique de Cartan-Eilenberg, [CE], ou celui plus moderne de Weibel, [W], ou le livre plus spécifique de McCleary, [M]. Ces ouvrages ne couvrent pas toujours les résultats de convergence dont on a besoin pour les suites spectrales de la K-théorie, c'est pour ça qu'on a choisi une présentation de la théorie que contient les résultats généraux de l'article de Boardman [B] et leur applications aux suites spectrales des bicomplexes et à la suite spectrale de Bousfield-Kan. On suit de près l'article de Boardman, en ajoutant queques commentaires et exemples.

Le texte est organisé ainsi. Bien que nous supposons que le lecteur connaisse quelques notions sur les suites spectrales, sur celles du premier quadrant, ou qu'il soit déjà motivé à les étudier, (en cas contraire il peut être utile de lire l'article de Chow, [CH]), nous rappelons dans §2 la définition générale de suite spectrale et celle de convergence de la suite spectrale.

La section §3 dévelope la théorie générale. On présente les suites spectrales associées à un couple exact et on introduit les groupes limite D^{∞} et colimite $D^{-\infty}$, qui sont les candidats naturels pour la convergence de la suite; et on traite séparement la convergence vers la limite ou la colimite. Pour étudier la convergence on introduit, d'après Boardman, les groupes RE^p_∞ suivant la philosophie qui dit que si on introduit une limite d'une tour de groupes abéliens, on doit tenir compte aussi des foncteurs dérivés de la limite, qui pour les tours se ramènent au premier groupe dérivé $R\varprojlim$. Comme application des résultats généraux, nous étudions la convergence des suites spectrales demiplanaires, pour les quelles on peut donner des résultats plus complets.

Les sections §4 et §5 sont dédiés aux applications de la théorie générale aux bicomplexes et aux tours de fibrations d'espaces topologiques. Dans le premier cas on fait une analyse détaillé de la convergence des bicomplexes et, comme application et motivation pour la section suivante, on dévelope l'hypercohomologie des complexes de faisceaux abéliens sur un espace topologique. Pour ce faire, on introduit les résolutions injectives de Cartan-Eilenberg et aussi la résolution de Godement d'un faisceau, analysant la coincidence de la cohomologie de leur sections globales.

Dans la section §5 nous présentons la suite spectrale de Bousfield-Kan d'une tour de fibrations et celle associée a un espace cosimplicial. Par analogie à la section antérieure, on définit l'hypercohomologie d'un faisceau simplicial sur un espace topologique comme l'homotopie des sections globales de la résolution de Godement correspondante et on présente la suite spectrale d'hypercohomologie correspondante. On peut consulter [J] pour une version de l'hypercohomologie des faisceaux simpliciaux en termes de foncteurs dérivés dans le contexte des catégories à modèles de Quillen.

Nous avons résumé dans deux appendices quelques notions et résultats sur les tours de groupes abéliens et sur les méthodes simpliciales dont on aura besoin dans le texte principal.

Les suites spectrales qu'on considère sont des suites de groupes abéliens. Une bonne partie de la théorie s'applique à des catégories abéliennes vérifiant les axiomes $Ab4$ et $Ab5$ de Grothendieck, mais on se restreint à la catégorie des groupes abéliens afin de simpilifier quelques raisonnements.

2. Suites spectrales

2.1. **Qu'est ce que c'est une suite spectrale?**

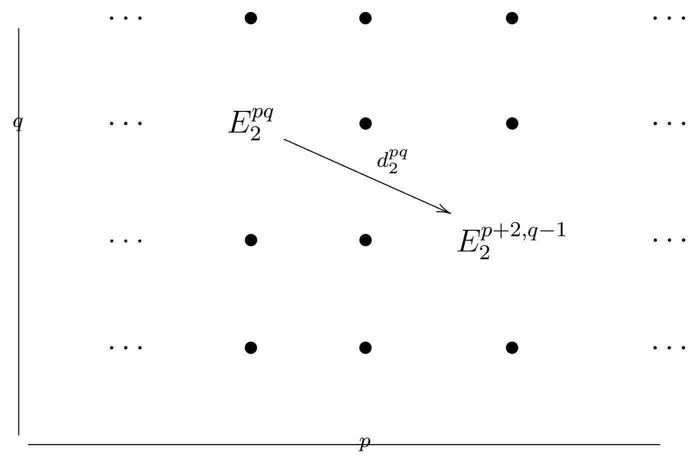
Dans cette section, on donne la définition générale de suite spectrale, on définit les termes E_∞, et on établit un premier résultat de comparaison. Nous avons choisit de travailler dans la catégorie des groupes abéliens, bien que les notions qu'on présente restent valables dans una catégorie abélienne quelconque.

2.1.1. *Définition de suite spectrale.*

Définition 2.1.1. *Une suite spectrale (bigraduée) est détérminée par les données suivantes:*

(1) *des groupes abéliens* E_r^{pq} *pour tout* $r \geq 0$ *et* $p,q \in \mathbb{Z}$.
(2) *des morphismes* $d_r^{pq} : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$, $r \geq 0$ *et* $p,q \in \mathbb{Z}$, *tels que* $d_r d_r = 0$.
(3) *des isomorphismes* $E_{r+1}^{pq} \cong \ker d_r^{pq}/\mathrm{im} d_r^{p-r,q+r-1} = H(E_r^{pq},d_r^{pq})$.

On représente une suite spectrale associant, pour chaque r, les groupes E_r^{pq} aux points de coordonnées (p,q) du plan, comme montre la figure suivante ($r = 2$):



On obtient ainsi un "livre de pages $r \geq 0$", dans lequel la page r contient les termes E_r^{pq} avec leurs différentielles. Dans le paragraphe 2.1.2 nous ajouterons, comme épilogue, une dernière page à ce livre, la page ∞.

Dans la plupart des applications, les suites spectrales commencent par le terme E_1^{pq} ou E_2^{pq}, bien qu'il y a des suites spectrales qui commencent par la page E_a^{pq}, pour un certain $a \geq 0$.

Remarques 2.1.2. (a) Considérons les groupes gradués

$$E_r^n = \bigoplus_{p+q=n} E_r^{pq}.$$

Les morphismes d_r^{pq} définissent une différentielle de degré $+1$,

$$d_r : E_r^n \longrightarrow E_r^{n+1},$$

et la condition (3) de la définition donne un isomorphisme $H^n(E_r^*) \cong E_{r+1}^n$. L'entier n s'appelle le *degré total* de E_r^{pq}, tandis que le degré q est appelé le *degré complémentaire*. Observons que les termes de degré total n sont situés dans une droite du plan de pente -1.

(b) La définition que nous avons donnée correspond aux suites spectrales *cohomologiques*. De façon équivalente on peut définir les suites spectrales *homologiques*, ce qui correspond à la définition antérieure selon le changement de notation $E_{pq}^r = E_r^{-p,-q}$. Alors, les différentielles d_r^{pq} définissent morphismes $d_{pq}^r : E_{pq}^r \longrightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ de sorte que, avec les notations analogues à celles de (a), on a $E_n^{r+1} = H_n(E_*^r)$.

Dans la définition que nous avons adoptée, le bidegré de la différentielle d_r^{pq} est $(r,1-r)$. Bien que celui-ci soit le cas le plus commun (ou l'équivalent $(-r,r-1)$ pour les suites spectrales homologiques), on peut touver d'autres situations, comme nous verrons dans la section 5, où nous trouverons une suite spectrale avec des différentielles de bidegré $(r,r+1)$.

(c) Une suite spectrale E_r^{pq} est du *premier quadrant* si $E_r^{pq} = 0$ pour $p < 0$ ou $q < 0$. De manière analogue, on peut parler de suite spectrale de deuxième quadrant, demiplane, etc. Nous observons, en particulier, que se donner une suite spectrale de troisième quadrant est équivalent à se donner une suite spectrale *homologique* du premier quadrant. Dans une bonne partie des applications, les suites spectrales qui interviennent sont du premier ou du troisième quadrant, dont l'analyse est plus simple que dans le cas général.

(d) On remarque que les différentielless d_r^{pq} sont une partie des données d'une suite spectrale et ne sont pas déterminées par les isomorphismes $E_{r+1} \cong H(E_r)$ de (3).

2.1.2. *Les termes E_∞^{pq}.*

Nous fixons un entier positif r. Le groupe E_{r+1}^{pq} est un sous-quotient de E_r^{pq}. On note

$$\begin{aligned} Z_r^{pq} &= \ker(d_r^{pq} : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}) \subseteq E_r^{pq}, \\ B_r^{pq} &= \operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \longrightarrow E_r^{pq}) \subseteq E_r^{pq}, \end{aligned}$$

les cycles et les bords de E_r^{pq}, respectivement, de la différentielle d_r^{pq}, de sorte que $B_r^{pq} \subseteq Z_r^{pq}$ et $E_{r+1}^{pq} = Z_r^{pq}/B_r^{pq}$.

Si nous commençons par $r = 1$, on a $0 \subseteq B_1^{pq} \subseteq Z_1^{pq} \subseteq E_1^{pq}$. Maintenant Z_2^{pq} et B_2^{pq} sont des sous-groupes de $E_2^{pq} = Z_1^{pq}/B_1^{pq}$. On note aussi par Z_2^{pq} et B_2^{pq} les sous-groupes de Z_1^{pq} qui sont projetés sur les cycles et les bords de E_2^{pq}, de sorte qu'on a les inclusions

$$0 \subseteq B_1^{pq} \subseteq B_2^{pq} \subseteq Z_2^{pq} \subseteq Z_1^{pq} \subseteq E_1^{pq}.$$

En itérant le processus, nous obtenons une chaîne de sous-groupes de E_1^{pq},

$$0 \subseteq B_1^{pq} \subseteq B_2^{pq} \subseteq \cdots \subseteq B_r^{pq} \subseteq B_{r+1}^{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z_{r+1}^{pq} \subseteq Z_r^{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z_2^{pq} \subseteq Z_1^{pq} \subseteq E_1^{pq}.$$

Définition 2.1.3. *On définit les cycles et les bords* à l'infini *de la suite spectrale E_r^{pq} par*

$$Z_\infty^{pq} = \bigcap_{r \geq 1} Z_r^{pq}, \qquad B_\infty^{pq} = \bigcup_{r \geq 1} B_r^{pq},$$

et le terme E_∞ comme le sous-quotient de E_1^{pq} donné par

$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq}.$$

Les cycles et les bords à l'infini complètent la chaîne de sous-groupes de E_1^{pq} en la forme

$$0 \subseteq B_1^{pq} \subseteq \cdots \subseteq B_r^{pq} \subseteq B_{r+1}^{pq} \subseteq \cdots \subseteq B_\infty^{pq} \subseteq Z_\infty^{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z_{r+1}^{pq} \subseteq Z_r^{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z_1^{pq} \subseteq E_1^{pq}.$$

Nous observons que les cycles à l'infini Z_∞^{pq} sont des cycles pour toutes les différentielles d_r^{pq}, $r \geq 1$. C'est pour cela qu'ils sont appelés *cycles qui survivent indéfiniment*. Quant aux bords B_∞^{pq}, sont des cycles qui sont des bords pour quelque $r \geq 1$, donc ils sont appelés des *cycles qui eventuelement sont des bords.*

En général, l'objectif d'une suite spectrale est de calculer le terme E_∞^{pq} et le relier à un groupe predéterminé, comme nous verrons quand nous parlerons de convergence. Dans les cas les plus favorables, le calcul final se fait dans un numéro fini d'etapes, c'est-à-dire, pour un couple (p,q) fixé on a $E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq}$ pour $r \gg 0$. Par exemple, supposons qu'on a une suite spectrale du premier quadrant ($E_r^{pq} = 0$ pour p ou $q < 0$). Si pour (p,q) on prend $r > \max\{p, q+1\}$, alors les différentielles qui arrivent et sorten de E_r^{pq} sont nulles, donc $E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq}$. Il y a un cas qui merite un nom particulier.

Définition 2.1.4. *Nous dirons qu'une suite spectrale E_r^{pq}* dégénère au terme *N si $d_r^{pq} = 0$ pour tout $r \geq N$.*

Ainsi, si E_r^{pq} est une suite spectrale dégénérée au terme N, on a

$$E_N^{pq} = E_{N+1}^{pq} = \cdots = E_\infty^{pq},$$

donc le terme à l'infinit s'approche finitement pour toutes les couples (p,q). Par exemple, si la suite spectrale E_r^{pq} est nulle en dehors de la bande verticale $0 \leq p \leq n$, alors elle dégénère au terme n.

2.1.3. *Un résultat de comparaison.* Dans ce pargraphe nous énonçons un résultat de comparaison entre deux suites spectrales selon lequel un isomorphisme dans la page n-ième détermine un isomorphisme pour toutes les pages suivantes. Nous commençons par la définition de morphisme de suites spectrales.

Définition 2.1.5. *Un morphisme de suites spectrales est une suite de morphismes*

$$f_{pq}^r : E_r^{pq} \longrightarrow {}'E_r^{pq},$$

tels que,

(1) *ils commutent avec les différentielles,* $d_r^{pq} f_r^{pq} = f_r^{pq} d_r^{pq}$*,*
(2) f_r^{pq} *induit* f_{r+1}^{pq} *en cohomologie.*

Nous observons qu'un morphisme de suites spectrales induit des morphismes dans les cycles et les bords $f_r^{pq} : Z_r^{pq} \longrightarrow {}'Z_r^{pq}$, $f_r^{pq} : B_r^{pq} \longrightarrow {}'B_r^{pq}$ et, donc, dans les groupes à l'infini

$$f_\infty^{pq} : E_\infty^{pq} \longrightarrow {}'E_\infty^{pq}.$$

Proposition 2.1.6. *Soit* $f_{pq}^r : E_{pq}^r \longrightarrow {}'E_r^{pq}$ *un morphisme de suites spectrales et supposons qu'il existe* $a > 0$ *tel que* f_{pq}^a *est un isomorphisme. Alors,* f_{pq}^r *est un isomorphisme pour tout* $a \leq r \leq \infty$*.*

Preuve. Supposons que f_{pq}^a est un isomorphisme, alors f_{pq}^a induit un isomorphisme entre les cycles et les bords des suites spectrales et, en général, il induit un isomorphisme

$$B_r^{pq} \cong {}'B_r^{pq}, \quad Z_r^{pq} \cong {}'Z_r^{pq}, \qquad r \geq a,$$

considérés comme sous-groupes de E_a^{pq}, d'où le résultat. □

2.2. **Convergence.**

Les suites spectrales sont utiles pour déterminer les groupes filtrés auxquels convergent. Avant de définir la notion de convergence, nous analysons les groupes filtrés et leurs propriétées.

2.2.1. *Groupes filtrés.*

Définition 2.2.1. *Soit H un groupe abélien. Une filtration (décroissante) de H est une suite de sous-groupes*

$$\cdots \subseteq F^{p+1}H \subseteq F^pH \subseteq \cdots \subseteq H, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

On appelle le p-ième groupe gradué de H pour la filtration F^* le groupe

$$\mathrm{Gr}_F^p H = F^pH/F^{p+1}H.$$

Si (H,F),(H',F') sont deux groupes filtrés, un morphisme filtré $f : (H,F) \longrightarrow (H',F')$ est un morphisme de groupes $f : H \longrightarrow H'$ compatible avec les filtrations, c'est-à-dire, tel que $f(F^p) \subseteq F'^p$.

Si H^* est un groupe abélien gradué, une filtration de H^* est une filtration de H^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Les gradués d'un groupe filtré, $Gr^p_F H$, $p \in \mathbb{Z}$, ne détérminent pas, en général, le groupe H. Par exemple, si K est un groupe abélien quelconque et nous considérons le groupe gradué filtré $(H \oplus K,F^*)$, avec $F^p(H \oplus K) = F^pH \oplus K$, alors les morphismes d'inclusion $F^pH \longrightarrow F^pH \oplus K$ induisent isomorphismes de groupes gradués, $Gr^p_F H \longrightarrow Gr^p_F(H \oplus K)$, pout tout p, tandis que $H \longrightarrow H \oplus K$ n'est pas un isomorphisme si $K \neq 0$. On va donner des conditions sur les filtrations qui permetent récuperer un groupe à partir des gradués de la filtration.

Définition 2.2.2. *Soit (H,F^*) un groupe filtré.*

(1) *On dit que la filtration F^* est* séparée (où Hausdorff) *si $\bigcap_p F^pH = 0$.*
(2) *On dit que la filtration F^* est* exhaustive *si $\bigcup_p F^pH = H$.*
(3) *On dit que la filtration F^* est* complète *si $R\varprojlim_p F^pH = 0$.*

Désormais, nous utilisons les notations

$$\begin{aligned} F^\infty H &= \varprojlim_p F^pH = \bigcap_p F^pH, \\ F^{-\infty} H &= \varinjlim_p F^pH = \bigcup_p F^pH, \end{aligned}$$

de sorte que la filtration est séparée si $F^\infty H = 0$ et elle est exhaustive si $F^{-\infty}H = H$.

Entre les filtrations séparées, on trouve les filtrations *bornées inférieurement*: celles pour les quelles $F^p = 0$, pour p suffissament grand. Dualement, les filtrations bornées supérieurement sont exhaustives.

Exercice 2.2.3. La terminologie topologique des définitions antérieures est justifiée par les résultats suivants que nous proposons en exercice.

(i) Prouver que les sous-ensembles $x + F^p$, $x \in H$, $p \in \mathbb{Z}$, définissent une topologie de H.
(ii) Prouver que H est un espace séparée si, et seulement si, la filtration F^* est séparée.
(iii) Prouver que toute suite de Cauchy de H est convergente si, et seulement si, la filtration F^* est complète.

Le résultat suivant exprime de manière concise quand une filtration est à la fois séparée et complète, c'est-à-dire, quand les suites de Cauchy sont convergentes de limite unique.

Lemme 2.2.4. *Une filtration F^*H est séparée et complète si, et seulement si, $H = \varprojlim_p H/F^pH$.*

Preuve. Pour chaque p, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F^pH \longrightarrow H \longrightarrow H/F^pH \longrightarrow 0.$$

Ainsi, la suite exacte des dérivés des limites se réduit à la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim_p F^pH \longrightarrow H \longrightarrow \varprojlim_p H/F^pH \longrightarrow R\varprojlim_p F^pH \longrightarrow 0,$$

d'où le résultat. □

Nous considérons maintenant quelques propriétées élémentaires des filtrations dont on aura besoin dans les prochaines sections.

Lemme 2.2.5. *Soit F^*H une filtration d'un groupe abélien H et $K \subseteq F^\infty H$ un sous-group. Alors on a:*

(1) $\varinjlim_p F^pH/K = F^{-\infty}H/K$.
(2) $\varprojlim_p F^pH/K = F^\infty H/K$.
(3) $R\varprojlim_p F^pH/K = R\varprojlim_p F^pH$.

Preuve. (1) Découle de l'exactitude de la limite inductive. Pour prouver (2) et (3), nous considérons, pour chaque p, les suites exactes

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F^pH \longrightarrow F^pH/K \longrightarrow 0.$$

La suite exacte des dérivés se réduit à la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \varprojlim_p F^pH \longrightarrow \varprojlim_p F^pH/K \longrightarrow 0.$$

et les isomorphismes

$$R\varprojlim_p F^pH/K = R\varprojlim_p F^pH,$$

ce qui finit la preuve. □

Remarquons, en particulier, que si nous filtrons le quotient H/K par $F^p(H/K) = F^pH/K$, et la filtration originale F^*H est exhaustive ou complète, il en est de même pour la filtration du quotient H/K.

On peut maintenant déduire aisément le résulat suivant qui permet de récupérer un groupe filtré à partir des sous-quotients associés à la filtration.

Corollaire 2.2.6. *Soit F^*H une filtration exhaustive, compléte et séparée. Alors,*

$$H = \varprojlim_p \varinjlim_q F^pH/F^qH.$$

Preuve. En effet, on a les isomorphismes

$$H = \varprojlim_p H/F^pH = \varprojlim_p \varinjlim_q F^qH/F^pH,$$

pour le premier desquels nous utilisons que la filtration est complète et séparée, Lemme 2.2.4, tandis que le deuxième découle du Lemme 2.2.5 puisque la filtration est exhaustive. □

Comme application des résultats anterieures, on donne un résultat de comparaison entre des groupes filtrés.

Proposition 2.2.7. *Soient* (H,F^*),(H',F'^*) *deux groupes abéliens filtrés et* $f : (H,F^*) \longrightarrow (H',F'^*)$ *un morphisme filtré. Supposons que les filtrations sont séparées, exhaustives et complètes. Si les morphismes* $\mathrm{gr}^p f : Gr^p_F H \longrightarrow Gr^p_{F'} H'$ *sont des isomorphismes, pour tout* p*, alors* f *est un isomorphisme de groupes filtrés.*

Preuve. Pour $q < p$, on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^p/F^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & F^q/F^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & F^q/F^p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F'^p/F'^{p+1} \arrow[r] & F'^q/F'^{p+1} \arrow[r] & F'^q/F'^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ainsi, comme $\mathrm{gr}^p f$ sont des isomorphismes, du lemme des cinq et par induction sur q, on déduit que $F^q/F^p \cong F'^q/F'^p$ sont des isomorphismes.

Mais, les filtrations sont exhaustives, complètes et séparées, donc nous pouvons appliquer le Corollaire 2.2.6 pour conclure la preuve. □

2.2.2. *Définition de convergence.*

Nous définissons maintenant, suivant la terminologie proposée par Cartan-Eilenberg, les différentes notions de convergence d'une suite spectrale.

Définition 2.2.8. *Soit* E_r^{pq} *une suite spectrale et* (H^*,F^*) *un groupe gradué filtré. On dit que la suite spectrale* E_r^{pq} aboutit à (H^*,F^*) *s'il existe des isomorphismes*

$$E_\infty^{pq} \cong \mathrm{Gr}^p_F H^{p+q},$$

pour tout couple (p,q).

Nous indiquerons l'aboutissement de la suite spectrale par

$$E_1^{pq} \Rightarrow H^n,$$

où $n = p + q$. Pour que la suite spectrale determine le groupe filtré H^n il faut imposer des conditions sur la filtration.

Définition 2.2.9. *Soit* E_r^{pq} *une suite spectrale qui aboute au groupe gradué filtré* (H^*,F^*)*. On dit que*

(1) E_r^{pq}*est* faiblement convergente *à* (H^*,F^*)*, si la filtration* F^* *est exhaustive.*
(2) E_r^{pq} *est* convergente *à* (H^*,F^*)*, si la filtration* F^* *est exhaustive et séparée.*
(3) E_r^{pq} *est* fortement convergente *à* (H^*,F^*)*, si la filtration* F^* *est exhaustive, séparée et complète.*

Comme conséquence de la Proposition 2.2.7, la convergence forte d'une suite spectrale vers un groupe gradué filtré H^* permet de récupérer, sauf des extensions, ce groupe à partir des termes

E_∞^{pq}. Elle permet aussi d'établir le résultat de comparaison suivant, qui complète la Proposition 2.1.6 pour des suites spectrales fortement convergentes.

Théorème de comparaison 2.2.10. *Soient E_r^{pq}, $'E_r^{pq}$ deux suites spectrales fortement convergentes aux groupes gradués filtrés (H^*,F^*),(H'^*,F'^*); soit $f_r^{pq} : E_r^{pq} \longrightarrow' E_r^{pq}$ un morphisme de suites spectrales et $f^* : H^* \longrightarrow H'^*$ un morphisme de groupes gradués filtrés compatible avec le morphisme de suites spectrales f_r^{pq}. S'il existe $a > 0$ tel que f_a^{pq} est un isomorphisme, alors, $f^n : H^n \longrightarrow H'^n$ est un isomorphisme de groupes filtrés, pour tout n.* □

Exercices 2.2.11. Soit E_2^{pq} une suite spectrale du premier quadrant, c'est à dire, $E_2^{pq} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$. Supposons que E_2^{pq} est convergent à un groupe gradué filtré H^*.

(1) *Suite exacte des* 5 *premiers termes*: prouver qu'il y a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{01} \xrightarrow{d} E_2^{20} \longrightarrow H^2.$$

(2) *Suite exacte de Wang*: supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que

$$E_2^{pq} = 0, \quad \text{si } p \neq 0,n.$$

(a) Prouver que $E_r^{0q} = E_\infty^{0q}, r \geq 3$.
(b) Prouver qu'il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_\infty^{n,k-n} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_\infty^{0k} \longrightarrow 0.$$

(c) Déduire qu'il existe une suite exacte

$$\ldots \longrightarrow H^k \longrightarrow E_\infty^{0k} \longrightarrow E_\infty^{n,k-n+1} \longrightarrow H^{k+1} \longrightarrow E_\infty^{0,k+1} \longrightarrow \ldots$$

(3) *Suite exacte de Gysin*: supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que

$$E_2^{pq} = 0, \quad \text{si } q \neq 0,n.$$

Prouver qu'il existe une suite exacte

$$\ldots \longrightarrow H^k \longrightarrow E_\infty^{k-n,n} \longrightarrow E_\infty^{k+1,0} \longrightarrow H^{k+1} \longrightarrow E_\infty^{0,k+1} \longrightarrow \ldots$$

(4) *Caracteristique d'Euler*: Soit K^* un complexe borné de groupes abéliens de type fini. On définit la characteristique d'Euler de K^* par $\chi(K^*) = \sum(-1)^p$ rang K^p.

(a) Prouver que $\chi(K^*) = \chi(H^*(K^*))$.
(b) Soit F^pK^*, une filtration décoissante du complexe K^*. Prouver que $\chi(K^*) = \chi(Gr_F^*(K^*))$.
(c) Soit E_2^{pq} une suite spectrale tel que les groupes sont de type fini et qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples (p,q) avec $E_2^{pq} \neq 0$. Supposon qu'elle est convergente à H^*. Déduire que

$$\chi(E_2) = \chi(E_\infty) = \chi(H^*).$$

2.3. **Génération de suites spectrales : couples exacts.**

Dans cette section, on introduit les couples exacts et les suites spectrales associées comme la méthode plus systématique de générer des suites spectrales (on présente les complexes filtrés, qui sont à la base de la théorie classique des suites spectrales, comme un cas particulier). On laisse pour de prochaines sections l'étude détaillée de la convergence de la suite spectrale associée à un couple exact quelconque.

2.3.1. *Couples exacts.*

Définition 2.3.1. *Un* couple exact *est un triangle de groupes abéliens et morphismes*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

exact en chaque sommet, c'est à dire, telle que

$$\ker\alpha = \text{im } \gamma, \quad \ker\beta = \text{im } \alpha, \quad \ker\gamma = \text{im } \beta.$$

L'opération fondamentale sur un couple exact, qui permetra de lui associer une suite spectrale, est la construction du *couple exact dérivé*. Nous commençons par observer que, par l'exactitude du triangle, la composition

$$d = \beta\gamma : E \longrightarrow E,$$

satisfait $d^2 = 0$ et définit une différentielle de E, donc nous pouvons considérer le groupe abélien

$$E' = H(E) = \ker d/\mathrm{im}\, d.$$

On définit $D' = \mathrm{im}\,\alpha$ et les morphismes

$$\begin{aligned} \alpha' &: D' \longrightarrow D' && \text{induit par} && \alpha, \\ \beta' &: D' \longrightarrow E' && \text{induit par} && \beta\alpha^{-1}, \\ \gamma' &: E' \longrightarrow D' && \text{induit par} && \gamma. \end{aligned}$$

Il faut voir que β' et γ' sont bien définis. Vérifions-le pour β' : en premier lieu, nous observons que pour n'importe quel $x \in D'$ et n'importe quel représentant y de $\alpha'(x)$, $\beta(y)$ est un cycle, parce que $d\beta(y) = \beta\gamma\beta(y) = 0$, donc $\beta(y)$ définit une classe d'homologie de $E' = H(E)$. Nous voyons maintenant que cette classe d'homologie est indépendante du représentant y de $\alpha^{-1}(x)$ choisi : en effet, si $y, y' \in \alpha^{-1}(x)$, alors $\alpha(y - y') = 0$ et, à cause de l'exactitude du couple initial, il existe $z \in D$ tel que $y - y' = \gamma(z)$ et, par conséquent,

$$\beta(y) - \beta(y) = \beta\gamma(z) = dz.$$

C'est-à-dire, $[\beta(y)] = [\beta(y')] \in H(E)$. Nous laisserons la vérification que γ' est bien définie comme exercice.

Un raisonnement élémentaire permet de prouver le résultat suivant:

Proposition 2.3.2. *Avec les notations antérieures,*

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "\alpha'"] & & D' \arrow[dl, "\beta'"] \\ & E' \arrow[ul, "\gamma'"] & \end{tikzcd}$$

est un couple exact. □

Nous pouvons maintenant itérer le processus et définir une suite de couples exacts. Nous indexons le premier couple exact avec 1, c'est à dire, $(D_1,E_1,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) := (D,E,\alpha,\beta,\gamma)$, et le couple dérivé par $(D_2,E_2,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = (D',E',\alpha',\beta',\gamma')$. Il en résulte ainsi une suite de couples exacts

$$\begin{tikzcd} D_r \arrow[rr, "\alpha_r"] & & D_r \arrow[dl, "\beta_r"] \\ & E_r \arrow[ul, "\gamma_r"] & \end{tikzcd}$$

dans laquelle le $(r+1)$-ièm couple est le couple dérivé du r-ième couple.

2.3.2. *Couples exacts bigradués.*

Considérons maintenant un couple exact dans lequel les groupes et les morphismes sont bigradués

$$\begin{tikzcd} D^{**} \arrow[rr, "\alpha"] & & D^{**} \arrow[dl, "\beta"] \\ & E^{**} \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

Dans les cas les plus habituels les morphismes ont les bidegrés

$$\deg\alpha = (-1,1), \quad \deg\beta = (0,0), \quad \deg\gamma = (1,0),$$

ce que nous supposerons dans le reste de l'exposé, bien qu'en quelques applications on peut trouver d'autres graduations.

En faisant attention au premier degré, le couple exact antérieur se déploie sous la forme

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\alpha"] & D^{p+1,*} \arrow[rr, "\alpha"] & & D^{p,*} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & & D^{p-1,*} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \cdots \\ & & E^{p,*} \arrow[ul, "\gamma"] & & E^{p-1,*} \arrow[ul, "\gamma"] & & \end{tikzcd}$$

dans laquelle, chaque triangle correspond à une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow D^{p+1,q} \xrightarrow{\alpha} D^{p,q+1} \xrightarrow{\beta} E^{p,q+1} \xrightarrow{\gamma} D^{p+1,q+1} \longrightarrow \ldots$$

Dans ce sens, le couple exact résume la inter-rélation qu'il y a entre les suites exactes sous-jacentes. Voi-ci deux exemples qu'on étudiera avec plus détail dans les sections suivantes.

Exemple 2.3.3. Soit K un complexe (cohomologique) de groupes abéliens et

$$\cdots \subseteq F^{p+1}K \subseteq F^pK \subseteq \cdots \subseteq K$$

une filtration décroissante de souscomplexes. Les suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes de complexes

$$0 \longrightarrow F^{p+1}K \longrightarrow F^pK \longrightarrow F^pK/F^{p+1}K \longrightarrow 0,$$

donnent lieu au couple exact

$$\begin{tikzcd} H^*(F^{p+1}K) \arrow[rr, "\alpha"] & & H^*(F^pK) \arrow[dl, "\beta"] \\ & H^*(F^pK/F^{p+1}K) \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

dans lequel $D^{pq} = H^{p+q}(F^pK)$ et $E^{pq} = H^{p+q}(F^pK/F^{p+1}K)$; α est le morphisme induit par l'inclusion $F^{p+1}K \subseteq F^pK$; β est le morphisme induit par le passage au quotient; et γ est le morphisme de connexion correspondant.

Exemple 2.3.4. Soit X un espace topologique et

$$\cdots \subseteq X_p \subseteq X_{p+1} \subseteq \cdots \subseteq X$$

une filtration par des sous-espaces. Les suites exactes d'homologie relative des couples (X_p,X_{p-1}) définissent un couple exact

$$\begin{tikzcd} H_*(X_{p-1}) \arrow[rr, "\alpha"] & & H_*(X_p) \arrow[dl, "\beta"] \\ & H_*(X_p,X_{p-1}) \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

dans lequel $D_{pq} = H_{p+q}(X_p)$ et $E_{pq} = H_{p+q}(X_p,X_{p-1})$. Comme dans l'exemple antérieur, γ est le morphisme de connexion.

2.3.3. *Suite spectrale associée à un couple exact.*

Pour les couple exacts bigradués, les bidegrés des morphismes sont additifs par rapport à la composition, donc on en déduit aisément le résultat suivant:

Théorème 2.3.5. *Soit $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$ un couple exact bigradué et $(D_r,E_r,\alpha_r,\beta_r,\gamma_r)$ le r-ième couple dérivé. Alors,*

1. $\deg \alpha_r = (-1,1), \deg \beta_r = (r,-r), \deg \gamma_r = (1,0)$.
2. *la différentielle $d^r = \beta_r\gamma_r : E_r \longrightarrow E_r$ a bidegré $(r,1-r)$ et est induite par $\beta(\alpha^{-1})^{r+1}\gamma$.*
3. $D_r = \alpha^r(D)$ *et* $E_r = \gamma^{-1}(\alpha^r D)/\beta((\alpha^{-1})^r(0))$.
4. $E_r^{pq} = \ker d_{pq}/\mathrm{im}\, d^r_{p+r,q-r+1}$. □

En particulier, on a:

Corollaire 2.3.6. *Soit $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$ un couple exact bigradué. Les termes E_r^{pq} des couples dérivés et les différentiels $d_r = \beta_r\gamma_r$ définissent une suite spectrale.* □

Cette suite spectrale est appelée la *suite spectrale associée au couple* $(D,E,\alpha,\beta,\gamma)$.

2.3.7. Nous observons que, par construction, on a les égalités

$$\begin{aligned} Z_r^{p,*} &= \gamma^{-1}(\mathrm{im}\, \alpha^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*}) \\ B_r^{p,*} &= \beta(\ker \alpha^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*}), \end{aligned}$$

et, par conséquent, le terme E_∞ de la suite spectrale admet l'expression

$$E_\infty^{p,*} = \bigcap_r \gamma^{-1}(\operatorname{im}\alpha^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*}) / \bigcup_r \beta(\ker\alpha^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*}).$$

De la première de ces égalités il s'en suit que $\beta(D^{p,*}) \subseteq Z_r^{p,*}$, pour tout $r \geq 1$, c'est-à-dire que, les éléments de $\ker\gamma = \operatorname{im}\beta$ sont des cycles de la suite spectrale qui survivent indéfiniment. Ainsi, on peut compléter la tour de sous-groupes de E_r^{pq} de la suite spectrale d'un couple exact sous la forme

$$0 \subseteq B_r^{pq} \subseteq B_{r+1}^{pq} \subseteq \cdots \subseteq B_\infty^{pq} \subseteq \operatorname{im}\beta = \ker\gamma \subseteq Z_\infty^{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z_{r+1}^{pq} \subseteq Z_r^{pq} \subseteq E_r^{pq}.$$

Donc, pour un couple exact, le terme E_∞^{pq} est une extension de groupes selon la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\beta/B_\infty^{pq} \longrightarrow E_\infty^{pq} \longrightarrow Z_\infty^{pq}/\operatorname{im}\beta \longrightarrow 0.$$

Dans la prochaine section nous allons éxaminer de près proche les groupes qui intervienent dans cette suite exacte.

Remarque 2.3.8. Si les bidegrés du couple exact initial sont

$$\deg\alpha = (1,-1), \quad \deg\beta = (-a,a), \quad \deg\gamma = (-1,0).$$

alors, en commençant avec la numération $(D_a,E_a,\alpha_a,\beta_a,\gamma_a) := (D,E,\alpha,\beta,\gamma)$ s'obtient une suite spectrale qui commence au terme E_a.

Exercice 2.3.9. On laisse en exercice définir la notion de morphisme de couples exacts et énnoncer un résultat de comparaison pour le morphisme de suites spectrales correspondantes.

3. Convergence de la suite spectrale associée à un couple exact

Généralement, quand on a une suite spectral est parce qu'on veut calculer un certain groupe d'homologie, qui correspond à la possible limite de la suite spectrale. Dans le contexte des couples exacts il n'est pas clair quel est le groupe filtré auquel peut converger la suite spectrale. Dans cette section nous analysons la convergence des suites spectrales associées à un couple exact, et plus particulierment les suites spectrales demiplanaires. On suit de très proche l'article de Boardman, [B]; dans l'appendice de la section §6 on trouve résumés les notions et résultats relatives aux limites et colimites de groupes abéliens dont on a besoin.

Dans toute la section, nous fixons un couple exact bigradué

$$\begin{tikzcd} D^{**} \arrow[rr, "\alpha"] & & D^{**} \arrow[dl, "\beta"] \\ & E^{**} \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

avec les bidegrés habituels, voir 2.3.2.

Afin de simplifier les notations, (et ne pas prédéterminer les bidegrés des morphismes du couple exact), nous nous concentrerons sur le premier degré des groupes bigradués. Ainsi, nous partons d'un couple exact déployé de groupes abéliens (gradués)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\alpha"] & D^{p+1} \arrow[rr, "\alpha"] & & D^p \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & & D^{p-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \cdots \\
& & E^p \arrow[ul, "\gamma"] & & E^{p-1} \arrow[ul, "\gamma"] & &
\end{tikzcd}$$

avec α de degré 1 et β,γ de degré zero.

3.1. Le diagramme fondamental.

On a les groupes gradués filtrés

$$D^{\infty} = \varprojlim_p D^p, \qquad D^{-\infty} = \varinjlim_p D^p,$$

avec les filtrations décroissantes données par

$$\begin{aligned} F^p D^{-\infty} &= \operatorname{im}(D^p \longrightarrow D^{-\infty}), \\ F^p D^{\infty} &= \ker(D^{\infty} \longrightarrow D^p). \end{aligned}$$

qui sont associés de manière naturelle au couple exact. (Bien entendu, la graduation de D^{∞} est déterminée par $\mathcal{D}^{\infty,n} = \varprojlim_p D^{p,n-p}$, etc.)

Dans la proposition suivante nous analysons les propriétés de ces deux filtrations.

Proposition 3.1.1. *Avec les notations antérieures, on a :*

(1) *La filtration $F^p D^{-\infty}$ de $D^{-\infty}$ est exhaustive.*
(2) *La filtration $F^p D^{\infty}$ est séparée et complète. En plus,*

$$\cup_p F^p D^{\infty} = \ker(D^{\infty} \longrightarrow D^{-\infty});$$

en particulier, si $D^{-\infty} = 0$, la filtration est exhaustive.

Preuve. La première assertion est immédiate, puisque

$$\bigcup_p F^p D^{-\infty} = \varinjlim_p \operatorname{im}(D^p \longrightarrow D^{-\infty}) = D^{-\infty}.$$

Pour prouver (2) il est suffisant de voir que

$$\varprojlim_p F^p D^{\infty} = 0, \quad \text{i} \quad R\varprojlim_p F^p D^{\infty} = 0.$$

Soit $I^p = \operatorname{im}(D^{\infty} \longrightarrow D^p)$ et nous considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow F^p D^{\infty} \longrightarrow D^{\infty} \longrightarrow I^p \longrightarrow 0.$$

La suite exacte des foncteurs dérivés de la limite, Théorème 6.3.3, donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim_p F^p D^{\infty} \longrightarrow D^{\infty} \longrightarrow \varprojlim_p I^p \longrightarrow R\varprojlim_p F^p D^{\infty} \longrightarrow 0.$$

D'après la définition de la limite projective, le morphisme $D^\infty \longrightarrow \varprojlim_p I^p$ est un isomorphisme, d'où le résultat. En outre, on a

$$\varinjlim_p F^p D^\infty = \varinjlim_p \ker(D^\infty \longrightarrow D^p) = \ker(D^\infty \longrightarrow D^{-\infty}),$$

puisque la limite directe est un foncteur exact. $\square$

La relation entre les groupes D^∞,$D^{-\infty}$ et les termes E_∞^{pq} de la suite spectrale associée au couple exact est déterminée par le diagramme fondamental que nous établirons dans la Proposition 3.1.8, qui consiste de deux suites exactes. Nous commençons par introduire les éléments qui participent à ce diagramme.

3.1.2. Suivant la philosophie d'introduire les dérivés des limits des tours de groupes abéliens qui apparaîtront, nous considérons les groupes gradués

$$RE_\infty^p = R\varprojlim_r Z_r^p = R\varprojlim_r Z_r^p/B_m^p, \quad r \geq m.$$

La deuxième égalité, est une conséquence du Lemme 2.2.5, et prouve que ces groupes ne dépendent que de la suite spectral, c'est-à-dire, des groupes gradués E_r^p.

3.1.3. Notons $\mathrm{im}^r D$ la r-ième suite dérivée de D, c'est-à dire, la suite donnée par $(\mathrm{im}^r D)^p = \mathrm{im}(D^{p+r} \longrightarrow D^p)$. Pour chaque p, nous définissons les groupes gradués

$$\begin{aligned} Q^p &= \cap_r \mathrm{im}^r D^p = \varprojlim_r \mathrm{im}^r D^p, \\ RQ^p &= R\varprojlim_r \mathrm{im}^r D^p. \end{aligned}$$

Le morphisme $\alpha : D \longrightarrow D$ induit des morphismes

$$Q^{p+1} \longrightarrow Q^p, \quad \text{et} \quad RQ^{p+1} \longrightarrow RQ^p.$$

Par le Théorème 6.4.3, il y a un isomorphisme

$$\varprojlim_p Q^p \cong \varprojlim_p D^p = D^\infty,$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_p Q^p \longrightarrow RD^\infty \longrightarrow \varprojlim_p (RQ^p) \longrightarrow 0.$$

3.1.4. Comme dans la preuve du Théorème 6.4.3, nous considérerons aussi les groupes

$$I^p = \mathrm{im}(D^\infty \longrightarrow D^p).$$

Si on prend la limite de ces groupes on trouve

$$\begin{aligned} \varprojlim I^p &= D^\infty, \\ R\varprojlim I^p &= 0. \end{aligned}$$

On a les inclusions naturelles $I^p \hookrightarrow Q^p$, qui en général ne seront pas des isomorphismes. Dans le Lemme 3.2.1 nous verrons que si les groupes RE_∞^p s'annulent, alors les inclusions antérieures deviennent des égalités, $I^p = Q^p$.

Le diagramme fondamental 3.1.8 sera conséquence des trois suites exactes suivantes:

3.1.5. *La suite exacte*

$$0 \longrightarrow F^pD^\infty/F^{p+1}D^\infty \longrightarrow I^{p+1} \longrightarrow I^p \longrightarrow 0.$$

Cette suite découle immédiatement des suites exactes

$$0 \longrightarrow F^pD^\infty \longrightarrow D^\infty \longrightarrow I^p \longrightarrow 0,$$

pour tout p et du lemme du serpent.

3.1.6. *La suite exacte*

$$0 \longrightarrow F^pD^{-\infty}/F^{p+1}D^{-\infty} \longrightarrow E^p_\infty \longrightarrow Z^p/\ker\gamma \longrightarrow 0.$$

L'inclusion $\mathrm{im}\beta \subseteq Z^p_\infty$, induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}\beta/B^p_\infty \longrightarrow E^p_\infty \longrightarrow Z^p_\infty/\mathrm{im}\beta \longrightarrow 0.$$

Mais, $\mathrm{im}\beta = \ker\gamma$ et, par conséquent, le dernier terme de la suite est isomorphe à $Z^p_\infty/\ker\gamma$. Finalement, étant donné que $B^p_\infty = \beta\ker(D^p \longrightarrow D^{-\infty})$, les morphismes naturels induisent des isomorphismes

$$\mathrm{im}\beta/B^p_\infty \overset{\sim}{\longleftarrow} D^p/[\mathrm{im}\alpha + \ker(D^p \longrightarrow D^{-\infty})] \overset{\sim}{\longrightarrow} F^pD^{-\infty}/F^{p+1}D^{-\infty},$$

(voir aussi 2.3.7).

3.1.7. *La suite exacte*

$$0 \longrightarrow Z^p_\infty/\ker\gamma \longrightarrow Q^{p+1} \longrightarrow Q^p \longrightarrow RE^p_\infty \longrightarrow RQ^{p+1} \longrightarrow RQ^p \longrightarrow 0.$$

Cette suite exacte est la suite exacte des dérivés de la limite selon r des suites exactes

$$0 \longrightarrow Z^p_r/\ker\gamma \longrightarrow \mathrm{im}^{r-1}D^{p+1} \longrightarrow \mathrm{im}^rD^p \longrightarrow 0.$$

Diagramme fonamental 3.1.8. *Avec les notations antérieures, on a un diagramme commutatif de suites exactes de groupes gradués*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Gr^p_FD^\infty \arrow[r] & I^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & I^p \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
0 \arrow[r] & Gr^p_FD^{-\infty} \arrow[r] & E^p_\infty \arrow[r] & Q^{p+1} \arrow[r] & Q^p \arrow[r] & RE^p_\infty \arrow[r] & RQ^{p+1} \arrow[r] & RQ^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Preuve. La suite exacte supérieure est la suite 3.1.5, tandis que l'inférieure découle de l'enchaînement des suites exactes 3.1.7 et 3.1.6. Finalement, les morphismes verticaux sont les inclusions naturelles $I^p \longrightarrow Q^p$. □

Nous remarquons que de la suite exacte inférieure il en résulte immédiatement le critère de convergence suivant, prouvé par Cartan-Eilenberg pour les suites spectrales associées à un complexe filtré ([CE], XV, Proposition 2.2):

Corollaire 3.1.9. *La suite spectrale associée à un couple exact est faiblement convergente à $D^{-\infty,*}$ si, et seulement si, les morphismes $Q^{p+1,*} \longrightarrow Q^{p,*}$ sont injectifs pour tout p.*

3.2. **La condition $RE^p_\infty = 0$.**

Le diagramme fondamental se simplifie beaucoup si les groupes RE^p_∞ s'annulent. Cette condition est une condition interne à la suite spectrale, parce que ces groupes gradués ne dependent que des groupes E^{pq}_r, $r \geq m$.

Lemme 3.2.1. *On suppose que la suite spectrale d'un couple exact vérifie $RE^p_\infty = 0$. Alors,*

(1) *Les morphismes naturels $D^\infty \longrightarrow Q^p$ sont surjectifs pour tout p et, en particulier, $I^p = Q^p$.*
(2) *Les morphismes naturels $RD^\infty \longrightarrow RQ^p$ sont des isomorphismes pour tout p.*

Preuve. (1) Par hypothèse, la suite exacte inférieure du diagramme fondamental se decompose dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow F^pD^{-\infty}/F^{p+1}D^{-\infty} \longrightarrow E^p_\infty \longrightarrow Q^{p+1} \longrightarrow Q^p \longrightarrow 0.$$

et les isomorphismes $R^{p+1} \cong RQ^p$. Par 3.1.3, $D^\infty = \varprojlim_p Q^p$, donc de la suite exacte antéireure et de 6.3.7, il s'en suit que les morphismes $D^\infty \longrightarrow Q^p$ sont surjectifs et que $R\varprojlim_p Q^p = 0$.

(2) Il découle de $R\varprojlim_p Q^p = 0$ et de la suite exacte 3.1.3. □

Donc, si on a $RE^p_\infty = 0$, le diagramme fondamental se reduit au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Gr^p_F D^\infty \arrow[r] & I^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^p \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Gr^p_F D^{-\infty} \arrow[r] & E^p_\infty \arrow[r] & Q^{p+1} \arrow[r] & Q^p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et les isomorphismes

$$RQ^{p+1} \cong RQ^p.$$

Donc, on a $Gr^p_F D^\infty = \ker(Q^{p+1} \longrightarrow Q^p)$ et on en déduit:

Proposition 3.2.2. *Si $RE^p_\infty = 0$, alors il y a une suite exacte de groupes gradués*

$$0 \longrightarrow Gr^p_F D^{-\infty} \longrightarrow E^p_\infty \longrightarrow Gr^p_F D^\infty \longrightarrow 0.$$ □

C'est-à-dire, que la condition $RE^p_\infty = 0$ assure que E^p_∞ est une extension des groupes gradués p-ièmes associés a D^∞ et $D^{-\infty}$.

3.2.3. La condition $RE^p_\infty = 0$ a été introduite par Boardman dans [B]. Elle généralise des conditions de régularité des suites spectrales qu'on a imposée classiquement. Rappelons nous, par example, la notion de suite spectrale régulière tel qu'elle apparait dans [Bo], p. AX.175 (comparer aussi avec [EGA] III (11.1.3), où on impose, en plus, des conditions de finitude sur les filtrations):

(a) On dit que une suite spectrale E^{pq}_r est *régulière* si la suite décroissante $(Z_r(E^{pq}_2))_{r\geq 2}$ est stationnaire pour tout couple (p,q). C'est-à-dire, pour tout couple (p,q) il existe $r \geq 0$

avec $Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq}$. De manière équivalente, pour tout couple (p,q) il existe $r \geq 0$ avec $d_r^{pq} = 0$.
Si une suite est régulière, pour tout couple (p,q) on a $Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq}$ pour $r \gg 0$, donc elle satisfait la condition de Boardman $RE_\infty^p = R\varprojlim_r Z_r^p = 0$.
Par exemple, si la suite spectral est nulle sur le quatrième quadrant, alors elle est régulière.

(b) Dualement, on dit qu'une suite spectrale E_r^{pq} est *corégulière* si la suite croissante $(B_r(E_r^{pq}))_{r\geq 2}$ est stationnaire pour tout couple (p,q). Une suite spectrale E_r^{pq} est *birégulière* si elle est régulière et corégulière. Ainsi, pour une suite spectrale birégulière, la suite $(E_r^{pq})_{r\geq 2}$ est stationnaire pour tout couple (p,q).
Par example, une suite spectrale du premier quadrant est birégulière.

(c) On dit que une suite spectrale E_r^{pq} est *bornée superieurement* si pour tout entier n il existe un entier $p(n)$ tel que $E_s^{pq} = 0$ pour $s \geq r$, $p + q = n$ et $p > p(n)$. *Une suite bornée superieurement est régulière*, parce que pour $r \gg 0$ la differentielle $d_r^{pq} : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1} = 0$ est nulle.
Analoguement on définit les suites spectrales *bornées inferieurement* et les suites spectrales *bornées.*

3.3. **Convergence au colimite ou au limite: convergence conditionnelle.** Le diagramme fondamental rélie la limite de la suite spectrale E_∞^p aux gradués p-ièmes des groupes D^∞ et $D^{-\infty}$, rélation qui dévient plus simple quand $RE_\infty^p = 0$. On va distinger maintenant entre les suites spectrales qui aboutent à la limite et les suites spectrales qui abouten à la colimite. Souvent, le choix de la limite ou la colimite se produit par l'annulation de $D^{-\infty}$ ou de D^∞. On utilisera la terminologie suivante.

Définition 3.3.1. *Soit E_r^p la suite spectrale associée à un couple exact.*

(i) *On dit qu'une suite spectrale est* conditionnellement convergente à la limite D^∞ *si* $D^{-\infty} = 0$.
(ii) *On dit qu'une spectrale est* conditionnellement convergente à la colimite $D^{-\infty}$ *si* $D^\infty = 0$ *i* $RD^\infty = 0$.

D'après la Proposition 3.1.1, la convergence conditionnelle assure des bonnes propriétées pour les filtrations des limites de la suite spectrale. Plus précisement, on a:

Proposition 3.3.2. *(1) Si la suite spectrale E_r^p est conditionnellement convergente à D^∞, alors la filtration F^pD^∞ est séparée, exhaustive et complète.*

(2) Si la suite spectrale est conditionnellement convergente a $D^{-\infty}$, alors la filtration $F^pD^{-\infty}$ est exhaustive et complète.

Preuve. D'apres la Proposition 3.1.1, il ne reste à prouver que la filtration $F^pD^{-\infty}$ est complète. On prend les limites $R\varprojlim_p$ des epimorphismes $D^p \longrightarrow F^pD^{-\infty}$, donc on trouve un epimorphisme $0 = RD^\infty \longrightarrow RF^\infty D^{-\infty}$, d'où découle le résultat. □

Dans la situation de (2), on peut pas assurer, en général, que la filtration $F^pD^{-\infty}$ soit séparée.

Cette dernière proposition jointe à la Proposition 3.2.2, impliquent le résultat suivant.

Théorème 3.3.3. *Soit E_r^p la suite spectrale d'un couple exact avec que $RE_\infty^p = 0$, pout tout p.*

(1) *Si la suite E_r^p est conditionnellement convergente au limite ($D^\infty = 0$), alors elle est fortament convergente a D^∞.*
(2) *Si $D^\infty = 0$ (en particulier si la suite est conditionnellement convergente au colimite), alors elle est faiblement convergente a $D^{-\infty}$.* □

Corollaire 3.3.4. *Soit E_r^p la suite spectrale d'un couple exact. Supposons que E_r^{pq} est une suite spectrale régulière.*

(1) *Si $D^{-\infty} = 0$, alors la suite spectrale est fortament convergente a D^∞.*
(2) *Si $D^\infty = 0$, alors la suite spectrale est faiblement convergente a $D^{-\infty}$.* □

Le point (2) du théorème précédent est un cas particulier d'un critère plus général, que se deduit aussi du diagramme fondamental, pour la convergence faible au colimite des suites spectrales avec $RE_\infty^p = 0$:

Proposition 3.3.5. *Soit E_r^p la suite spectrale d'un couple exact avec que $RE_\infty^p = 0$. Les assertions suivantes sont equivalentes:*

(i) *La suite spectrale est faiblement convergente a $D^{-\infty}$.*
(ii) *Les morphismes naturels $\eta^p : D^\infty \longrightarrow D^p$ sont injectifs pour tout p.*
(iii) *Les morphismes η^p induisent des isomorphismes $D^\infty \cong Q^p$, pour tout p.*

Preuve. (ii) i (iii) sont equivalents selon le Lemme 3.2.1(1), tandis que l'equivalence entre (i) et (iii) découle de la suite exacte inférieure du diagramme fondamental. □

Dans les deux sections qui suivent on va faire un étude plus détaillé de la convergence pour les suites spectrales définies sur un demiplan.

3.4. **Convergence de suites spectrales demiplanaires gauches.**

Dans cette section on analyse la convergence au colimite ou au limite pour les suites spectrales associées à un couple exact concentrées dans un demiplan à gauche, c'est-à-dire, tels que $E_r^{pq} = 0$ pour $p > a$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$ (pour simplifier les notations on va prendre $a = 0$). Nous les appelerons *suites spectrales demiplanaires gauches.* Dans cettes suites spectrales les différentielles qui sortent d'un point (p,q), d_r^{pq}, sont zero pour $r \gg 0$, parce que elles ont rang en dehors du demiplan où elles sont définies. Les résultats de cette section sont valables plus généralement pour les suites spectrales avec différentielles *sortint*, mais nous travaillerons sur les suites spectrales demiplanaires gauches pour simplifier l'exposition.

On départ d'un couple exact

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, equal, "\alpha"] & D^2 \arrow[rr, equal, "\alpha"] & & D^1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & & D^0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \cdots \\
& & 0 \arrow[ul, "\gamma"] & & E^0 \arrow[ul, "\gamma"] & &
\end{tikzcd}$$

avec $D^\infty = D^p$, $p > 0$. On a, trivialement,

Lemme 3.4.1. *$RD^\infty = 0$ et $RE^p_\infty = 0$, pour tout p.* □

Théorème 3.4.2. *Soit E_r^{pq} une suite spectrale demiplanaire gauche.*

(1) *Si E_r^{pq} est conditionnellement convergente à $D^{-\infty}$, alors la suite spectrale est fortement convergente à $D^{-\infty}$.*
(2) *Si E_r^{pq} est conditionnellement convergente à D^∞, alors la suite spectral est fortement convergente à D^∞.*

Preuve. Par le lemme précédent on a $RE^p_\infty = 0$, donc (2) suit immediatement du Théorème 3.3.3, tandis que pour (1) il suffit voir, d'apres la Proposition 3.3.2, que la filtration $F^pD^{-\infty}$ est séparée, ce que dans ce cas est évident parce que $F^1D^{-\infty} = 0$. □

3.5. **Convergence pour les suites spectrales demiplanaires droites.**

On considere maintenant les suites spectrales avec $E_r^{pq} = 0$ pour $p < 0$. On départ d'un couple exact

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\alpha"] & D^1 \arrow[rr, "\alpha"] & & D^0 \arrow[dl, "\beta"] \arrow[rr, equal, "\alpha"] & & D^{-1} \arrow[dl, "\beta"] \arrow[r, equal, "\alpha"] & \cdots \\
& & E^0 \arrow[ul, "\gamma"] & & 0 \arrow[ul, "\gamma"] & &
\end{tikzcd}$$

avec $D^p = D^{-\infty}$, $p \leq 0$; la suite spectrale associée est une *suite spectrale demiplanaire droite*. Les différentielles de cettes suites spectrales sont des morphismes *entrants* dans le sense que les morphismes qui arrivent à un point (p,q) sont finis, parce que pour $r \gg 0$ la differentielle d_r a origine en dehors du demiplan du support de la suite spectrale.

Au contraire des suites spectrales demiplanaires gauches, on n'a pas un résultat général d'anulation du groupe RE^p_∞ pour les suites spectrales demiplanaires droites. Les critères que suivent caractérisen la convergence en fonction de cette annulation. On étudie séparement la convergence au colimite de celle de la limite.

Théorème 3.5.1. *Supposons que E_r^{pq} est conditionnellement convergente à $D^{-\infty}$. Alors, sont équivalentes:*

(i) *$RE^p_\infty = 0$, pour tout p,*
(ii) *la suite spectrale est fortement convergente à $D^{-\infty}$.*

Preuve. (i) ⇒ (ii). Par les Propositions 3.1.1 et 3.3.2, il suffit prouver que la filtration $F^pD^{-\infty}$ est séparée. Mais, étant une suite demiplanaire droite on a un isomorphisme $F^\infty D^{-\infty} \cong Q^0$, tandis que de l'hypothèse $RE^p_\infty = 0$ on en déduit, par le Lemme 3.2.1, que le morphisme $0 = D^\infty \longrightarrow Q^0$ est un epimorphisme. Ainsi, on a que $F^\infty D^{-\infty} \cong Q^0 = D^\infty = 0$.

(ii) ⇒ (i). Si la suite spectrale est convergente au colimite, les morphismes $Q^{p+1} \longrightarrow Q^p$ sont des monomorphismes. Si la convergence est forte, la filtration de $D^{-\infty}$ est séparée, c'est-à-dire, $F^\infty D^{-\infty} \cong Q^0 = 0$, donc $Q^p = 0$ pour tout p. Alors, il s'ensuit du diagramme fondamental que $RE^p_\infty = 0$. □

Remarque 3.5.2. On peut établire une version plus précise du Théorème 3.5.1 que nous laissons en exercice: soit E_r^{pq} une suite spectrale demiplanaire droite. Deux quelconques des conditions suivantes impliquent la troissième:

(i) $RE_\infty = 0$,
(ii) la suite spectrale est fortement convergente à $D^{-\infty}$.
(iii) la suite spectrale est conditionnellement convergente à $D^{-\infty}$.

Théorème 3.5.3. *Soit E_r^{pq} une suite spectrale demiplanaire droite conditionnellement convergente à D^∞. Alors sont équivalentes:*

(i) $RE_\infty^p = 0$, *pour tout p,*
(ii) $RD^\infty = 0$ *et la suite spectrale est fortement convergente à D^∞.*

Preuve. Puisque $D^{-\infty} = 0$, le diagramme fondamental se réduit au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Gr_F^p D^\infty \arrow[r] \arrow[d] & I^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & I^p \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\ 0 \arrow[r] & E_\infty^p \arrow[r] & Q^{p+1} \arrow[r] & Q^p \arrow[r] & RE_\infty^p \arrow[r] & RQ^{p+1} \arrow[r] & RQ^p \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En outre, remarquons qu'on a $Q^0 = RQ^0 = 0$, parce que $D^p = 0$ pour $p < 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $RE_\infty = 0$, du Lemme 3.2.1 il suit que $RD^\infty = RQ^p = RQ^0 = 0$ et $I^p = Q^p$. Donc le diagramme donne la convergence a D^∞, que est forte par la Proposition 3.1.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $RD^\infty = 0$ et que la suite spectrale est convergente a D^∞. Puisque $Q^0 = 0$, le diagramme fondamental permet de prouver par induction que $I^p = Q^p$. Mais, $RQ^p = 0$, par 6.4.5, donc on a $RE^\infty = 0$. $\square$

4. Suite spectrale d'un complexe filtré

4.1. **Préliminaires.**

Nous commençons par quelques rappels sur les complexes de cochaînes pour fixer les notations, ce que nous sera utile dans ce qui suit.

4.1.1. Un complexe (de cochaînes) K^* de groupes abéliens est une suite de groupes abéliens et morphismes

$$\dots \longrightarrow K^p \xrightarrow{\partial} K^{p+1} \longrightarrow \dots, \qquad p \in \mathbb{Z},$$

avec $\partial^2 = 0$. On n'impose pas de limitation de longuer du complexe. On dit que le complexe K^* est *borné inférieurement* (respectivement, *positif*) si $K^p =$ pour $p \ll 0$, (respectivement, $p < 0$). De la même manière, on définit les complexes bornés supérieurement et les complexes negatifs. Pour simplifier les notations, on écrira parfois K pour K^*.

Un morphisme de complexes $f : K^* \longrightarrow L^*$ est une suite de morphismes de groupes abéliens $f^n : K^n \longrightarrow L^n$ tel que $\partial f^n = f^{n+1}\partial$. Nous notons $\mathbf{C}^*(\mathbb{Z})$ (respectivement, par $\mathbf{C}^+(\mathbb{Z})$) la catégorie des complexes de groupes abéliens, (respectivement, la catégorie des complexes positifs de groupes abéliens).

On dit qu'un morphisme $f : K^* \longrightarrow L^*$ est un *quasi-isomorphisme* si le morphisme induit sur la cohomologie $f : H^*(K) \longrightarrow H^*(L)$ est un isomorphisme.

Si K^* est un complexe et n un entier, on dénote par $K^*[n]$ le complexe $K[n]^p = K^{n+p}$ avec différentielle $\partial^p_{K[n]} = (-1)^p \partial^{n+p}_K$.

4.1.2. Soit K un complexe. Une filtration décroissante F de K est une suite de sous-complexes

$$\cdots \subseteq F^{p+1}K \subseteq F^pK \subseteq \cdots \subseteq K, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, une filtration induit des filtrations sur chaque groupe K^n

$$\cdots \subseteq F^{p+1}K^n \subseteq F^pK^n \subseteq \cdots \subseteq K^n, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

Si K est un complexe, on définit la *filtration bête* $\sigma_{\geq n}$ par

$$(\sigma_{\geq n}K)^p = \begin{cases} 0, & p < n, \\ K^p, & p \geq n, \end{cases}$$

et la *filtration canonique* $\tau_{\leq n}$ par

$$(\tau_{\leq n}K)^p = \begin{cases} K^p, & p < n, \\ \ker \partial^p, & p = n. \\ 0, & p > n. \end{cases}$$

Remarquons que la filtration $\tau_{\leq n}K$ est croissante. C'est-à-dire, que les filtrations sont déterminées par les sous-complexes

$$\begin{array}{ll} \sigma_{\geq n}K & \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K^n \longrightarrow K^{n+1} \longrightarrow \ldots \\ \tau_{\leq n}K & \ldots \longrightarrow K^{n-1} \longrightarrow \ker \partial^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \end{array}$$

Nous considérerons aussi les complexes quotients (que nous appellerons *cofiltrations quocient*):

$$\begin{array}{ll} \sigma_{\leq n}K & \ldots \longrightarrow K^{n-1} \longrightarrow K^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \\ \tau_{\geq n}K & \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{coker} \partial^{n-1} \longrightarrow K^{n+1} \longrightarrow \ldots \end{array}$$

Dans ce cas, on a des morphismes de projection $K \longrightarrow \sigma_{\leq n}K$ et $K \longrightarrow \tau_{\geq n}K$.

Il est immédiat de prouver qu'on a

$$H^p(\tau_{\leq n}K) = \begin{cases} H^p(K), & p \leq n, \\ 0, & p > n. \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la cofiltration $\tau_{\geq n}K$.

4.1.3. Si K et L sont deux complexes, le complexe $\mathbf{Hom}(K,L)$ est constitué des groupes

$$\mathbf{Hom}(K,L)^n = \prod_{p+q=n} \operatorname{Hom}(K^{-p},L^q) = \prod_k \operatorname{Hom}(K^k,L^{n+k}),$$

avec différentielle définie par

$$\partial(f) = \partial_L^{k+n} f^k + (-1)^{n+1} f^{k+1} \partial_K^k.$$

On remarque que les 0-cycles de ce complexe sont les morphismes de complexes au sens ordinaire, $Z^0(\mathbf{Hom}(K,L)) = \mathrm{Hom}(K,L)$, tandis que le 0-groupe de cohomologie $H^0(\mathbf{Hom}(K,L))$ est le groupe des classes d'homotopie de morphismes de complexes et, plus généralement, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a

$$[K,L[i]] = H^i(\mathbf{Hom}(K,L)).$$

4.1.4. Dans la catégorie de complexes $\mathbf{C}^*(\mathbb{Z})$ il existe les limits et les colimits de tours de complexes, qui se calculent sur chaque degré. Par exemple, soit

$$\ldots \longrightarrow K_n^* \longrightarrow K_{n-1}^* \longrightarrow \ldots$$

une tour de complexes de groupes abéliens. Pour chaque p, soit $K^p = \varprojlim_n K_n^p$ le groupe limite, voir 6.3. Par la fonctorialité du foncteur limite, on a un complexe

$$\ldots \longrightarrow K^p \longrightarrow K^{p+1} \longrightarrow \ldots$$

qui est la limite de la tour initiale. Par exemple, on trouve que

$$K = \varinjlim_n \sigma_{\geq n} K, \qquad \text{ou} \qquad K = \varprojlim_n \sigma_{\leq n} K.$$

Nous dirons qu'une tour de complexes, comme définie précédemment, vérifie la condition de Mittag-Leffler si pour chaque p la tour de groupes abéliens

$$\ldots \longrightarrow K_n^p \longrightarrow K_{n-1}^p \longrightarrow \ldots$$

vérifie la condition de Mittag-Leffler, (voir Remarque 6.4.4). Par exemple, la tour définie par les cofiltrations bêtes

$$\ldots \longrightarrow \sigma_{\leq n+1} K \longrightarrow \sigma_{\leq n} K \longrightarrow \ldots$$

vérifie la condition de Mittag-Leffler.

4.2. **Suite spectrale d'un complexe filtré.**

Soit (K,F) un complexe filtré de groupes abéliens. Donc F corresponde à une suite de sous-complexes

$$\cdots \subseteq F^{p+1} K \subseteq F^p K \subseteq \cdots \subseteq K, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

Les suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes de complexes

$$0 \longrightarrow F^{p+1} K \longrightarrow F^p K \longrightarrow F^p K / F^{p+1} K \longrightarrow 0,$$

définissent un couple (bigradué) exact

$$\begin{tikzcd} H^{p+q}(F^{p+1}K) \arrow[rr, "\alpha"] & & H^{p+q}(F^pK) \arrow[dl, "\beta"] \\ & H^{p+q}(F^pK/F^{p+1}K) \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

avec $D^{pq} = H^{p+q}(F^p K)$ et $E^{pq} = H^{p+q}(F^p K / F^{p+1} K)$, où γ est définit par le morphisme de connexion. Les morphismes α,β,γ ont bidegrés (1,0),(0,0), et (0,1), respectivement.

Définition 4.2.1. *On appelle suite spectrale associée au complexe filtré (K,F) la suite spectrale associée au couple exact antérieur.*

En tenant compte des bidegrés des morphismes du couple exact, la différentielle de la suite spectrale a le bidegré $(r,1-r)$, c'est-à-dire, $d_r : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$.

La suite spectrale d'un complexe filtré (K,F) est toujours liée à la cohomologie du complexe K; plus précisement, on a:

Proposition 4.2.2. *Soit (K,F) un complexe filtré. Si la filtration F est exhaustive, séparée et complète, alors la suite spectrale associée est conditionnellement convergente à $H^n(K)$.*

Preuve. On doit prouver que $D^{-\infty} = H(K)$ et que $D^{\infty} = RD^{\infty} = 0$. Par l'exactitude de la colimite d'une tour et l'exhaustivité de la filtration on a

$$D^{-\infty} = \varinjlim_p H(F^pK) \cong H(\varinjlim F^pK) = H(K).$$

D'autre part, comme la filtration est séparée et complète, on a un isomorphisme

$$1 - \alpha : \prod_p F^pK \longrightarrow \prod_p F^pK,$$

donc par passage à la cohomologie, qui respecte les produits dans la catégorie des groupes abéliens, on trouve un isomorphisme

$$1 - \alpha^* : \prod_p H(F^pK) \longrightarrow \prod_p H(F^pK),$$

et, en conséquence, $D^{\infty} = RD^{\infty} = 0$. □

Ainsi, d'après le Théorème 3.3.3 on trouve le résultat général de convergence suivant.

Théorème 4.2.3. *Soit (K,F) un complexe filtré, tel que la filtration F est exhaustive, séparée et complète, et supposons qu'on a $RE_\infty = 0$. Alors, la suite spectrale associée*

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pK/F^{p+1}K) \Rightarrow H^n(K).$$

est faiblement convergente. □

Selon la Proposition 3.3.2, la filtration induite sur la cohomologie $H^n(K)$ est exhaustive et complète. Donc, dans les cas où elle est séparée on pourra assurer la convergence forte de la suite spectrale du théorème antérieur. Le cas le plus simple correspond aux filtrations discrètes (aussi appelées filtrations bornées superieurement): on dit qu'une filtration F d'un complexe K est *discrète* si pour chaque n on a $F^pK^n = 0$ pour $p \gg 0$. Il est clair qu'une filtration discrète est séparée et complète.

Corollaire 4.2.4. *Soit (K,F) un complexe filtré, tel que la filtration F soit exhaustive et discrète. Alors la suite spectrale associée est fortement convergente à $H^n(K)$.*

Preuve. La suite spectrale associée est bornée supérieurement, c'est-à-dire, qu'on a

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pK/F^{p+1}K) = 0, \quad \text{pour } p \gg 0.$$

Donc, elle est régulière et $RE_\infty^p = 0$. D'après le Théorème 4.2.3 il ne reste qu'à prouver que la filtration induite sur $H^n(K)$ est séparée. Mais ceci est évident, parce que $F^pH^n(K) = \mathrm{im}(H^n(F^pK) \longrightarrow H^n(K)) = 0$, pour $p \gg 0$. $\square$

De manière duale, on définit les filtrations *codiscrètes ou bornées inférieurement*, celles avec $F^pK^n = K^n$, pour $p \ll 0$. Ces filtrations n'induisent pas nécessairement des filtrations séparées sur la cohomologie. Néamoins on a le résultat suivant (où nous supposons que la borne inférieure est uniforme pour tous les K^n pour faire référence au théorème des suites demiplanaires; cette condition n'étant pas necessaire).

Corollaire 4.2.5. *Soit (K,F) un complexe filtré, tel que la filtration F soit séparée, complète et tel que $F^pK = K$ pour $p \leq 0$. Alors la suite spectrale associée est fortement convergente à $H^n(K)$ si, et seulement si, $RE_\infty^p = 0$.*

Preuve. En effet, l'hypothèse $F^pK = K$ pour $p \leq 0$ implique que la suite spectrale associée est demiplanaire droite, donc le résultat s'ensuit du Théorème 3.5.1. $\square$

Remarque 4.2.6. Souvent les filtrations d'un complexe K qui apparaissent sont finies sur chaque degré et par conséquent les filtrations induites sur $H^n(K)$ sont aussi finies. Dans ce cas, la suite spectrale est birégulière et, en particulier, elle est fortement convergente à $H^n(K)$. En plus, la convergence s'atteint dans un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire, que pour tout couple (p,q) il y a un r avec $E_r^{pq} = E_\infty^{pq}$.

Remarque 4.2.7. Les résultats antérieurs s'appliquent aux complexes filtrés (K,F) avec filtrations F exhaustives, séparées et complètes. Dans les cas généraux où on ne suppose pas qu'on vérifie ces conditions, la convergence de la suite spectrale vers un groupe associé à K. Par exemple, si la filtration n'est pas exhaustive, les résultats s'appliquent au complexe $K' = F^{-\infty}K = \cup_p F^pK$.

Considérons maintenant des filtrations qui ne sont pas séparées ou complètes; alors la suite spectrale converge à la cohomologie du complexe complété $\hat{K}$. Plus précisement, soit $\hat{K}$ le complexe filtré

$$\hat{K} = \varprojlim_s K/F^sK, \quad \hat{F}^p\hat{K} = \varprojlim_s F^pK/F^sK.$$

On dit que $(\hat{K},\hat{F})$ est le *complexe complété* associé à (K,F). Les morphismes $K \longrightarrow K/F^sK$ induisent un morphisme filtré $(K,F) \longrightarrow (\hat{K},\hat{F})$.

Lemme 4.2.8. *Le complexe completé $(\hat{K},\hat{F})$ a les proprietés suivantes.*

(1) *La filtration $\hat{F}$ est séparée et complète.*
(2) *On a des isomorphismes*

$$F^p/F^q \cong \hat{F}^p/\hat{F}^q, \qquad K/F^p \cong \hat{K}/\hat{F}^p.$$

(3) *On a $K/F^{-\infty} \cong \hat{K}/\hat{F}^{-\infty}$; en particulier, la filtration $\hat{F}$ est exhaustive si, et seulement si, la filtration F est exhaustive.*

Preuve. Pour $s > p$ on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow F^p/F^s \longrightarrow K/F^s \longrightarrow K/F^p \longrightarrow 0,$$

et, comme $R\varprojlim_s F^p/F^s = 0$ par 6.3.7, en prenant la limite $\varprojlim_s$ on trouve la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{F}^p \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow K/F^p \longrightarrow 0.$$

Ainsi (2) découle aisement de cette suite. Pour déduire (1), prenons la limite de cette suite sur p pour obtenir la suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim_p \hat{F}^p \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow \varprojlim_p K/F^p \longrightarrow R\varprojlim_p \hat{F}^p \longrightarrow 0,$$

d'où il résulte que $\varprojlim_p \hat{F}^p = 0$ et $R\varprojlim_p \hat{F}^p = 0$, donc que $\hat{F}$ est complète et séparée.

Pour déduire (3) on raisonne avec la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{F}^{-\infty} \longrightarrow \hat{K} \longrightarrow K/F^{-\infty} \longrightarrow 0. \qquad \square$$

D'après ce lemme, la suite spectrale associée au complexe completé $(\widehat{K},\widehat{F})$ est la même que la suite spectrale associée au complexe (K,F), donc la Proposition 4.2.2 et le Théorème 4.2.3 donnent le résultat suivant.

Corollaire 4.2.9. *Soit (K,F) un complexe filtré, avec F une filtration exhaustive. Alors la suite spectrale associée*

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pK/F^{p+1}K) \Rightarrow H^n(\hat{K}),$$

est conditionnellement convergente à $H^n(\hat{K})$. Si, en plus, on a $RE_\infty^p = 0$, cette suite spectrale est faiblement convergente. $\square$

4.3. **Une autre présentation de la suite spectrale d'un complexe filtré.**

Bien que nous n'aurons pas besoin de la présentation classique de la suite spectrale associée à un compexe filtré, on consacre ce paragraphe à la rappeler, (cf. par exemple [G]).

Soit (K,F) un complexe filtré. Si $n = p + q$, on définit les groupes de cycles rélatifs par

$$\begin{aligned} A_r^{pq} &= F^pK^n \cap d^{-1}F^{p+r}K^{n+1} \\ &= \ker(d : F^pK^n \longrightarrow F^pK^{n+1}/F^{p+r}K^{n+1}), \end{aligned}$$

donc les éléments de A_r^{pq} sont des éléments de poids p qui ont différentielle de poids $p + r$, et les cycles absolus par

$$A_\infty^{pq} = F^pK^n \cap \ker d = \ker(d : F^pK^n \longrightarrow F^pK^{n+1}).$$

Pour ce qui respecte aux bords, on définit les groupes

$$\begin{aligned} B_r^{pq} &= F^pK^n \cap dF^{p-r}K^{n-1} = \mathrm{im}(d : F^{p-r}K^{n-1} \longrightarrow F^pK^n), \\ B_\infty^{pq} &= F^pK^n \cap \mathrm{im} d = \mathrm{im}(d : F^pK^{n-1} \longrightarrow F^pK^n). \end{aligned}$$

Il est clair que $B_r^{pq} \subseteq A_r^{pq}$ et que

$$dA_r^{p-r,q+r-1} = d(F^{p-r}K^{n-1} \longrightarrow d^{-1}F^pK^n) = dF^{p-r}K^{n-1} \cap F^pK^n = B_r^{pq}.$$

La différentielle du complexe K induit des morphismes $d : A_r^{pq} \longrightarrow A_r^{p+r,q-r+1}$. Soit

$$E_r^{pq} = A_r^{pq}/(A_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{pq}).$$

La differentielle induit aussi des morphismes $d : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ avec $d^2 = 0$. Cette assertion découle de la comprovation suivante

$$\begin{aligned} d(A_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{pq}) &= dA_{r-1}^{p+1,q-1} + dB_{r-1}^{pq} \\ &= B_{r-1}^{p++r1,q-r} + 0 \\ &\subseteq A_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}. \end{aligned}$$

Théorème 4.3.1. *Soit* (K,F) *un complexe filtré. Les groupes* E_r^{pq} *et les différentielles définies auparavant, déterminent une suite spectrale qui coïncide avec la suite spectrale associée au complexe filtré* (K,F).

Preuve. Nous allons prouver que

$$\gamma^{-1}(\mathrm{im}\alpha^{r-1})/\beta(\ker \alpha^{r-1}) \cong A_r^{pq}/(A_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{pq}),$$

où, par le Théorème 2.3.5, le quotient de gauche définit la suite spectrale associée au complexe filtré (K,F), ce qui sera suffisant parce que dans les deux cas les différentielles sont induites par la differentielle de K.

Examinons le groupe $\gamma^{-1}(\mathrm{im}\alpha^{r-1})$,

$$\begin{aligned} z = [x + F^{p+1}] \in \gamma^{-1}(\mathrm{im}\alpha^{r-1}) &\Leftrightarrow [d(x)] \in \mathrm{im}\ \alpha^{r-1} \\ &\Leftrightarrow [d(x)] \in F^{p+r}K^n \\ &\Leftrightarrow x \in F^pK^n \cap d^{-1}F^{p+r} \Leftrightarrow x \in A_r^{pq}/F^{p+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, $x \in \ker \alpha^{r-1} \Leftrightarrow x \in F^p \cap dF^{p-r+1} = B_r^{pq}$, donc on a

$$\beta(\ker \alpha^{r-1}) = B_{r-1}^{pq}/F^{p+1}K^n.$$

Ainsi on trouve,

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\mathrm{im}\alpha^{r-1})/\beta(\ker \alpha^{r-1}) &= \left(A_r^{pq}/F^{p+1}\right) / \left(B_{r-1}^{pq}/F^{p+1}K^n\right) \\ &= \left(A_r^{pq}/F^{p+1}\right) / \left((B_{r-1}^{pq} + A_{r-1}^{p+1,q-1})/F^{p+1}K^n\right) \\ &= A_r^{pq}/(A_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{pq}), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

4.4. **Bicomplexes.**

La plupart des complexes filtrés qui apparaissent dans les applicactions ont leur origine dans un bicomplexe (ou complexe double). Dans cette section nous présentons les bicomplexes et les suites spectrales auxquelles ils donent lieu.

4.4.1. *Les suites spectrales associées à un bicomplexe.*

Un *bicomplexe* est un groupe bigradué K^{**} avec deux morphismes d',d'' de bidegrés (1,0),(0,1), réspectivement, tels que

$$d'd' = 0, \quad d''d'' = 0, \quad d'd'' + d''d' = 0.$$

On peut déployer un bicomplexe sur le plan

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[u] & \arrow[u] & \\
\arrow[r] & K^{p,q+1} \arrow[r, "d'"] \arrow[u] & K^{p+1,q+1} \arrow[r] \arrow[u] & {} \\
\arrow[r] & K^{pq} \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "d''"] & K^{p+1,q} \arrow[r] \arrow[u, "d''"] & {} \\
 & \arrow[u] & \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Définition 4.4.1. *Le complexe total* $\operatorname{Tot} K$ *associé au bicomplexe* K^{**} *est le complexe défini par*

$$(\operatorname{Tot} K)^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{pq},$$

avec differentielle $d = d' + d''$.

Il est clair que les proprietées de d',d'' impliquent que d définit une différentielle sur $\operatorname{Tot} K$.

Le complexe total d'un bicomplexe a deux filtrations canoniquement associées:

$$\begin{aligned} F_I^p(\operatorname{Tot} K)^n &= \bigoplus_{r \geq p} K^{r,n-r}, \\ F_{I\!I}^p(\operatorname{Tot} K)^n &= \bigoplus_{r \geq p} K^{n-r,r}. \end{aligned}$$

On dit que la première filtration F_I est induite par les colonnes: si $\sigma'_{\geq p} K$ est la filtration bête sur l'indice p, c'est-à-dire, le bicomplexe définit par

$$(\sigma'_{\geq p} K)^{rs} = \begin{cases} K^{rs}, & \text{si } r \geq p, \\ 0, & \text{si } r < p, \end{cases}$$

alors on a que $F_I^p(\operatorname{Tot} K)^n = (\operatorname{Tot} \sigma'_{\geq p} K)^n$. De même on définit la filtration bête sur l'indice q, $\sigma''_{\geq q} K$, et on a $F_{I\!I}^q(\operatorname{Tot} K)^n = (\operatorname{Tot} \sigma''_{\geq q} K)^n$, donc $F_{I\!I}$ est la filtration induite par les files.

Chacune de ces filtrations de $\operatorname{Tot} K$ induit une suite spectrale. Nous dénotons par I_2^{pq} et $I\!I_2^{pq}$ les termes E_2^{pq} de ces suites. La proposition qui suit permet identifier les groupes I_2^{pq},$I\!I_2^{pq}$. Pour l'énoncer on va utiliser la notation suivante: si on fixe l'indice q, alors (K^{*q}, d') est un complexe, et on appellera cohomologie horizontale de K à la cohomologie de ce complexe, c'est-à-dire,

$H_h^{pq}(K) = H^p(K^{*q})$ (ou $H_h^p(K)$ si l'indice q est bien detérminé par le contexte). Analoguement on définit la cohomologie verticale $H_v^{pq}(K) = H^q(K^{p*})$.

Proposition 4.4.2. *Soit K^{**} un bicomplexe. Les suites spectrales des filtrations F_I,$F_{I\!I}$ du complexe* $\operatorname{Tot} K$ *satisfont*

$$I_2^{pq} = H_h^p H_v^q(K), \quad I\!I_2^{pq} = H_v^p H_h^q(K).$$

Preuve. Il suffit de prouver le résultat pour F_I, parce que l'égalité pour la suite spectrale de la filtration $F_{I\!I}$ se déduit de celle-ci changeant le rôle de p et q.

Par définition de la suite spectrale associée à un complexe filtré, on a

$$I_1^{pq} = H^{p+q}(F_I^p \operatorname{Tot} K / F_I^{p+1} \operatorname{Tot} K) = H_v^q(K^{p*}),$$

où la seconde égalité découle de l'identification du gradué de la filtration F_I et de l'identification de la differentielle induite

$$d'' : K^{pq} = (F_I^p \operatorname{Tot} K)^n / (F_I^{p+1} \operatorname{Tot} K)^n \longrightarrow K^{p,q+1},$$

où $n = p + q$. Pour conclure, il suffit de remarquer que les différentielles

$$I_1^{pq} = H_v^q(K^{p*}) \longrightarrow I_1^{p+1,q} = H_v^q(K^{p+1,*})$$

sont induites par les différentielles horizontales d', donc $I_2^{pq} = H_h^p H_v^q(K)$. $\square$

4.4.2. *Convergence des suites spectrales des bicomplexes.*

Soit K un bicomplexe. Il est claire que les filtrations F_I,$F_{I\!I}$ de $\operatorname{Tot} K$ sont séparées et exhaustives, mais elles ne sont pas, en général, complètes. Ainsi, d'après le Corollaire 4.2.9 on a convergence des suites spectrales associées à un bicomplexe vers les complétés de $\operatorname{Tot} K$ par ces filtrations. Analysons la convergence en distinguant les complétés pour ces deux filtrations.

4.4.3. On commence par la filtration F_I. On peut calculer aisement le complexe complété $\widehat{\operatorname{Tot} K}$ pour la filtration F_I. En effet, on a

$$(\widehat{\operatorname{Tot} K})^n = \varprojlim_p (\operatorname{Tot} K)^n / F_I^p (\operatorname{Tot} K)^n = \varprojlim_p \bigoplus_{r<p} K^{r,n-r}.$$

Ainsi, si $\operatorname{Tot}^\times K$ est le *complexe total multiplicatif* associé à K, complexe défini par

$$(\operatorname{Tot}^\times K)^n = \prod_{p+q=n} K^{pq},$$

avec differentielle $d = d' + d''$, alors le complété $\widehat{\operatorname{Tot} K}$ respecte de la filtration F_I est le sous-complexe de $\operatorname{Tot}^\times K$ des éléments $x \in \operatorname{Tot}^\times K$ tels que $x_{pq} = 0$ pour $p \ll 0$.

Remarquons deux cas particuliers qui permetent une meilleure identification du complété $\widehat{\operatorname{Tot}}$.

(a) Cas $\widehat{\operatorname{Tot}} = \operatorname{Tot}$. Supposons que le bicomplexe est zero dans le quatrième quadrant, (ou, plus généralement, supposons que le bicomplexe K est nulle sur une région R du plan tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il y a un p_0 avec $\{(p,q) \mid p + q = n, p \geq p_0\} \subset R$). Alors, $\widehat{\operatorname{Tot} K} = \operatorname{Tot} K$, donc le complexe total $\operatorname{Tot} K$ est déjà complet pour la filtration F_I.

D'après la Proposition 4.2.2, la suite spectrale I_2^{pq} est conditionnellement convergente à $H^n(\operatorname{Tot} K)$. Plus encore, la filtration F_I est discrète, parce que pour tout n, $F_I^p(\operatorname{Tot} K)^n = \oplus_{r\geq p} K^{r.n-r} = 0$ pour $p \gg 0$. Ainsi, il s'ensuit du Corollaire 4.2.4 que la suite spectrale

$$I_2^{pq} = H_h^p H_v^q(K) \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot} K).$$

est fortement convergente.

En particulier, on peut assurer la convergence forte dans les cas suivants:

- K est du premier quadrant ou du quatrième quadrant.
- K est demiplanaire gauche: il y a un entier p_0 tel que $K^{pq} = 0$ si $p > p_0$.
- K est demiplanaire superieur: il y a un entier q_0 tel que $K^{pq} = 0$ si $q < q_0$.

(b) Cas $\widehat{\operatorname{Tot}} = \operatorname{Tot}^\times$. Supposons que le bicomplexe est zéro dans le deuxième quadrant. Alors, le complété pour la filtration F_I est $\widehat{\operatorname{Tot} K} = \operatorname{Tot}^\times K$, donc on obtient une suite spectrale conditionnellement convergente

$$I_2^{pq} = H_h^p H_v^q(K) \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}^\times K).$$

D'après le Corollaire 4.2.5, cette suite spectrale est fortement convergente si, et seulement si, $RE_\infty^{pq} = 0$.

4.4.4. Considérons maintenant la seconde filtration $F_{I\!I}$. Changeant le rôle de p et q, on est dans la situation de la filtration par colonnes. De fait, raisonnant comme auparavant on trouve que le complété $\widehat{\operatorname{Tot} K}$ du complexe $\operatorname{Tot} K$ pour la filtration $F_{I\!I}$ est le sous-complexe de $\operatorname{Tot}^\times K$ des éléments $x \in \operatorname{Tot}^\times K$ tels que $x_{pq} = 0$ pour $p \gg 0$ (ou, ce qu'est équivalent $q = n - p \ll 0$).

(c) Cas $\widehat{\operatorname{Tot}} = \operatorname{Tot}$. Supposons que le bicomplexe est zéro dans le deuxième quadrant. Alors, $\widehat{\operatorname{Tot} K} = \operatorname{Tot} K$.

D'après la Proposition 4.2.2, la suite spectrale $I\!I_2^{pq}$ est conditionnellement convergente à $H^n(\operatorname{Tot} K)$. Plus encore, la filtration $F_{I\!I}$ est discrète, parce que pour tout n, $F_{I\!I}^p(\operatorname{Tot} K)^n = \oplus_{r\geq p} K^{n-r,r} = 0$ pour $p \gg 0$. Ainsi, il s'en suit du Corollaire 4.2.4 que la suite spectrale

$$I\!I_2^{pq} = H_v^p H_h^q(K) \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot} K),$$

est fortement convergente.

En particulier, on peut assurer la convergence forte dans les cas suivants:

- K est du premier quadrant ou du quatrième quadrant.
- K est demiplanaire droite: il y a un entier p_0 tel que $K^{pq} = 0$ si $p < p_0$.
- K est demiplanaire inférieure: il y a un entier q_0 tel que $K^{pq} = 0$ si $q > q_0$.

(d) Cas $\widehat{\operatorname{Tot}} = \operatorname{Tot}^\times$. Supposons finalement que le bicomplexe est zéro dans le quatrième quadrant. Alors, $\widehat{\operatorname{Tot} K} = \operatorname{Tot}^\times K$. D'après le Corollaire 4.2.5, la suite spectrale

$$I\!I_2^{pq} = H_v^p H_h^q(K) \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}^\times K),$$

est fortement convergente si, et seulement si, $RE_\infty^{pq} = 0$.

4.4.5. Remarquons quelques cas où les deux suites spectrales sont birégulières et fortement convergentes à la cohomologie de $\operatorname{Tot} K$:

- K est du premier ou quatrième quadrant.
- K est un complexe bande verticale: il y deux entiers p_0,p_1 tel que $K^{pq} = 0$ si $p < p_0$ ou $p > p_1$.
- K est un complexe bande horizontale: il y a deux entiers q_0,q_1 tels que $K^{pq} = 0$ si $q < q_0$ ou $q > q_1$.

On remarque que bien que dans ces cas les deux suites spectrales convergent à la cohomologie de $\operatorname{Tot} K$, les filtrations de $H^*(\operatorname{Tot} K)$ associées sont différentes.

4.4.3. *Application: cohomologie de la limite d'une tour de complexes.*

À titre d'exercice, et par son utilisation postérieure, on va appliquer les suites spectrales d'un bicomplexe pour déduire la relation entre la cohomologie de la limite d'une tour de complexes de groupes abéliens et la limite de la tour de ces cohomologies. Soit $\ldots \longrightarrow K_n^* \longrightarrow K_{n-1}^* \longrightarrow \ldots$ une tour de morphismes de complexes de groupes abéliens, et $K^* = \varprojlim_n K_n^*$ le complexe limite. Considérons le bicomplexe

$$D^{pq} = \begin{cases} \prod_{n\geq 0} K_n^p, & q = 0,1, \\ 0, & \text{autrement}, \end{cases}$$

avec différentielles $d' = \prod d_n$ et $d'' = 1-\alpha$. On obtient donc un bicomplexe "bande horizontale"

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
{} \arrow[r] & \prod_{n\geq 0} K_n^p \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \prod_{n\geq 0} K_n^p \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \prod_{n\geq 0} K_n^p \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & \prod_{n\geq 0} K_n^p \arrow[u, "1-\alpha"'] \arrow[r, "d"] & \prod_{n\geq 0} K_n^p \arrow[u, "1-\alpha"'] \arrow[r, "d"] & \prod_{n\geq 0} K_n^p \arrow[u, "1-\alpha"'] \arrow[r] & {} \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si $D^* = \operatorname{Tot} D^{**}$ on trouve deux suites spectrales fortement convergentes à la cohomologie de D^*. En identifiant les termes E_2 de ces suites, on peut écrire

$$\begin{aligned} I_2^{pq} &= H^p(R^q \varprojlim_n K_n^*) \Rightarrow H^n(D^*), \\ II_2^{pq} &= R^p \varprojlim_n H^q(K_n^*) \Rightarrow H^n(D^*). \end{aligned}$$

Par l'Exercice 2.2.11, la première suite spectrale se réduit à une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow H^n(\varprojlim_n K_n^*) \longrightarrow H^n(D^*) \longrightarrow H^{n-1}(R\varprojlim_n K_n^*) \longrightarrow H^{n+1}(\varprojlim_n K_n^*) \longrightarrow \ldots$$

tandis que la seconde se réduit a une suite exacte

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_n H^{n-1}(K_n^*) \longrightarrow H^n(D^*) \longrightarrow \varprojlim_n H^n(K_n^*) \longrightarrow 0.$$

Ces deux suites exactes expriment la relation entre $H^n(\varprojlim_n K_n^*)$ et $\varprojlim_n H^n(K_n^*)$. Cette relation est plus simple si la tour vérifie la condition de Mittag-Leffler.

Proposition 4.4.6. *Avec les notations antérieures, supposons que la tour K_n^* vérifie la condition de Mittag-Leffler. Alors, il y a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_p H^{n-1}(K_p^*) \longrightarrow H^n(\varprojlim_p K_p^*) \longrightarrow \varprojlim_p H^n(K_p^*) \longrightarrow 0.$$

Preuve. Par la condition de Mittag-Leffler on a $R\varprojlim_n K_n^* = 0$ donc, d'après la suite exacte longue, on a des isomorphismes $H^n(\varprojlim_n K_n^*) \cong H^n(D^*)$. Avec ces isomorphismes la seconde suite exacte donne la suite cherchée. □

4.4.7. Un complexe filtré (K,F) donne lieu à une tour qui vérifie la condition de Mittag-Leffler,

$$\ldots \longrightarrow K/F^{p+1} \longrightarrow K/F^p \longrightarrow \ldots$$

donc, d'après la proposition précédente, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_p H^{n-1}(K/F^p) \longrightarrow H^n(\hat{K}) \longrightarrow \varprojlim_p H^n(K/F^p) \longrightarrow 0.$$

Les termes $R\varprojlim_p H^{n-1}(K/F^p)$ et $\varprojlim_p H^n(K/F^p)$ de cette suite exacte peuvent s'identifier à l'aide de la filtration induite sur $H^n(\hat{K})$. On a

$$R\varprojlim_p H^{n-1}(K/F^p) = F^{-\infty}H^n(\hat{K}),$$
$$\varprojlim_p H^n(K/F^p) = H^n(\hat{K})/F^{-\infty}H^n(\hat{K}).$$

Prouvons ces isomorphismes. On commence par remarquer que $K/F^p = \hat{K}/\hat{F}^p$, par le Lemme 4.2.8. Considérons les suites exactes

$$0 \longrightarrow F^pH^n(\hat{K}) \longrightarrow H^n(\hat{K}) \longrightarrow H^n(\hat{K})/F^pH^n(\hat{K}) \longrightarrow 0.$$

Par la propiétée fondamentale de la limite, on aura une suite exacte

$$0 \longrightarrow F^{-\infty}H^n(\hat{K}) \longrightarrow H^n(\hat{K}) \longrightarrow \varprojlim_p H^n(\hat{K})/F^pH^n(\hat{K}) \longrightarrow R\varprojlim_p F^pH^n(\hat{K})$$

En particulier, on déduit qu'on a un monomorphisme

$$H^n(\hat{K})/F^{-\infty}H^n(\hat{K}) \hookrightarrow \varprojlim_p H^n(\hat{K})/F^pH^n(\hat{K})$$

Ainsi, $H^n(\hat{K})/F^{-\infty}H^n(\hat{K})$ est un sous-groupe de $\varprojlim H^n(\hat{K}/\hat{F}^p)$, parce que, pour tout p, on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow H^n(\hat{K})/F^pH^n(\hat{K}) \longrightarrow H^n(\hat{K}/\hat{F}^p)$$

et le foncteur limite est exact à gauche.

Par la proposition antérieure, la composition

$$H^n(\hat{K}) \longrightarrow H^n(\hat{K})/F^{-\infty}H^n(\hat{K}) \longrightarrow \varprojlim H^n(\hat{K}/\hat{F}^p)$$

est surjective, donc

$$H^n(\hat{K})/F^{-\infty}H^n(\hat{K}) = \varprojlim H^n(\hat{K}/\hat{F}^p),$$

et la suite exacte de la proposition idéntifie le terme $R\varprojlim_p H^{n-1}(\hat{K}/\hat{F}^p) = F^{-\infty}H^n(\hat{K})$.

4.4.8. On peut appliquer la Proposition 4.4.6 dans la situation suivante: soit K un bicomplexe de groupes abéliens et $\sigma'_{\leq p}K$ la cofiltration bête sur l'indice p. Alors on a une tour de complexes

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p+1}K \longrightarrow \mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}K \longrightarrow \ldots$$

avec morphismes de transition surjectifs, donc que vérifie la condition de Mittag-Leffler, et tel que $\mathrm{Tot}^{\times}K = \varprojlim_p \mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}K$. D'après la propostion précédente, on a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_n H^{n-1}(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}K) \longrightarrow H^n(\mathrm{Tot}^{\times}K) \longrightarrow \varprojlim_n H^n(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}K) \longrightarrow 0.$$

Cette suite exacte permet souvent compléter l'étude de la suite spectrale pour la filtration F_I quand K est zéro sur le deuxième quadrant (voir ci desus le cas (b)). En effet, la suite spectrale

$$I_2^{pq} = H_h^pH_v^q(K) \Rightarrow H^n(\mathrm{Tot}^{\times}K)$$

n'est pas necéssairement fortement convergente. Mais, selon la suite exacte qu'on vient de déduire, les groupes $H^n(\mathrm{Tot}^{\times}K)$ sont déterminés à partir des groupes $H^n(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}K)$, qui correspondent à des bicomplexes demiplanaires gauches pour lesquels la suite spectrale correspondante est fortement convergente, (situation (a) d'auparavant).

4.5. **Hypercohomologie et suite spectrale de Grothendieck.**

Dans cette section on va donner trois applications des suites spectrales associées aux bicomplexes: la définition de l'hypercohomologie d'un foncteur additif exact à gauche, la suite spectrale de Grothendieck d'un foncteur composé et l'hypercohomologie des complexes de faisceaux sur un espace topologique. On commence par étudier les résolutions de Cartan-Eilenberg des complexes.

4.5.1. *Résolutions de Cartan-Eilenberg.*

Dans les sections antérieures nous nous sommes placés dans la catégorie des groupes abéliens. Les résultats restent valables sur une catégorie abéliene convenable, contexte que nous conviens mieux pour les applicactions de cette section. Dorénavant on va se placer dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ qu'*on suppossera toujours complète et cocomplète.* En particulier, il existent les sommes directes et les produits arbitraires, donc on peut y définir les complexes Tot et $\mathrm{Tot}^{\times}$ associés à un bicomplexe.

Il y aura besoin d'imposer d'autres propietées à la catégorie $\mathcal{A}$ que nous rappelons tout de suite (voir [G]).

($Ab4$) On dit que $\mathcal{A}$ satisfait $Ab4$ si les sommes directes de monomorphismes sont des monomorphismes. Il en résulte que les sommes directes sont exactes.

($Ab4^*$) On dit que $\mathcal{A}$ satisfait $Ab4^*$ si les produits d'epimorphismes sont des epimorphismes. Il en résulte que les produits sont exacts.

On dit que $\mathcal{A}$ a *suffisament d'objets injectifs* si pour tout objet A de $\mathcal{A}$ il y a un monomorphisme $A \longrightarrow I$, avec I un objet injectif. L'existence de suffissants objets injectifs est indispensable pour développer l'algèbre homologique sur $\mathcal{A}$, tandis que la condition Ab^*4 permet identifier les foncteurs dérivés de la limite d'une tour avec la définition de l'appendice 6.3, (voir, par exemple, [W], 3.5).

Les exemples plus importants pour nous sont les suivants:

(a) La catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens, et plus généralement la catégorie $Mod(R)$ des R-modules à gauche sur un anneau R, sont des catégories que vérifient $Ab4$, $Ab4^*$, et avec suffissants objets injectifs.

(b) Soit X un espace topologique et $Sh(X,\mathbb{Z})$ la catégorie des faisceaux abéliens. Alors $Sh(X,\mathbb{Z})$ est une catégorie abélienne qui vérifie $Ab4$ et avec suffissants injectifs, mais elle n'est pas, en général, $Ab4^*$.

Définition 4.5.1. *Soit K un complexe de $\mathcal{A}$. Une* résolution injective de Cartan-Eilenberg *de K est un bicomplexe J^{**} avec $J^{pq} = 0$ pour $q < 0$ et un morphisme de complexes $\varepsilon : K^* \longrightarrow J^{*0}$ tel que*

(i) *si $K^p = 0$, alors $J^{p*} = 0$.*

(ii) *pour chaque p, les suites*

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow K^p \longrightarrow J^{p0} \longrightarrow J^{p1} \longrightarrow \dots \\ 0 \longrightarrow B^p(K^*) \longrightarrow B^p_h(J^{*0}) \longrightarrow B^p_h(J^{*1}) \longrightarrow \dots \\ 0 \longrightarrow Z^p(K^*) \longrightarrow Z^p_h(J^{*0}) \longrightarrow Z^p_h(J^{*1}) \longrightarrow \dots \\ 0 \longrightarrow H^p(K^*) \longrightarrow H^p_h(J^{*0}) \longrightarrow H^p_h(J^{*1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

sont des résolutions injectives de K^p, $B^p(K)$, $Z^p(K)$ et $H^p(K)$, respectivement.

Lemme 4.5.2. *Soit K un complexe, J un bicomplexe et $\varepsilon : K \longrightarrow L$ un morphisme d'augmentation. Si $B^p_h(J)$, $H^p_h(J)$ sont des résolutions de $B^p(K)$, $H^p(K)$, respectivement, alors, J^{p*} et $Z^p_h(J)$ sont des résolutions de K et $Z^p_h(K)$.*

Preuve. Cela résulte immédiatement des suites exactes de complexes

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow B^p_h(J) \longrightarrow Z^p_h(J) \longrightarrow H^p_h(J) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow Z^p_h(J) \longrightarrow J^{p*} \longrightarrow B^{p+1}_h(J) \longrightarrow 0, \end{array}$$

et des suites exactes longues de cohomologie associées. □

Proposition 4.5.3. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec suffisants objets injectifs. Soit K un complexe de $\mathcal{A}$, alors il existe une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K.*

Preuve. Pour chaque p, on choisit des résolutions injectives
$$B^p(K) \longrightarrow J_B^{p*}, \quad H^p(K) \longrightarrow J_H^{p*}.$$
Par le *horseshoe lemma* ([CE], Proposition V.2.2), il y a une résolution injective J_Z^{p*} de $Z^p(K)$ et une suite exacte de complexes
$$0 \longrightarrow J_B^{p*} \longrightarrow J_Z^{p*} \longrightarrow J_H^{p*} \longrightarrow 0.$$
On applique une autre fois le *horseshoe lemma* pour obtenir une résolution injective J_K^{p*} de K^p et une suite exacte de complexes
$$0 \longrightarrow J_Z^{p*} \longrightarrow J_K^{p*} \longrightarrow J_B^{p+1,*} \longrightarrow 0.$$
Maintenant, on définit le bicomplexe J^{**} qui a pour colonnes les complexes J_K^{p*}, avec la differentielle modifié par $(-1)^p$, et pour différentielle horizontale la composition
$$J_K^{p*} \longrightarrow J_B^{p+1,*} \longrightarrow J_Z^{p+1,*} \longrightarrow J_K^{p+1,*}.$$
Les morphismes $K^p \longrightarrow J^{p0}$ donnent le morphisme d'augmentation $K \longrightarrow J$. On voit aisément que $B_h^p(J) = J_B^p$ et $H_h^p(J) = J_H^p$, donc la proposition résulte du lemme précédent. □

Proposition 4.5.4. *Soit $f : K \longrightarrow \overline{K}$ un morphisme de complexes et J,$\overline{J}$ deux résolutions injectives de Cartan-Eilenberg de K et $\overline{K}$, réspectivement. Alors, il existe un morphisme de bicomplexes $\widetilde{f} : J \longrightarrow \overline{J}$ sur f.*

Preuve. Nous nous limitons à indiquer le raisonnement, parce que la preuve suit la même démarche que celle de la Proposition 4.5.3. En effet, en utilisant les mêmes notations ci-dessus, il est bien connu qu'il y a des morphismes de complexes $f_B : J_B^p \longrightarrow \overline{J}_B^p$, $f_H : J_H^p \longrightarrow \overline{J}_H^p$ au dessus des morphismes $f_B : B_h^p(K) \longrightarrow B_h^p(\overline{K})$ et $f_H : H_h^p(K) \longrightarrow H_h^p(\overline{K})$ induits par f, réspectivement. Alors, il y a un morphisme de complexes $f_Z : J_Z^p \longrightarrow \overline{J}_Z^p$ entre les complexes obtenus par le *horseshoe lemma*, compatible avec f_B et f_H, ([CE], Proposition V.2.3). Appliquant une autre fois cette version du *horseshoe lemma*, on obtient le morphisme désiré. □

Pour exprimer l'unicité des résolutions de Cartan-Eilenberg on introduit la rélation d'homotopie pour les morphismes de bicomplexes.

Définition 4.5.5. *Soient f,$g : J \longrightarrow L$ deux morphismes de bicomplexes. Nous dirons que f et g sont homotopes s'il y a des morphismes*
$$s_h : J^{pq} \longrightarrow L^{p+1,q}, \quad s_v : J^{pq} \longrightarrow L^{p,q+1},$$
tels que $s_v d_h + d_h s_v = s_h d_v + d_v s_h = 0$, et
$$g - f = (d_h s_h + s_h d_h) + (d_v s_v + s_v d_v).$$

Si s_h,s_v sont une homotopie entre les morphismes f et g, on prouve facilement que $s = s_h + s_v$ définit une homotopie de morphismes de complexes $\operatorname{Tot} f \sim \operatorname{Tot} g : \operatorname{Tot} J \longrightarrow \operatorname{Tot} L$, résultat que est valable aussi pour les complexes totales multiplicatifs, $\operatorname{Tot}^\times f \sim \operatorname{Tot}^\times g : \operatorname{Tot}^\times J \longrightarrow \operatorname{Tot}^\times L$. L'unicité des résolutions de Cartan-Eilenberg à homotopie près s'énnonce alors comme suit.

Proposition 4.5.6. *Soient $f,g : K \longrightarrow \overline{K}$ deux morphismes de complexes homotopes, $\widetilde{f},\widetilde{g}$: $J \longrightarrow \overline{J}$ deux morphismes entre résolutions injectives de Cartan-Eilenberg de $K,\overline{K}$ respectivement, sur f et g. Alors, $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont des morphismes homotopes de bicomplexes.*

Preuve. Soit $s : K^p \longrightarrow \overline{K}^{p+1}$ une homotopie entre f et g, $f - g = ds + sd$. Pour chaque p, les complexes J^{p*} (respectivement $\overline{J}^{p+1,*}$) sont des résolutions injectives de K^p (resp. de $\overline{K}^{p+1,*}$), donc il existe un morphisme de complexes $s^{p*} : J^{p*} \longrightarrow \overline{J}^{p+1,*}$ au-dessus de s. Ces morphismes définissent un morphisme $s^{**} : J^{**} \longrightarrow \overline{J}^{*,*}$ de bidegré (1,0) qui commute avec l'augmentation et avec la différentielle horizontale d''.

Soit $h = \widetilde{f} + d's^{**} + s^{**}d' : J \longrightarrow \overline{J}$. On prouve aisement que h est un morphisme de bicomplexes au dessus de g. En plus, h est homotope à $\widetilde{f}$, avec homotopie de bicomplexes donné par $s_h = s^{**}$, $s_v = 0$. Ainsi, il est suffissant de prouver que h et $\widetilde{g}$ sont morphismes de bicomplexes homotopes.

Changeons la différentielle d'' des complexes $J^{p*},\overline{J}^{p*},J_B^{p*},\dots$ par $(-1)^p d''$. Comme dans les propositions antérieures, on peut evoquer au *horseshoe lemma*, (et plus concretement à [CE], Proposition V.2.3), pour déduire l'existence d'homotopies $t_B^p,t_H^p,\dots$ et finalement d'une homotopie $t^p : h \sim \widetilde{g}$. Alors, $t = (-1)^p t^p : J^{*p} \longrightarrow \overline{J}^{*,p+1}$ definissent un morphisme de bidegré (0,1) tel que $d't + td' = 0$ et $d"t + td" = \widetilde{g} - h$, donc on trouve une homotopie entre h et $\widetilde{g}$. □

Avec les hypothèses de la proposition on a, en particulier,

$$\mathrm{Tot}\,\widetilde{f} \sim \mathrm{Tot}\,\widetilde{g} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tot}^{\times}\widetilde{f} \sim \mathrm{Tot}^{\times}\widetilde{g}.$$

On laisse au lecteur le dévelopement du concept dual, celui de *résolution projective de Cartan-Eilenberg*, et la preuve de l'existence et unicité correspondentes pour les catégories abéliennes avec suffisament d'objets projectifs.

4.5.2. *Hypercohomologie.*

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des catégories abéliennes et $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif exact à gauche. Rappelons que si $\mathcal{A}$ a suffisament d'objet injectifs, on définit les foncteurs dérivés à droite de T, $R^iT : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, par $R^iT(A) = H^i(I^*)$, où I^* est une résolution injective de A. On va définir maintenant les foncteurs hyperderivés à droite de T, $\mathbb{R}^iT : \mathbf{C}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}$.

Définition 4.5.7. *Soit $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur (covariante) additif exacte à gauche et K un complexe de $\mathcal{A}$. On définit l'hypercohomologie de T sur K par*

$$\mathbb{R}^pT(K) := H^p(\mathrm{Tot}^{\times}T(J)),$$

où J est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K.

D'après les Propositions 4.5.6 et 4.5.4, les groupes d'hypercohomologie $\mathbb{R}^pT(K)$ sont bien définis à isomorphisme pres et dépendent fonctoriellement de K.

Remarques 4.5.8. (a) Si K est un complexe réduit à un seul objet A placé en degrée 0, alors on retrouve la valeur des foncteurs dérivés classiques sur K, $\mathbb{R}^pT(K) = R^pT(A)$. Plus généralement, si A est placé en degré k, alors $\mathbb{R}^pT(K) = R^{p-k}T(K)$.

(b) Dans la définition de l'hypercohomologie on a pris le complexe total multiplicatif. Pour les complexes bornés inferieurement (par exemple, pour les complexes positifs), les résolutions injectives de Cartan-Eilenberg satisfont $\mathrm{Tot}^{\times} = \mathrm{Tot}$. Il y a beaucoup d'auteurs qui, en vue de leurs applications, se réduisent à ce cas, donc ne distinguant pas le complexe total multiplicatif et le complexe total additif.

(c) Dualement, on définit l'*hyperhomologie* des foncteurs exacts à droite, $\mathbb{L}_pT$ utilisant les résolutions projectives de Cartan-Eilenberg. Dans ce cas, par dualité, on prend le complexe total additif: $\mathbb{L}_pT(K) = H^p(\mathrm{Tot}\, P^{**})$.

(d) Le complexe $\mathrm{Tot}^{\times}T(J)$ est bien défini à quasi-isomorphisme près, c'est-à-dire, il définit un objet de la catégorie dérivée $D^*(\mathcal{B})$, (voir la Remarque 4.5.13).

Le calcul de l'hypercohomologie se fait à travers des suites spectrales associées à un bicomplexe.

Proposition 4.5.9. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec suffisants injectifs et $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif exacte à gauche. Soit K un complexe de $\mathcal{A}$ et J une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K.*

(1) *Les deux suites spectrales associées au bicomplexe $\mathrm{Tot}^{\times}T(J)$ ont termes E_2 donnés par*
$$I_2^{pq} = H^p(R^qT(K)), \qquad et \qquad I\!I_2^{pq} = R^pT(H^q(K)).$$
(2) *La seconde suite spectrale*
$$I\!I_2^{pq} = R^pT(H^q(K)) \Rightarrow \mathbb{R}^nT(K),$$
est faiblement convergente. Elle est fortement convergente si, et seulement si, $RE_\infty^p = 0$, pour tout p.

(3) *Si le complexe K est borné inférieurement, alors la première suite spectrale*
$$I_2^{pq} = H^p(R^qT(K)) \Rightarrow \mathbb{R}^nT(K),$$
est aussi fortement convergente.

Preuve. Dans (1) on n'a fait qu'identifier les termes E_2 selon la Proposition 4.4.2 et la définition de résolution injective de Cartan-Eilenberg. La suite spectrale de (2) est la suite spectrale d'un bicomplexe demiplanaire superieure, donc la convergence suit de 4.4.4 (d). Pour (3), dans le cas boné inférieurement, le bicomplexe est de premier quadrant, donc on applique 4.4.3 (a). □

Corollaire 4.5.10. (1) *Soit K un complexe acyclique, alors $\mathbb{R}^pT(K) = 0$ pour tout p.*

(2) *Soit $w : K \longrightarrow L$ un quasi-isomorphisme. Alors, $w_* : \mathbb{R}^pT(K) \longrightarrow \mathbb{R}^pT(L)$ est un isomorphisme pour tout p.*

(3) *Soit K un complexe borné inferieurement et tel que les objets K^p sont T-acycliques pour tout p. Alors, $\mathbb{R}^pT(K) = H^p(T(K))$.*

Preuve. (1) Par l'exactitude de K, on a $I\!I_2^{pq} = 0$, d'où le résultat.

(2) Le morphisme w induit un morphisme de suites spectrales $I\!I_r^{pq}(K) \longrightarrow I\!I_r^{pq}(L)$ qui est un isomorphismes au terme E_2^{pq}. Ainsi le résultat découle de la convergence forte de la deuxième suite spectrale, et du Théorème de Comparaison 2.2.10.

Par analogie, (3) suit par la degénération de la première suite spectrale. □

Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}b$ est la catégorie des groupes abéliens, on peut enlever l'hypothèse que les complexes soient bornés dans la partie (3) du corollaire précedent:

Proposition 4.5.11. *Soit $T : \mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{A}b$ un foncteur additif exacte à gauche. Soit K un complexe tel que les objets K^p sont T-acycliques, pour out p. Alors, $\mathbb{R}^pT(K) = H^p(T(K))$.*

Preuve. Soit J une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K. Par 4.4.6, on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R\varprojlim_n H^{n-1}(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}T(J)) & \longrightarrow & H^n(\mathrm{Tot}^{\times}T(J)) & \longrightarrow & \varprojlim_n H^n(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}T(J)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R\varprojlim_n H^{n-1}(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}T(K)) & \longrightarrow & H^n(\mathrm{Tot}^{\times}T(K)) & \longrightarrow & \varprojlim_n H^n(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}T(K)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le complexe $\sigma'_{\leq p}K$ est borné inférieurement, donc par le corollaire antérieur les morphismes à droite et à gauche de ce diagramme sont des isomorphismes. Par le *lemme des cinq*, le morphime central est aussi un isomorphisme. □

Exercice 4.5.12. De la même manière que pour les foncteurs dérivés, il y a des suites exactes longues d'hypercohomologie associées a une suite exacte de complexes: soit

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0,$$

une suite exacte de complexes de $\mathcal{A}$ bornés inferieurement. Prouver qu'il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^0T(K') \longrightarrow \mathbb{R}^0T(K) \longrightarrow \mathbb{R}^0T(K'') \longrightarrow \mathbb{R}^1T(K') \longrightarrow \dots$$

Remarque 4.5.13. On peut intérpréter l'hypercohomologie d'un foncteur en termes des catégories dérivées (voir [GM] pour les notions correspondantes): soit $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif exact à gauche, il induit un foncteur (que nous nottons aussi par le même symbol) entre les catégories des complexes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $T : \mathbf{C}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{B})$. Si $D(\mathcal{A})$ déssigne la catégorie dérivée, obtenue en inversant les quasi-isomorphismes de la catégorie des complexes $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$, on peut dériver ce foncteur, dans le sens de catégories dérivées, pour les complexes postifs (où les complexes bornés inferieurement), $\mathbb{R}T : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$. Il est bien connu que pour de tels complexes K la cohomologie du complexe $\mathbb{R}T(K)$ coïncide avec l'hypercohomologie définie comme auparavant, c'est-à-dire, $H^p(\mathbb{R}T(K)) = \mathbb{R}^pT(K)$, (voir, par exemple, [GM]).

Sous certaines hypothèses, ce foncteur admet un foncteur dérivé à droite $\mathbb{R}T : D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ sans limitation pour les degrés des complexes. On peut démander alors si sa cohomologie coïncide encore avec l'hypercohomologie du complexe définie auparavant à l'aide des résolutions injectives de Cartan-Eilenberg. On va esquisser la preuve de la coïncidence pour les catégories $Ab4^*$.

Rappelons que la stratégie de la définition de $\mathbb{R}T : D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ est la suivante (voir [GM], [Sp], et aussi [GNPR]): on cherche un complexe *fibrant* I, qui sera T-acyclique, et un quasi-isomorphisme $K \longrightarrow I$. On définit alors $\mathbb{R}T(K) := T(I)$ et on démontre que ceci est un complexe bien défini à quasi-isomorphisme près.

Bien sur, il faut avoir des conditions sur $\mathcal{A}$ pour qu'on puisse assurer l'existence de tels complexes fibrants. Nous allons voir que les résolutions injectives de Cartan-Eilenberg fournissent ces complexes.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec suffisament d'objets injectifs. Un complexe I de $\mathcal{A}$ est *fibrant* (où K-injectif pour Spaltestein, [Sp]) si pour tout complexe acyclique S le complexe $\mathbf{Hom}(S,I)$ est acyclique. Alors on a:

(1) *Soit K un complexe et J une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K. Alors,* $\mathrm{Tot}^{\times} J^{**}$ *est un complexe fibrant.*

En effet, soit S un complexe acyclique. On veut voir que $\mathbf{Hom}(S,\mathrm{Tot}^{\times} J^{**})$ est un complexe acyclique. Ceci est bien connu si K est borné inferieurement. Pour nous réduire à ce cas, considerons $\widetilde{\tau}_{>n}K$ la cofiltration de K définie par

$$(\widetilde{\tau}_{>n}K)^p = \begin{cases} K^p, & p > n, \\ B^{n+1}(K), & p = n, \\ 0, & p < n, \end{cases}$$

donc on a des morphismes (surjectifs) $K \longrightarrow \widetilde{\tau}_{>n+1}K \longrightarrow \widetilde{\tau}_{>n}K$.

Les cofiltrations $\widetilde{\tau}$ des files de la résolution de Cartan-Eilenberg J^{*q} definissent une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\widetilde{\tau}'_{>n}J^{*q}$ de $\widetilde{\tau}_{>n}K$. Ainsi, comme $\mathrm{Tot}^{\times} J = \varprojlim \mathrm{Tot}^{\times}\widetilde{\tau}_{>n}J^{**}$, on a

$$\mathbf{Hom}(S,\mathrm{Tot}^{\times} J^{**}) = \varprojlim \mathbf{Hom}(S,\mathrm{Tot}^{\times}\widetilde{\tau}_{>n}J^{**}).$$

Comme les morphismes de transition $\mathbf{Hom}(S,\mathrm{Tot}^{\times}\widetilde{\tau}_{>n}J^{**}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(S,\mathrm{Tot}^{\times}\widetilde{\tau}_{>n+1}J^{**})$ sont surjectifs, on trouve que

$$H^p(\mathbf{Hom}(S,\mathrm{Tot}^{\times} J^{**})) = \varprojlim H^p(\mathbf{Hom}(S,\mathrm{Tot}^{\times}\widetilde{\tau}_{>n}J^{**})),$$

et le résultat s'ensuit du cas borné inférieurement.

(2) *Supposons que $\mathcal{A} = \mathcal{A}b$ est la catégorie des groupes abéliens, (ou, plus généralement, que $\mathcal{A}$ vérifie Ab4*). Alors, le morphisme $K^* \longrightarrow$* $\mathrm{Tot}^{\times} J^{**}$ *est un quasi-isomorphisme.*

En effet, dans ce cas on a un diagramme commutatif de suites exactes (voir la Proposition 4.4.6)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R\varprojlim_n H^{n-1}(\sigma_{\leq p}K) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(K) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n H^n(\sigma_{\leq p}K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R\varprojlim_n H^{n-1}(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}J) \arrow[r] & H^n(\mathrm{Tot}^{\times} J) \arrow[r] & \varprojlim_n H^n(\mathrm{Tot}^{\times}\sigma'_{\leq p}J) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et on peut appliquer le cas borné et le lemme du cinq.

Ainsi, pour la catégorie des groupes abéliens (et aussi les *Ab*4$*$) les résolutions injectives de Cartan-Eilenberg fournissent souffisament de complexes fibrants, donc les deux définitions d'hypercohomologie coïncident.

Le résultat (2) n'est pas valable pour une catégorie abélienne générale. Pour un exemple dans la catégorie des faisceaux, voir [W2].

4.5.3. *Suite spectrale de Grothendieck.*

Dans cette section on présente la suite spectrale de Grothendieck des foncteurs dérivés d'une composition de foncteurs. Soient $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ des catégories abéliennes et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs additifs exacts à gauche. On suppose aussi que les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont suffisament d'objets injectifs, donc qu'il existe l'hypercohomologie des foncteurs F et G.

Théorème 4.5.14. *Supposons que F transforme les objets injectifs de $\mathcal{A}$ en objets G-acycliques. Alors, pour tout complexe positif K de $\mathcal{A}$ il y a une suite spectrale régulière*

$$E_2^{pq} = R^pG(\mathbb{R}^qF(K)) \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q}(GF)(K).$$

Preuve. Soit $K \longrightarrow I$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K. Le bicomplexe I est du premier quadrant, donc les complexes totaux additif et multiplicatif coïncident et on a un quasi-isomorphisme $K \longrightarrow \operatorname{Tot} I$. En plus, les objets I^{pq} sont injectifs pour tout couple (p,q), donc il en est de même du complexe $\operatorname{Tot} I$ et, par hypothèse, il s'en suit que le complexe (borné inferieurement) $F(\operatorname{Tot} I)$ est formé d'objets G-acycliques.

La (seconde) suite spectrale d'hypercohomologie de G sur $F(\operatorname{Tot} I)$ est la suite

$$E_2^{pq} = R^pG(H^q(F(\operatorname{Tot} I))) \Rightarrow \mathbb{R}^n(F(\operatorname{Tot} I)).$$

La cohomologie du complexe $F(\operatorname{Tot} I)$ est, par définition, $\mathbb{R}^*F(K)$; tandis que, étant doné que le complexe $F(\operatorname{Tot} I)$ est formé d'objets acycliques, nous pouvons appliquer le Corollaire 4.5.10 pour idéntifier le terme limite de la suite spectrale

$$\mathbb{R}^n(F(\operatorname{Tot} I)) = H^n(G(F(\operatorname{Tot} I))) = H^n((GF)(\operatorname{Tot} I)) = \mathbb{R}^n(GF)(K).$$

La suite spectrale est du premier quadrant, donc elle est régulière. □

Exercice 4.5.15. Dans la situation du théorème, soit A un objet de $\mathcal{A}$.

(a) Utiliser l'Exercice 2.2.11 pour déduire l'existence des morphismes pont

$$R^pG(F(A)) \longrightarrow R^p(GF)(A), \quad R^p(GF)(A) \longrightarrow G(R^pF(A)).$$

(b) Déduire aussi la suite exacte des cinq termes de la suite spectrale de Grothendieck,

$$0 \longrightarrow R^1G(F(A)) \longrightarrow R^1(GF)(A) \longrightarrow G(R^1F(A)) \longrightarrow R^2G(F(A)) \longrightarrow R^2(GF(A)).$$

(c) Appliquer cette suite exacte dans la situation des tours dérivées de groups abéliens pour obtenir la suite exacte du Théorème 6.4.3.

4.5.4. *Hypercohomologie des complexes de faisceaux.*

Soient X un espace topologique (ou plus généralement, un site de Grothendieck). La catégorie $Sh(X,\mathbb{Z})$ des faisceaux de groupes abéliens sur X est une catégorie abélienne avec suffisament d'objets injectifs (cf. [GM]), donc on peut appliquer les résultats sur les résolutions de Cartan-Eilenberg d'auparavant. On définit l'hypercohomologie des complexes de faisceaux comme l'hypercohomologie du foncteur de sections globales $\Gamma : Sh(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{A}b$:

Définition 4.5.16. *Soit K un complexe de faisceaux de groupes abéliens et J une résolution injective de Cartan-Eilenberg de K. L'hypercohomologie de X à valeurs dans K est*

$$\mathbb{H}^p(X,K) = \mathbb{R}^p\Gamma(X,K) = H^p(\operatorname{Tot}^\times\Gamma(X,J)).$$

D'après les résultats sur l'hypercohomologie d'un foncteur, l'hypercohomologie des faisceaux abéliens a les proprietées suivantes:

(1) Si K est un complexe de faisceaux qui se réduit à un seul faisceau A placé en degré k, alors on a
$$\mathbb{H}^p(X,K) = H^{p+k}(X,A).$$
(2) Il y a une suite spectrale faiblement convergente
$$I\!I_2^{pq} = H^p(X,\mathcal{H}^q(K)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X,K),$$
qui est fortement convergente si $RE_\infty^p = 0$. Par exemple, elle est fortement convergente si K est borné inferieurement ou si les faisceaux $\mathcal{H}^q(K)$ ont cohomologie bornée sur X.
(3) Si $K \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux, le morphisme induit $\mathbb{H}^p(X,K) \longrightarrow \mathbb{H}^p(X,L)$ est un isomorphisme, pour tout p.
(4) Si K est un complexe borné inferieurement formé par des faisceaux acycliques, alors
$$\mathbb{H}^p(X,K) = H^p(\Gamma(X,K)).$$
(5) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques et K un complexe borné inférieurement de faisceaux abéliens sur X. Alors, il y a une suite spectrale fortement convergente
$$E_2^{pq} = H^p(Y,\mathbb{R}^q f_*(K)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X,K).$$

4.5.17. *Résolution de Godement.* La propriété (4) de l'hypercohomologie des complexes de faisceaux nous permet présenter cette cohomologie à partir de la résolution de Godement de K: soit X_d l'espace topologique discret sousjacent à X et $p : X_d \longrightarrow X$ l'application identité. Soit $\mathsf{T} = p_*p^* : Sh(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow Sh(X,\mathbb{Z})$, donc si F est un faisceau, la valeur de $\mathsf{T}F$ sur un ouvert U est donnée par
$$\mathsf{T}F(U) = \prod_{x\in U} F_x.$$
Il y a une adjunction de foncteurs $p^* \dashv p_*$ qui induit des transformations naturelles $\eta : \mathsf{id} \longrightarrow \mathsf{T}$ et $\mu : \mathsf{TT} \longrightarrow \mathsf{T}$. On obtient ainsi un triple (T,μ,η) sur la catégorie $Sh(X,\mathbb{Z})$.

Soit K un complexe de faisceaux sur X. On note par $B\mathsf{T}^\bullet K$ le complexe cosimplicial défini par la construction standard de T, (voir l'Appendice B), et par $\eta : K \longrightarrow B\mathsf{T}^\bullet K$ le morphisme d'augmentation canonique définit par η.

Soit $B\mathsf{T}^*K$ le bicomplexe défini par
$$(B\mathsf{T}^*K)^{pq} = T^{q+1}(K^p),$$
$$d' = d_K, \quad d'' = \sum(-1)^i d^i.$$

Lemme 4.5.18. *Le morphisme d'augmentation η induit un quasi-isomorphisme $\eta : K \longrightarrow \mathrm{Tot}^\times B\mathsf{T}^*K$.*

Preuve. Il suffit de voir que la fibre η_x est un quasi-isomorphisme, pour tout point $x \in X$ ou, de manière équivalente, que $p^*K \longrightarrow p^*\mathrm{Tot}^\times B\mathsf{T}^*K$ est un quasi-isomorphisme.

Le complexe cosimplicial augmenté $p^*K \longrightarrow p^*B\mathsf{T}^\bullet K$ a une dégénération extraordinaire, s^{-1}, induite $p^*\mathsf{T}\mathsf{T}^n = p^*p_*p^*\mathsf{T}^n \longrightarrow p^*\mathsf{T}^n$, donc est un objet cosimplicial contractile, et le résultat s'ensuit. □

Nous dirons que le complexe $GK := \mathrm{Tot}^\times B\mathsf{T}^*K$ est la *résolution de Godement* du complexe de faisceaux K.

Proposition 4.5.19. *Soit K un complexe de faisceaux abéliens sur X, borné inferieurement, et GK sa résolution de Godement. On a des isomorphismes naturels*

$$\mathbb{H}^p(X,K) = H^p(\Gamma(X,GK)).$$

Preuve. Le quasi-isomorphisme $K \longrightarrow GK$ induit les isomorphismes $\mathbb{H}^p(X,K) = \mathbb{H}^p(X,GK)$. Mais le complexe GK est acyclique en chaque degré, parce que les faisceaux T^nK sont flasques. Donc, par la propriété (4) de l'hypercomologie des complexes de faisceaux, on a $\mathbb{H}^p(X,GK)) = H^p(\Gamma(X,GK))$. □

Remarque 4.5.20. Si X a une dimension cohomologique finie, alors on a un isomorphisme

$$\mathbb{H}^p(X,K) = \mathbb{H}^p(X,GK),$$

pour tous les complexes K, sans limitation sur les degrés. En effet, dans ce cas, il y a un N tel que $E_2^{pq} = H^p(X,\mathcal{H}^qK) = 0$, pour $p > N$ et, par conséquent, $RE^p_\infty = 0$, donc la suite spectrale d'hypercohomologie est fortement convergente et on peut appliquer le théorème de comparation des suites spectrales.

5. Suite spectrale d'homotopie

Bien que nôtre principal intérêt soit de présenter la suite spectrale de Bousfield-Kan d'un espace cosimplicial, on comence par une présentation succinte des suites spectrales associées à une filtration par des sous-espaces d'un espace topologique et une théorie cohomologique. Pour plus de détails (en particulier l'identification du terme E_2^{pq}) et exemples, le lecteur se rapportera avec profit à [B] et [M].

5.1. **Suite spectrale d'un espace filtré.**

Soit X un espace topologique. Une filtration de X est une suite de sous-espaces

$$\cdots \subseteq X_p \subseteq X_{p+1} \subseteq \cdots \subseteq X, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

On est attentif au fait que la filtration est croissante. Dans les situations plus habituelles, par exemple si X est un CW-complexe et X_p est la filtration par les squelettes, on a $X_p = \emptyset$, pour $p < 0$; donc nous supposerons que $X_{-1} = \emptyset$.

Soit h^* une théorie de cohomologie généralisée, qu'on suppose vérifiant l'axiome d'additivité, (voir, par exemple, [Sw] Definition 7.56). Les inclusions $X_p \subseteq X$ induisent un morphisme $h^*(X) \longrightarrow h^*(X_p)$ et, pas passage à la limite, on obtient un morphisme $h^*(X) \longrightarrow$

$\varprojlim h^*(X_p)$. Ce morphisme est surjectif mais, en général, il n'est pas un isomorphisme. Le noyau est détérminé par le résultat suivant, du a Milnor.

Théorème 5.1.1. *Soit (X,X_p) un espace filtré, nous supposons que la filtration est exhaustive, (c'est-à-dire, qu'on a $X = \cup_p X_p$).*

(1) *Il y a une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_p h^{n-1}(X_p) \longrightarrow h^n(X) \longrightarrow \varprojlim h^n(X_p) \longrightarrow 0.$$

(2) *On a $\varinjlim_p h^n(X,X_p) = 0$ et $R\varinjlim_p h^n(X,X_p) = 0$.*

Preuve. Pour (1) voir, par exemple, [Sw] Theorem 7.66. Pour (2), voir [B], Theorem 4.3. □

Les suites exactes de cohomologie des triples (X,X_p,X_{p-1}), définissent un couple exact

$$\begin{tikzcd} h^*(X,X_p) \arrow[rr, "\alpha"] & & h^*(X,X_{p-1}) \arrow[dl, "\beta"] \\ & h^*(X_p,X_{p-1}) \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

où γ est défini par le morphisme de connexion de la suite exacte du triple (X,X_p,X_{p-1}).

On considère la bigraduation donnée par

$$D^{pq} = h^{p+q}(X,X_{p-1}), \quad E^{pq} = h^{p+q}(X_p,X_{p-1}).$$

Ainsi les morphismes α,β,γ ont bidegrés $(-1,1)$,$(0,0)$ et $(1,0)$, respectivement.

Définition 5.1.2. *On appelle* suite spectrale associée à l'espace filtré (X,X_p) *la suite spectrale associée au couple exact antérieur.*

Proposition 5.1.3. *Soit (X,X_p) un espace topologique filtré, avec $X_{-1} = \emptyset$, et soit h^* une théorie cohomologique généralisée.*

(1) Si la filtration de X est exhaustive, alors la suite spectrale correspondante est conditionnellement convergente à la cohomologie de X, $h^*(X)$.

(2) La suite spectrale

$$E_1^{pq} = h^{p+q}(X_p,X_{p-1}) \Rightarrow h^n(X),$$

est fortement convergente si, et seulement si, $RE_\infty^p = 0$, pour tout p.

Preuve. (1) Il s'ensuit du Théorème de Milnor 5.1.1 que

$$\varprojlim_p h^n(X,X_p) = 0, \qquad R\varprojlim_p h^n(X,X_p) = 0,$$

donc la suite spectrale est conditionnellement convergente à la colimite $\varinjlim_p h^n(X,X_p)$ qui, étant donné que $X_{-1} = \emptyset$, est égale à $h^n(X)$.

(2) Cela s'ensuit immédiatement de (1) et du Théorème 3.5.1. □

Exercice 5.1.4. *Une autre présentation de la suite spectrale d'un espace filtré*: considérons le couple exact défini par les suites exactes de cohomologie du couple (X_p,X_{p-1}), avec

$$\overline{D}^{pq} = h^{p+q}(X_{p-1}), \qquad \overline{E}^{pq} = h^{p+q}(X_p,X_{p-1}).$$

Soit $\overline{E}_r^{pq}$ la suite spectrale définie par ce couple exact.

(i) Prouver que la suite spectrale $\overline{E}_r^{pq}$ est conditionnellement convergente à $\varprojlim_p h^n(X_p)$.

(ii) Prouver que les morphismes $h^n(X_{p-1}) \longrightarrow h^n(X,X_{p-1})$ induisent un morphisme de couples exacts et un isomorphisme de suites spectrales $\overline{E}_r^{pq} \cong E_r^{pq}$.

(iii) Déduire que la suite spectrale $\overline{E}_r^{pq}$ est fortement convergente à $h^*(X)$ si, et seulement si, $RE_\infty^p = 0$, pour tout p.

5.2. **Tours de fibrations.**

On a une situation duale de celle des espaces filtrés: les tours de fibrations. Une tour de fibrations $X_\bullet$ est une suite d'applications d'espaces pointés

$$\ldots \longrightarrow X_p \longrightarrow X_{p-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow *$$

où chaque application $X_p \longrightarrow X_{p-1}$ est une fibration. Rappelons le résultat suivant, qui rélie l'homotopie des espaces X_p à celle de la limite $X = \varprojlim X_p$, (voir, par exemple, [GJ], Proposition VI.2.15).

Théorème 5.2.1. *Soit $X_\bullet$ une tour de fibrations et $X = \varprojlim_p X_p$. Il y a une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_p \pi_{n+1}(X_p) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \varprojlim \pi_n(X_p) \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Pour chaque p, soit F_p la fibre de la fibration $X_p \longrightarrow X_{p-1}$. Les suites exactes d'homotopie des fibrations $F_p \longrightarrow X_p \longrightarrow X_{p-1}$ déterminent un couple exact

$$\begin{tikzcd} \pi_*(X_p) \arrow[rr, "\alpha"] & & \pi_*(X_{p-1}) \arrow[dl, "\beta"] \\ & \pi_*(F_p) \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

où γ est défini par le morphisme de connexion correspondant. On prend la bigraduation suivante:

$$D^{pq} = \pi_{-p-q}(X_p), \quad E^{pq} = \pi_{-p-q}(F_p),$$

Ainsi on a une suite spectrale cohomologique avec les degrés des morphismes α,β,γ égaux à $(-1,1),(1,0)$ et $(0,0)$, respectivement.

Définition 5.2.2. *On appelle* suite spectrale associée à la tour $X_\bullet$ *la suite spectrale associé au couple exact antérieur.*

Remarques 5.2.3. (1) Nôtre choix des indices p,q de la suite spectrale nous donne une suite spectrale cohomologique avec differentielles d_r^{pq} de bidegré $(r,1-r)$. Cette suite spectrale est de quatrième quadrant et, plus exactement, définie dans la région $p \geq 0$ et $q \leq -p$. Il y a des auteurs (Bousfield-Kan, Thomason, et d'autres) qui définissent le terme $E_1^{pq} = \pi_{-p+q}(F_p)$, pour obtenir une suite spectrale du premier quadrant ($p \geq 0$, $q \geq p$); dans ce cas, les différentielles d_r^{pq} ont bidegrés $(r,r-1)$.

(2) Les termes $E_1^{p,-p} = \pi_0(F_p)$ sont des ensembles et les termes $E_1^{p,-p-1} = \pi_1(F_p)$ sont des groupes non nécessairement commutatifs. Donc, pour obtenir un couple dérivé à partir de ce couple (et la suite spectrale correspondante) on doit être attentif avec les π_0 et π_1, (voir [BK]). Nous allons ignorer ce type de problèmes, et supposer que nous travaillons avec des espaces pour lesquels les π_0 et π_1 sont des groupes abéliens.

Proposition 5.2.4. *Soit $X_\bullet$ une tour de fibrations d'espaces topologiques pointés et $X = \varprojlim_p X_p$.*

(1) La suite spectrale de la tour $X_\bullet$ est conditionnellement convergente à $\varprojlim_p \pi_*(X_p)$.

(2) La suite spectrale de $X_\bullet$ est fortement convergente à $\pi_{-n}(X)$,

$$E_1^{pq} = \pi_{-p-q}(F_p) \Rightarrow \pi_{-n}(X),$$

si, et seulement si, $RE_\infty^p = 0$, pour tout p.

Preuve. Le point (1) est clair. Pour (2), d'après le Théorème 3.5.3, on a $RE_\infty^p = 0$ si, et seulement si, la suite spectrale est fortement convergente et $R\varprojlim_p \pi_{-n}(X_p) = 0$. Par la suite exacte de Milnor du Théorème 5.2.1, cette condition entraine que

$$\varprojlim_p \pi_{-n}(X_p) = \pi_{-n}(\varprojlim_p X_p) = \pi_{-n}(X).$$ □

Les conditions suivantes assurent la convergence forte de la suite spectrale d'une tour de fibrations. Pour les cas généraux on doit se repérer aux résultats de la section §3.

Proposition 5.2.5. *Si $d_r = 0$ pour $r \geq N$, alors $E_N^{**} = E_\infty^{pq}$ et la suite spectrale est fortement convergente. De plus, si une des conditions suivantes est vérifiée, la filtration induite sur $\pi_{-n}(X)$ est finie.*

- (i) *Il existe un k tel que $E_2^{pq} = 0$ pour tout q, sauf si $0 \leq p \leq k$. Alors, la filtration de $\pi_{-n}(X)$ a longuer au plus k.*
- (ii) *Il existe un ℓ tel que $E_2^{pq} = 0$ pour tout p, sauf si $0 \leq q \leq \ell$. Alors, la filtration de $\pi_{-n}(X)$ a longuer au plus $\ell + n$.*

Preuve. Les conditions (i) et (ii) assurent que les différentielles qui arrivent ou sortent de E_r^{pq} sont nulles pour $r \geq p$ et $r \geq k-p$ ou $r \geq \ell - q + 1$. Ainsi $E_r^{pq} = E_\infty^{pq}$ pour $p,q \gg 0$ et les seuls termes E_∞^{pq} qui definissent un terme non nul de la filtration de $\pi_{-n}(X)$ sont ceux avec $0 \leq p \leq k$ ou $0 \leq p \leq \ell + n$, selon le cas. □

5.3. **Suite spectrale d'un espace cosimplicial.**

Soit $\mathbf{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On note $c\mathbf{S}$ la catégorie des espaces cosimpliciaux, c'est-à-dire, la catégorie des foncteurs $X^\bullet : \Delta \longrightarrow \mathbf{S}$ avec les transformations naturelles de foncteurs comme morphismes, (voir l'Appendice B pour un résumé des principales notions sur les ensembles simpliciaux et les espaces cosimpliciaux).

Définition 5.3.1. *On définit l'espace total de l'espace cosimplicial $X^\bullet$ par*

$$\mathrm{Tot}(X^\bullet) = \mathbf{Hom}_{c\mathbf{S}}(\Delta^\bullet, X^\bullet).$$

C'est-à-dire, l'espace total d'un espace cosimplicial $X^\bullet$ est l'ensemble simplicial qui a pour n-simplexes, $n \geq 0$, les morphismes d'espaces cosimpliciaux

$$\Delta^n \times \Delta \longrightarrow X^\bullet,$$

avec morphismes face et dégénération donnés, respectivement, par les compositions

$$\Delta^{n-1} \times \Delta^\bullet \xrightarrow{d^i \times id} \Delta^n \times \Delta^\bullet \longrightarrow X^\bullet,$$
$$\Delta^{n+1} \times \Delta^\bullet \xrightarrow{s^i \times id} \Delta^n \times \Delta^\bullet \longrightarrow X^\bullet.$$

Remarque 5.3.2. De manière équivalente, l'espace total est la fin (voir [ML]) du foncteur $\Delta^{op} \times \Delta \longrightarrow \mathbf{S}$ défini par

$$(p,q) \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}(\Delta^p, X^q).$$

En particulier, le foncteur espace total est compatible avec les produits et le zéro, donc l'espace total d'un groupe simplicial cosimplicial est un groupe simplicial.

On note $sq^p\Delta^\bullet$ l'espace cosimplicial défini par le p-squelette des ensembles simpliciaux Δ^n. Si $X^\bullet$ est un espace cosimplicial, on note

$$\mathrm{Tot}_p(X^\bullet) = \mathbf{Hom}_{c\mathbf{S}}(sq^p\Delta^\bullet, X^\bullet).$$

Les inclusions $sq^p\Delta^\bullet \longrightarrow sq^{p+1}\Delta^\bullet$ induisent les morphismes

$$\mathrm{Tot}_{p+1}(X^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}_p(X^\bullet),$$

donc on obtient une tour de morphismes d'ensembles simpliciaux $\mathrm{Tot}_\bullet X$. Nous remarquons qu'on a

$$\mathrm{Tot}(X^\bullet) = \varprojlim \mathrm{Tot}_p(X^\bullet).$$

Hypothèse. Soit X un espace cosimplicial pointé. *Dorénavant on fait l'hypothèse que la tour* $\mathrm{Tot}_\bullet X$ *est une tour de fibrations.* Cette hypothèse est verifiée si l'espace cosimplicial $X^\bullet$ est *fibrant* pour une certaine estructure de catégorie à modèles de $c\mathbf{S}$, (voir [BK] ou [GJ]), et, en particulier, si $X^\bullet$ est un groupe simplicial cosimplicial, ([BK], Proposition X.4.9). Nous nous sommes référés à cette hypothèse en disant que X est un *espace cosimplicial fibrant.*

Définition 5.3.3. *On appelle* suite spectrale de l'espace cosimplicial fibrant pointé $X^\bullet$ *la suite spectrale de la tour* $\mathrm{Tot}_\bullet X$.

Dans ce que suit on va calculer les termes E_1^{pq} et E_2^{pq} de cette suite spectrale. Les groupes $\pi_n(X^\bullet)$, pour n fixé, definissent un groupe cosimplicial. On a

Proposition 5.3.4. *Le terme E_1^{pq} de la suite spectrale de* $\mathrm{Tot}(X^\bullet)$ *vérifie:*

$$E_1^{pq} = \pi_{-q}X^p \cap \ker s^0 \cap \cdots \cap \ker s^{p-1}.$$

Preuve. Le terme E_1^{pq} est égale à $\pi_{-p-q}(F_p)$ où F_p est la fibre de l'application $\mathrm{Tot}_p(X^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}_{p-1}(X^\bullet)$, c'est-à-dire, de l'application

$$\mathbf{Hom}_{c\mathbf{S}}(sq^p\Delta^\bullet,X^\bullet) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{c\mathbf{S}}(sq^{p-1}\Delta^\bullet,X^\bullet).$$

Il est aisé de voir (cf. [GJ], p. 391 pour les détails) que la fibre est formée des morphismes de $\mathbf{Hom}_{c\mathbf{S}}(sq^p\Delta^\bullet,X^\bullet)$ qui sont constants soit sur $sq^{p-1}\Delta^\bullet$, soit pour les dégénérations s^i de $X^\bullet$. Ainsi, si on note $N^pX^\bullet = X^p \cap \ker s^0 \cap \cdots \cap \ker s^{p-1}$, où $\ker s^i$ est la fibre de s^i, la fibre de l'application $\mathrm{Tot}_p(X^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Tot}_{p-1}(X^\bullet)$ est égale à

$$F_p = \mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}(S^p,N^pX^\bullet) = \Omega^pN^pX^\bullet,$$

donc, $E_1^{pq} = \pi_{-p-q}(\Omega^pN^pX^\bullet) = \pi_{-q}(N^pX^\bullet)$. Pour finir la preuve on doit observer que le foncteur de normalisation N commute avec les groupes d'homotopie, c'est-à-dire, qu'on a l'isomorphisme

$$\pi_{-q}(N^pX^\bullet) = N^p\pi_{-q}(X^\bullet),$$

(voir [GJ], Lemma VIII.1.8). □

Proposition 5.3.5. *Soit X un espace cosimplicial fibrant. Alors le terme E_2^{pq} de la suite spectrale de la tour* $\mathrm{Tot}(X)$ *est le p-ième groupe de cohomologie du complexe*

$$\pi_{-q}(X^0) \xrightarrow{\partial} \pi_{-q}(X^1) \xrightarrow{\partial} \pi_{-q}(X^2) \xrightarrow{\partial} \dots$$

où

$$\partial = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\pi_{-q}(d^i) : \pi_{-q}(X^n) \longrightarrow \pi_{-q}(X^{n+1}).$$

Preuve. La preuve revient à identifier la différentielle d_1 de la suite spectrale avec la somme $\partial = \sum_{i=0}^n(-1)^i\pi_{-q}(d^i)$, c'est qui est la conséquence du théorème d'additivitée homotopique, (voir [BK] X.7.2 ou [GJ], Theorem III.3.14 et Lemma VIII.1.17 pour le détails). □

Si on note la cohomologie du complexe qui apparaît dans la proposition anterieure par $\pi^p\pi_{-q}$, on écrit la suite spectrale correspondante sous la forme

$$E_2^{pq} = \pi^p\pi_{-q}X^\bullet \Rightarrow \pi_{-p-q}(\mathrm{Tot}(X^\bullet)).$$

On doit interpréter la convergence de cette suite selon le critère général de convergence pour les tours de fibrations de la Proposition 5.2.4.

Remarque 5.3.6. La suite spectrale d'un espace simplicial cosimplicial généralise la suite spectrale d'un bicomplexe dans le sens suivant: soit A un groupe simplicial cosimplicial. Si on change le signe de la composante simpliciale de A on peut associer à A le bicomplexe de quatrième quadrant A^{**} défini par $A^{pq} = A^p_{-q}$, $p \geq 0$, $q \leq 0$, avec les diférentielles habituelles, égales à la somme alternée des morphismes face cosimpliciaux et simpliciaux. D'après 4.4.3 (b), la première suite spectrale de ce bicomplexe, qui est une suite spectrale du quatrième quadrant, s'écrit

$$I_2^{pq} = H^p(H_{-q}(A)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^\times A^{**}),$$

où la convergence dépend de l'annulation de RE_∞.

On peut aussi associer à A le bicomplexe normalisé

$$N^{pq}A = N^pN_{-q}A = A^p_{-q} \cap \ker s^0 \cap \cdots \cap \ker s^{p-1} \cap \ker d_0 \cap \cdots \cap \ker d_{-q-1},$$

et la suite spectrale correspondante

$$I_2^{pq} = H^p(H_{-q}(NA)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}^\times NA^{**}).$$

L'inclusion $N^{**}A \longrightarrow A^{**}$ induit un morphisme des suites spectrales qui, d'après la section **7.2**, est un isomorphisme des termes E_2^{pq}, donc il est un isomorphisme des suites spectrales à partir de la page 2 et, en particulier, si les suites spectrales sont fortement convergentes, il induit un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{Tot}^\times N^{**}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tot}^\times A^{**}.$$

Le terme E_2^{pq} de la suite spectrale du bicomplexe normalisé $N^{**}A$ est isomorphe au terme E_2^{pq} de la suite la suite spectrale de l'espace total Tot A pris comme espace cosimplicial, (voir 7.2.4, (1))

$$H^pH_{-q}(NA) = H^p\pi_{-q}(A) = \pi^p\pi_{-q}(A).$$

En fait, on peut démontrer que les deux suites spectrales coincident d'après la page E_2^{pq}. La preuve dépend d'une analyse detaillée des deux suites spectrales, voir [BK2].

5.4. **La suite spectrale de la limite homotopique.**

Soit I une catégorie petite. On va définir la suite spectrale de la limite homotopique d'un diagrame $X : I \longrightarrow \mathbf{S}$. On comence par rappeler la construction du remplacement cosimplicial, ainsi que l'application au calcul des foncteurs dérivés dans le cas abélien.

5.4.1. *Remplacement cosimplicial.*

Soit I une catégorie petite et $\mathcal{C}$ une catégorie complète quelconque. Soit I^δ la catégorie discrète sousjacente à I, c'est-à-dire, I^δ a les mêmes objets que I et seulement les identitées pour morphismes. Le foncteur d'inclusion de $I^\delta \longrightarrow I$ induit un foncteur d'oubli

$$U : (I,\mathcal{C}) \longrightarrow (I^\delta,\mathcal{C}).$$

Le foncteur U a un adjoint à droite L: en effet, pour une famille X_i, $i \in ObI^\delta$ on définit le foncteur $LX : I \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que l'indice i a valeur

$$(LX)_i = \prod_{i\to j} X_j,$$

et qui transforme le morphisme $i \to i'$ en la projection évidente. Il est aissé de voir qu'il y a une adjontion $U \dashv L$.

La composition $T = LU : (I,\mathcal{C}) \longrightarrow (I,\mathcal{C})$ définit donc un triple, auquel on peut associer la construction standard pour obtenir, pour tout I-diagrame X, un I-diagrame cosimplicial $BT^\bullet X$, avec $BT^nX = T^{n+1}X$, et une coaugmentation $\varepsilon : X \longrightarrow BT^\bullet X$.

Il s'ensuit aisement de la définition que, pour tout n, on a

$$(T^nX)_j = \prod_{j\to i_0\to i_1\to\cdots\to i_n} X_{i_n},$$

et que les morphismes de transition sont donnés par les projections correspondentes.

Définition 5.4.1. *On définit le* remplacement cosimplicial *de X comme l'objet cosimplicial de $\mathcal{C}$ donné par*

$$\sqcap^* X = \varprojlim_I BT^\bullet X.$$

En prenant la limite de la coaugmentation $\varepsilon : X \longrightarrow BT^\bullet X$, il en résulte que l'objet cosimplicial $\sqcap^* X$ est coaugmenté par $\varepsilon : \varprojlim_I X \longrightarrow \sqcap^* X$.

Lemme 5.4.2. *Le remplacement cosimplicial $\sqcap^* X$ en degré $n-1$ est donné par*

$$\sqcap^{n-1} X = \varprojlim_I T^n X = \prod_{i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n} X_{i_n},$$

où le produit parcourt toutes les suites composables de n morphismes de I. □

Proposition 5.4.3. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ catégoires avec produits et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un focnteur qui presèrve les produits. Alors, F presèrve le remplacement cosimplicial pour les petites diagrammes, c'est-à-dire, si $X : I \longrightarrow \mathcal{C}$ est un I-diagramme dans $\mathcal{C}$, alors*

$$F(\sqcap^* X) = \sqcap^* FX.$$ □

En particulier, si X est un I-diagramme d'espaces fibrants, on trouve que

$$\pi_n(\sqcap^* X) = \sqcap^* \pi_n(X).$$

5.4.2. *Le cas abélien.*

Nous allons considérer maintenant le cas des diagrammes de groupes abéliens, nous notons $(I,\mathcal{A}b)$ la catégorie correspondante. C'est une catégorie abélienne avec suffisament d'objets injectifs. En effet, soit $p_i : (I,\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}b$ le foncteur de projection $p_i A = A_i$. Ce foncteur admet un adjoint à droite $s_i : \mathcal{A}b \longrightarrow (I,\mathcal{A}b)$, défini par

$$(s_i B)_j = \prod_{j \to i} B,$$

donc, si B est injectif, il en est de même de $s_i B$. Maintenant, pour en I-diagramme A, soient $A_i \longrightarrow B_i$ des monomorphismes avec B_i injectif, pour tout i. Alors le morphisme

$$A \longrightarrow \prod_i s_i B_i$$

est un monomorphisme de A dans un I-diagramme injectif.

On peut donc dériver le foncteur

$$\varprojlim : (I,\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{A}b,$$

comme d'habitude, c'est-à-dire, si A est un I-diagramme de groupes abéliens, on prend $A \longrightarrow J^*$ une résolution injective et on définit

$$R^p \varprojlim A := H^p(\varprojlim J^*).$$

Nous allons voir qu'on peut obtenir aussi ces foncteurs dérivés à l'aide du remplacement cosimplicial.

Proposition 5.4.4. *Soit A un I-diagramme de groupes abéliens. Alors on a:*

(1) *Les I-diagrammes T^pA sont $\varprojlim$-acycliques pour tout $p \geq 1$.*
(2) *On a les isomorphismes*

$$R^p \varprojlim A = H^p(\sqcap^* A) = \pi^p(\sqcap^* A).$$

Preuve. (1) Il est suffisant prouver le résultat pour $p = 1$. Dans ce cas, on a

$$TA = \prod_i s_i A_i,$$

donc il suffit voir que pour tout groupe B, les diagrammes s_iB sont $\varprojlim$-acycliques. Pour tout groupe abélien C et tout i, on a les égalitées

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(C, \varprojlim s_iB) = \mathrm{Hom}_{(I,\mathcal{A}b)}(C,s_iB) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(A,B),$$

où C désigne aussi le I-diagramme constant, donc pour tout i on trouve que $\varprojlim s_iB = B$.

Soit $B \longrightarrow J^*$ une résolution injective de B, alors $s_iB \longrightarrow s_iJ^*$ est une résolution injective du diagramme s_iB. Par le calcul précédent, si on prend la limite de cette résolution on retrouve le complexe augmenté $B \longrightarrow J^*$, qui est acyclique, donc $R^p \varprojlim s_iB = 0$ pour tout $p \geq 1$.

(2) Le I-diagramme cosimplicial coaugmenté

$$A \longrightarrow BT^\bullet A,$$

a une rétraction sur chaque degré, parce qu'il a une dégénération de plus, donc il définit une résolution de A par des objets $\varprojlim$-acycliques, d'où le résultat. $\square$

5.4.5. Par analogie avec ce qui vient d'etre fait, on peut définir l'hypercohomologie de $\varprojlim$ et obtenir, pour tout complexe de groupes abéliens K, une suite spectrale

$$R^p \varprojlim(H^qK) \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q} \varprojlim K.$$

5.4.3. *Limite homotopique de diagrammes d'espaces simpliciaux.*

Définition 5.4.6. *Soit X un I-diagramme d'espaces simpliciaux. On définit la* limite homotopique *de X par*

$$\mathrm{ho}\varprojlim X := \mathrm{Tot}\ \sqcap^* X.$$

Proposition 5.4.7. *Soit X un I-diagramme d'espaces simpliciaux. Alors, il y a une suite spectrale du quatrième quadrant conditionnellement convergente*

$$E_2^{pq} = R^p \varprojlim \pi_{-q}X \Rightarrow \pi_{-p-q}(\mathrm{ho}\varprojlim X), \qquad p \geq 0,\ p+q \leq 0.$$

Preuve. C'est la suite spectrale de l'espace total de $\sqcap^*X$. D'après les propositions 5.3.5 et 5.4.3, le terme E_2^{pq} est donné par

$$E_2^{pq} = \pi^p\pi_{-q}(\sqcap^*X) = \pi^p \sqcap^* \pi_{-q}(X) = R^p \varprojlim \pi_{-q}(X). \qquad \square$$

5.4.8. Si A est un I-diagramme de groupes abéliens, les groupes $R^p \varprojlim A$ sont aussi appelés les groupes de cohomologie de I à valeurs dans le foncteur A, et on écrit $H^p(I,A) = R^p \varprojlim A$. Ainsi, la suite spectrale de la proposition antérieure s'écrit aussi

$$E_2^{pq} = H^p(I,\pi_{-q}X) \Rightarrow \pi_{-p-q}(\mathrm{ho}\varprojlim X).$$

5.5. **Hypercohomologie généralisée.**

Soit X un espace topologique et F un faisceau simplicial (ou, plus généralement un préfaisceau simplicial). Soit $\mathsf{T}^{\bullet+1}\mathsf{F}$ la résolution de Godement de F, qui est un faisceau cosimplicial, (voir 4.5.17).

Définition 5.5.1. *On définit l'ensemble simplicial d'*hypercohomologie de F à valeurs dans X *comme l'espace total des sections globales de la résolution de Godement, c'est-à-dire, par*

$$\mathbb{R}\Gamma(X,F) := \mathrm{Tot}\,\mathsf{T}^{\bullet+1}F(X),$$

et les groupes de cohomologie généralisée de X à valeurs dans F, par

$$\mathbb{H}^p(X,F) = \pi_{-p}(\mathbb{R}\Gamma(X;F)).$$

Remarques 5.5.2. (1) On remarque que pour $p = 0,1$ les $\mathbb{H}^p(X,F)$ sont un ensemble et un groupe non nécessairement abélien, respectivement. Comme auparavant, on va ignorer ce type de problème, (voir aussi 5.5.8).

(2) Soit C_* un faisceau de complexes de chaînes positifs et $F = \Gamma(C_*)$ le faisceau en groupes abéliens simpliciaux associé par la correspondence de Dold-Kan. Alors, on a un isomorphisme

$$N\mathsf{T}^{\bullet+1}F \cong \mathsf{T}^{*+1}C_*,$$

donc un isomorphisme

$$\mathbb{H}^p(X,F) = H^p(\mathrm{Tot}\,\Gamma(X,T^{*+1}C_*)).$$

Ainsi, pour les cas où l'hypercohomologie d'un faisceau de complexes coincide avec l'hypercohomologie de la résolution de Godement (voir la Proposition 4.5.19), on trouve un isomorphisme,

$$\mathbb{H}^p(X,\Gamma(C)) = \mathbb{H}^p(X,C).$$

En particulier, soit A est faisceau en groupes abéliens et $A[n]$ le complexe qui est nul sauf un degré n, ou il est égal à A, et soit $K(A,n) = \Gamma(A[n])$ faisceau simplicial que lui correspond (c'est-à-dire, le faisceau en espaces d'Eilenberg-MacLane $K(A,n)$). On a alors

$$\mathbb{H}^p(X,K(A,n)) = \mathbb{H}^p(X,A[n]) = H^{p-n}(X,A),$$

où le dernier groupe correspond à la cohomologie du faisceau en groupes A.

Proposition 5.5.3. *Soit $\widetilde{\pi}_{-q}(F)$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \pi_{-q}(F(U))$. Il y a une suite spectrale*

$$E_2^{pq} = H^p(X,\widetilde{\pi}_{-q}(F)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X;F).$$

La suite spectrale est fortement convergente si on vérifie une des conditions suivantes:

(a) *il y a un N tel que $\widetilde{\pi}_q(F) = 0$ pour $q > N$.*
(b) *la dimension cohomologique des faisceaux $\widetilde{\pi}_*(F)$ sur X est bornée.*

Preuve. C'est la suite spectrale de l'espace cosimplicial $\Gamma(X,\mathsf{T}^{\bullet+1}F)$, c'est-à-dire,

$$E_2^{pq} = \pi^p\pi_{-q}(\mathsf{T}^{\bullet+1}F(X)) \Rightarrow \pi_{-p-q}(\mathrm{Tot}\mathsf{T}^{\bullet+1}F(X)) = \mathbb{H}^{p+q}(X;F).$$

Il reste à idéntifier le terme E_2^{pq}. Mais, la construction de Godement commute avec l'homotopie et le passage au faisceau associé à un préfaisceau,

$$\pi_{-q}(\mathsf{T}^{\bullet+1}F(X)) = \mathsf{T}^{\bullet+1}\pi_{-q}(F(X)) = \mathsf{T}^{\bullet+1}\widetilde{\pi}_{-q}(F(X)),$$

donc, on a

$$\pi^p(\pi_{-q}(\mathsf{T}^{\bullet+1}F(X))) = H^p(\mathsf{T}^{\bullet+1}\widetilde{\pi}_{-q}(F(X))) = H^p(X,\widetilde{\pi}_{-q}F),$$

parce que la résolution de Godement de $\widetilde{\pi}_{-q}F$ est flasque. La convergence est conséquence de la Proposition 5.2.5. □

La résolution standard associée à un triple est augmentée, donc pour la résolution de Godement on trouve un morphisme $F \longrightarrow \mathsf{T}^{\bullet+1}F$, et aussi pour les sections globales et l'espace total associé

$$F(X) \longrightarrow \mathrm{Tot}\mathsf{T}^{\bullet+1}F(X).$$

Dans les applications, nottement dans celles de la K-thérie algébrique des schémas, on s'interesse aux conditions pour que ce dernier morphisme soit une équivalence faible.

Définition 5.5.4. *Soit F un préfaisceausimplicial. On dit que F satisfait la condition de Mayer-Vietoris si pour tout couple d'ouverts U,V de X le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F(U\cup V) & \longrightarrow & F(U) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ F(V) & \longrightarrow & F(U\cap V) \end{array}$$

induit par les inclusions, est un carré cartasien.

Le résultat suivant a été prouvé par Brown et Gersten, nous renvoyons à l'article original [BG] pour la preuve.

Proposition 5.5.5. *Soit F un faisceau simplicial pointé qui satisfait la condition de Mayer-Vietoris. Alors, le morphisme naturel $F(X) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X,F)$ est une equivalence faible. Donc la suite spectrale s'écrit*

$$E_2^{pq} = H^p(X,\widetilde{\pi}_{-q}(F)) \Rightarrow \pi_{-n}(F(X)).$$ □

Exemple 5.5.6. Soient X est un schéma régulier et $F = \mathcal{K}$ le faisceau simplicial de la K-théorie algébrique. Ce faisceau satisfait la condition de Mayer-Vietoris ([Q]), donc on trouve la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(X,\widetilde{K}_{-q}) \Rightarrow K_{-p-q}(X).$$

Exercice 5.5.7. Pour completer la présentation de la hypercohomologie généralisée, on propose en exercise la construction de la suite spectrale de Leray dans ce contexte (pour les détails on consultera [T]).

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si F est un préfaisceau simplicial fibrant sur X, on définit le prefaisceau image directe par

$$\mathbb{R}f_*F(V) = \mathbb{R}\Gamma(f^{-1}(V),F).$$

On suppose qu'il y a un N tel que ou bien $\pi_q F = 0$ pour $q > N$, ou bien $H^p(f^{-1}(V),\pi_q) = 0$ pour $p > N$ et tout ouvert $V \subseteq Y$.

(1) Prouver que le morphisme naturel
$$\mathbb{R}\Gamma(X,F) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(Y,\mathbb{R}f_* F),$$
est une equivalence faible.

(2) Prouver qu'il y a une suite spectrale convergente
$$E_2^{pq} = H^p(Y,\widetilde{\pi}_{-q}\mathbb{R}f_* F) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X;F).$$

La preuve proposée par Thomason consiste à faire un dévissage à l'aide de la tour de Postnikov de F pour se réduir au cas où F est un faisceau avec un seul groupe d'homotopie no nul, (c'est dans ce dévissage qu'on utilise l'hypothèse sur la dimension cohomologique). Ce cas coïncide alors avec la suite spectrale habituelle de Leray pour le cas abélien, donc le résultat suit, (voir [T], 1.36- 1.56 pour les détails).

Remarque 5.5.8. On peut étendre la théorie cohomologique généralisée qu'on vient de developper pour les faisceaux simpliciaux aux faisceaux de spectres, voir [T]. Dans ce cas on évite les problèmes pour les termes H^0 et H^1 de la suite spectrale, qui devienent des vrais groupes abéliens.

Remarque 5.5.9. Tout comme dans le cas abélien (comparer avec la Remarque 4.5.13), l'hypercohomologie généralisée peut être développée à partir de la théorie générale des foncteurs dérivés dans le contexte des catégories à modèles fermées de Quillen; c'est-à-dire, on peut donner une structure de catégorie à modèles sur la catégorie des préfaisceaux simpliciaux *sPreSh*(X) et définir, pour un prefiasceau F, l'hypercohomologie de F comme $\pi_*(F'(X))$, où F' est un reemplacement fibrant de F, (voir [J]). Pour la coincidence des deux approches on doit se restreindre aux faisceaux avec dimension cohomologique finie (loc. cit).

6. Appendice A: tours de groupes abéliens

Dans cet appendice on présente, d'un point de vue élémentaire, les resultats relatifs aux limites et colimites des suites de groupes abéliens qu'on a outilisé dans le texte principal. Bien que les groupes abéliens qui interviennent dans la théorie des suites spectrales soient bigraduées, dans cet appendice nous allons ignorer les possibles graduations, les modifications à faire étant évidentes.

6.1. **Tours de groupes abéliens.**

Une *tour de groupes abéliens* A est une suite de groupes abéliens et morphismes
$$\ldots \longrightarrow A^{n+1} \xrightarrow{\alpha^n} A^n \longrightarrow \ldots \qquad n \in \mathbb{Z}.$$
Un morphisme de tours de groupes abéliens $f : A \longrightarrow B$ est une suite de morphismes $f^n : A^n \longrightarrow B^n$ tels que $f^n\alpha^n = \beta^n f^{n+1}$, pour tout n. Pour simplifier les notations on n'écrira pas les indexs des morphismes α.

On note par **Tours**($\mathcal{A}b$) la catégorie de tours de groupes abéliens. On définit une suite exacte de tours de groupes abéliens

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

par la condition que la suite de groupes abéliens

$$A^n \longrightarrow B^n \longrightarrow C^n$$

est exacte pour tout n.

6.2. Colimite d'une tour.

La colimite (aussi appellée limite directe) d'une tour A est un groupe abélien noté par

$$A^{-\infty} = \varinjlim_n A^n,$$

muni de morphismes $\eta^n : A^n \longrightarrow A^{-\infty}$ tels que $\eta^n\alpha^n = \eta^{n+1}$ et qui sont universels avec cette propriétée.

Rappelons que les éléments de $A^{-\infty}$ sont de la forme $\eta^n(a)$ pour quelque n et quelque $a \in A^n$, où $\eta^n(a) = \eta^m(b)$ si, et seulement si, il y a un $p < n,m$ avec $\alpha^{n-p}(a) = \alpha^{m-p}(b)$ en A^p, (où $\alpha^q = \alpha\circ \overset{q)}{\ldots} \circ\alpha$).

Nous laissons la preuve du théorème suivant comme exercice.

Théorème 6.2.1. [Exactitude de la colimite] *Soit*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une suite exacte de tours de groupes abéliens. Alors, la suite induite

$$0 \longrightarrow A^{-\infty} \longrightarrow B^{-\infty} \longrightarrow C^{-\infty} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte. □

6.3. Limite d'une tour.

La limite (ou limite projective) d'une tour A est un groupe abélien noté par

$$A^{\infty} = \varprojlim_n A^n,$$

muni de morphismes $\epsilon^n : A^{\infty} \longrightarrow A^n$ tels que $\alpha^n\epsilon^{n+1} = \epsilon^{n+1}$ et qui sont universels avec cette propriété.

Un élément $x \in A^{\infty}$ est une famille d'éléments $a^n \in A^n$, $n \in \mathbb{Z}$ compatible, c'est-à-dire, tel que $\alpha(a^{n+1}) = a^n$.

Contrairement à ce qu'on a pour la colimite, la limite $\varprojlim$: **Tours**($\mathcal{A}b$) $\longrightarrow \mathcal{A}b$ n'est pas un foncteur exact, donc on doit considérer ses foncteurs derivés, qui dans le cas des tours se réduisent au premier foncteur derivé, $R\varprojlim = \varprojlim^1$. La philosophie générale sousjacente est que quand on a un foncteur F, on doit toujours introduire les foncteurs dérivés de F dans l'étude cohomologique asscociée.

On peut considérer la construction élémentaire suivante du foncteur $R\varprojlim$: on considère le morphisme

$$1-\alpha : \prod A^n \longrightarrow \prod A^n,$$

dont le noyau est A^∞, selon la description des éléments de la limite qu'on vient de rappeler. Alors, on définit le dérivé de la limite d'une tour par:

Définition 6.3.1. $RA^\infty = R\varprojlim_n A^n := \operatorname{coker}\,(1-\alpha)$.

C'est-à-dire, on a la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow A^\infty \longrightarrow \prod A^n \xrightarrow{1-\alpha} \prod A^n \longrightarrow RA^\infty \longrightarrow 0.$$

Remarque 6.3.2. La définition qu'on vient de donner coïncide avec la définition du foncteur dérivé de $\varprojlim$ au sens habituel pour les catégories abéliennes $Ab4^*$, voir [EM].

Le résultat suivant explicite la proprietée fondamentale du foncteur dérivé.

Théorème 6.3.3. *Soit*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

une suite exacte de tours de groupes abéliens. Alors, il existe un morphisme naturel (qu'on appelle de connexion) $\delta : C^\infty \longrightarrow RA^\infty$ *et une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow A^\infty \longrightarrow B^\infty \longrightarrow C^\infty \xrightarrow{\delta} RA^\infty \longrightarrow RB^\infty \longrightarrow RC^\infty \longrightarrow 0.$$

Preuve. On a le diagramme commutatif de suites exactes de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \prod A^n & \longrightarrow & \prod B^n & \longrightarrow & \prod C^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle 1-\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle 1-\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle 1-\gamma}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \prod A^n & \longrightarrow & \prod B^n & \longrightarrow & \prod C^n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donc le résultat suit du lemme du serpent. □

Ce théorème et la définition de limite ont les conséquences immédiates suivantes:

6.3.4. Le foncteur derivé $R\varprojlim$ est exact à droite.

6.3.5. Si $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ est une suite exacte de tours de groupes abéliens, et $RA^\infty = 0$, alors le morphisme $B^\infty \longrightarrow C^\infty$ est surjectif.

6.3.6. Soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

une suite exacte de tours de groupes abéliens. Si $RA^\infty = 0$, alors il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A^\infty \longrightarrow B^\infty \longrightarrow C^\infty \longrightarrow D^\infty \longrightarrow RB^\infty \longrightarrow RC^\infty \longrightarrow RD^\infty \longrightarrow 0.$$

6.3.7. Si les morphismes $\alpha : A^{n+1} \longrightarrow A^n$ sont surjectifs pour tout $n \geq n_0$, alors les morphismes $\epsilon^n : A^\infty \longrightarrow A^n$ sont surjectifs et $RA^\infty = 0$.

En particulier, on a:

6.3.8. Si les morphismes $\alpha : A^{n+1} \longrightarrow A^n$ sont surjectifs, pour tout n, et $A^\infty = 0$, alors $A^n = 0$, pour tout n.

Finalement, on remarque la compatibilité des limites et des limites dérivées avec les produits, propriété qui découle directement de la suite exacte 6.3.1 qui definit le dérivé:

6.3.9. Soit $A(\lambda)$ une famille de tours de groupes abéliens et $A = \prod_\lambda A(\lambda)$ la tour produit. Alors,

$$A^\infty = \prod_\lambda A(\lambda)^\infty, \qquad \text{i} \qquad RA^\infty = \prod_\lambda RA(\lambda)^\infty$$

6.4. **Tours dérivées.**

Définition 6.4.1. *Soit A une tour de groupes abéliens et $r \geq 0$ un entier non negatif. La r-ième tour dérivée de A est la tour A_r, qu'on denote aussi par $\operatorname{im}^r A$, définie par*

$$A_r^n = \operatorname{im}\ (A^{n+r} \longrightarrow A^n),$$

avec les morphismes induits par les morphismes de A.

Remarquons que, si on fixe n, les sous-groupes A_r^n définissent une filtration décroissante de A^n:

$$\cdots \subseteq A_{r+1}^n \subseteq A_r^n \subseteq \cdots \subseteq A^n.$$

Proposition 6.4.2. *Pour tout $r \geq 0$, on a des isomorphismes*

$$A_r^\infty \cong A^\infty \qquad \text{et} \qquad RA_r^\infty = 0.$$

Preuve. Le premier isomorphisme découle de la characterisation des éléments de la limite comme familles compatibles déléments de A^n. Alors, l'isomorphisme pour les dérivés découle de la définition. □

Théorème 6.4.3. *Soit A une tour de groupes abéliens. Il y a un isomorphisme naturel*

$$\varprojlim_n \varprojlim_r A_r^n \cong \varprojlim_n A^n = A^\infty,$$

et une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow R\varprojlim_n(\varprojlim_r A_r^n) \longrightarrow R\varprojlim_n A^n \longrightarrow \varprojlim_n(R\varprojlim_r A_r^n) \longrightarrow 0.$$

Preuve. L'isomorphisme étant clair, nous allons prouver l'existence de la suite exacte. Pour tout couple de nombres entiers s,t, considerons le groupe abélien

$$I^{s,t} = \begin{cases} \operatorname{im}(A^t \longrightarrow A^s), & t \geq s, \\ A^s, & t \leq s. \end{cases}$$

Ces groupes définissent une filtration décroisante de A^s,

$$\cdots \subseteq I^{s,t+1} \subseteq I^{s,t} \subseteq \cdots \subseteq I^{s,s} = A^s.$$

Si $s \geq u$ i $t \geq v$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^t & \longrightarrow & A^s \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ A^u & \longrightarrow & A^v \end{array}$$

d'où on en déduit un morphisme $I^{s,t} \longrightarrow I^{u,v}$.

Si on fixe t, on a $I^{s,t} = A^s$ pour $s \gg 0$, donc

$$\varprojlim_s I^{s,t} = \varprojlim_s A^s = A^\infty, \qquad \text{et} \qquad R\varprojlim_s I^{s,t} = R\varprojlim_s A^s = RA^\infty.$$

En particulier, ces groupes sont indépendants de t, d'où il résulte que

$$R\varprojlim_t \varprojlim_s I^{s,t} = 0.$$

Ainsi, on peut appliquer 6.3.6 à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim_s I^{s,t} \longrightarrow \prod_s I^{s,t} \longrightarrow \prod_s I^{s,t} \longrightarrow R\varprojlim_s I^{s,t} \longrightarrow 0$$

pour obtenir la suite exacte

$$\begin{array}{ll} 0 \longrightarrow & \varprojlim_t \varprojlim_s I^{s,t} \longrightarrow \prod_s \varprojlim_t I^{s,t} \longrightarrow \prod_s \varprojlim_t I^{s,t} \longrightarrow \\ \longrightarrow & \varprojlim_t R\varprojlim_s I^{s,t} \longrightarrow \prod_s R\varprojlim_t I^{s,t} \longrightarrow \prod_s R\varprojlim_t I^{s,t} \longrightarrow R\varprojlim_t R\varprojlim_s I^{s,t} \longrightarrow 0. \end{array}$$

D'autre part, si on fixe s, on a $I^{s,t} = A^s_t$ pour $t \gg 0$, donc

$$\varprojlim_t I^{s,t} = \varprojlim_t A^s_t, \qquad \text{et} \qquad R\varprojlim_t I^{s,t} = R\varprojlim_t A^s_t.$$

Ainsi, d'après les identifications des différentes limites, la suite exacte s'écrit sous la forme

$$\begin{array}{ll} 0 \longrightarrow & \varprojlim_t A^\infty \longrightarrow \prod_s \varprojlim_t A^s_t \xrightarrow{a} \prod_s \varprojlim_t A^s_t \longrightarrow \\ \longrightarrow & \varprojlim_t RA^\infty \longrightarrow \prod_s R\varprojlim_t A^s_t \xrightarrow{b} \prod_s R\varprojlim_t A^s_t \longrightarrow R\varprojlim_t R\varprojlim_s A^s_t \longrightarrow 0, \end{array}$$

où les morphismes a,b sont les morphismes qui definissent respectivement les limites et les limites dérivées. Alors, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} a \longrightarrow RA^\infty \longrightarrow \ker b \longrightarrow 0$$

est la suite exacte que l'on cherche. □

Remarque 6.4.4. La suite exacte du théorème précedent est étroitement liée à la condition de Mittag-Leffler. Rappelons qu'on dit qu'une tour de groupes abéliens A^n satisfait *la condition de Mittag-Leffler* (ML) si pour tout indice n il y a un $m \geq n$ tel que $\mathrm{im}(A^r \longrightarrow A^n) = \mathrm{im}(A^m \longrightarrow A^n)$. C'est-à-dire, si la filtration A^n_r, $r \geq n$, de A^n est stationnaire. Par example, si les morphismes de transition de la tour sont des épimorphismes, la condition ML est vérifiée.

Si A est une tour qui vérifié ML, alors la tour $Q^n = \varprojlim_r A^n_r$ est épimorphique, donc d'après 4.3.6 on trouve que

$$R \varprojlim_n Q^n = \varprojlim_n \varprojlim_r A^n_r = 0.$$

En plus, comme A^n_r est essentielement constant, on a $R \varprojlim_r A^n_r = 0$, donc $\varprojlim(R \varprojlim_r A^n_r) = 0$. De la suite exacte du théorème résulte que $RA^\infty = 0$. C'est cette annullation qu'on peut considérer comme une condition ML généralisée.

Corollaire 6.4.5. *Soit A une tour de groupes abéliens tel que $RA^\infty = 0$. Alors, $R \varprojlim_r A^n_r = 0$, pour tout $r \geq 0$.*

Preuve. D'après la suite exacte du théorème précédent, on déduit que

$$\varprojlim_n (R \varprojlim_r A^n_r) = 0.$$

Étant donné que les morphismes $A^{n+1}_r \longrightarrow A^n_{r+1}$ sont épimorphismes, il s'en suit que les morphismes $R \varprojlim_r A^{n+1}_r \longrightarrow R \varprojlim_r A^n_{r+1}$ le sont aussi. Ainsi, on déduit le résultat par application de 6.3.8 à la tour $R \varprojlim_r A^n_r$. □

7. Appendice B: méthodes simpliciales

Dans cet appendice on rappelent quelques définitions et notations sur les objets simpliciaux d'une catégorie. Pour les détails on peut consulter [Ma] ou [GJ].

7.1. La catégorie $\mathbf{\Delta}$: objets simpliciaux, homotopie.

7.1.1. *Objets simpliciaux.*

On note $\mathbf{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis ordonés

$$[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\},$$

pour tout entier $n \geq 0$, et les morphismes $[n] \longrightarrow [m]$ sont les applications non decroissantes.

Parmi les morphismes de $\mathbf{\Delta}$ il y a des morphismes spéciaux, *les morphismes de face*:

$$\delta^n_i : [n-1] \longrightarrow [n], \quad \delta^n_i(j) = \begin{cases} j & j < i, \\ j+1 & j \geq i, \end{cases}$$

et *les morphismes de dégénération*:

$$\sigma^n_i : [n+1] \longrightarrow [n], \quad \sigma^n_i(j) = \begin{cases} j & j \leq i, \\ j-1 & j > i, \end{cases}$$

où $0 \leq i \leq n$. Pour simplifier les notations, nous écrirons simplement δ_i,σ_i pour δ^n_i,σ^n_i.

On peut vérifier comme exercice que ces morphismes satisfont les identitées suivantes, que nous appelerons les *identitées simpliciales*:

$$\begin{array}{rcll} \delta_j\delta_i & = & \delta_i\delta_{j-1}, & i<j, \\ \sigma_j\sigma_i & = & \sigma_i\sigma_{j+1}, & i\leq j, \\ \sigma_j\delta_i & = & \left\{ \begin{array}{ll} \delta_i\sigma_{j-1} & i<j, \\ id & i=j,j+1, \\ \delta_{i-1}\sigma_j, & i>j+1, \end{array}\right. \end{array}$$

et que tout morphisme $\mu : [n] \longrightarrow [m]$ de $\mathbf{\Delta}$ admet une décomposition unique de la forme

$$\mu = \delta_{i_1}\dots\delta_{i_s}\sigma_{j_1}\dots\sigma_{j_t},$$

avec $0\leq i_s\leq\cdots\leq i_1\leq m$ et $0\leq j_1\leq\cdots\leq j_t\leq m$.

Définition 7.1.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un* objet simplicial *de $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant*

$$X_\bullet : \mathbf{\Delta}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Un morphisme d'objets simpliciaux est une transformation naturelle $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$. On note $s\mathcal{C}$ la catégorie d'objets simpliciaux de $\mathcal{C}$.

D'après ce qu'on vient de dire des morphismes de $\mathbf{\Delta}$, se donner un objet simplicial de $\mathcal{C}$ est équivalent à se donner des objets X_n, $n\geq 0$, et morphismes

$$\begin{array}{ll} d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}, & d_i = X(\delta_i), \\ s_i : X_n \longrightarrow X_{n+1}, & s_i = X(\sigma_i), \end{array}$$

que nous appellerons les morphismes face et dégénération de $X_\bullet$, respectivement, qui satisfont les identitées qui découlent des identitées simpliciales.

Un morphisme $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est alors une suite de morphismes $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$, $n\geq 0$, qui commutent avec les morphismes face et dégénération.

Exemples 7.1.2. (1) On note $\mathbf{S} = s\mathbf{Sets}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. À tout espace topologique on peut associer un ensemble simplicial, celui des simplexes singuliers: soit Δ^n le simplexe standard de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Delta^n = \{(t_0,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid 0\leq t_i\leq 1,\ \sum_{i=o}^{n} t_i = 1\}.$$

Si X est un espace topologique, on définit l'ensemble simplicial $S_\bullet(X)$ par

$$S_n(X) = \{\sigma : \Delta^n \longrightarrow X \mid \sigma \text{ continue}\},$$

avec morphismes face et dégénération donnés par

$$\begin{array}{rcl} (d_i\sigma)(t_0,\dots,t_{n-1}) & = & \sigma(t_0,\dots,t_{i-1},0,t_i,\dots,t_{n-1}), \\ (s_i\sigma)(t_0,\dots,t_{n+1}) & = & \sigma(t_0,\dots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\dots,t_{n+1}). \end{array}$$

(2) On note aussi Δ^n l'ensemble simplicial representé par $[n]$, c'est-à-dire,

$$(\Delta^n)_m = \mathbf{Hom}_{\mathbf{\Delta}}([m],[n]).$$

Si X,Y sont deux ensembles simpliciaux, on note $\mathbf{Hom_S}(X,Y)$ l'ensemble simplicial défini par

$$\mathbf{Hom_S}(X,Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X \times \Delta^n, Y),$$

avec morphismes face et dégénération adéquats, (cf. [Ma]).

7.1.3. Soit X un objet de $\mathcal{C}$. Le foncteur constant $\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini par X détermine un objet simplicial de $\mathcal{C}$ que nous nottons par le même symbol X. De cette façon on obtient un foncteur

$$\mathcal{C} \longrightarrow s\mathcal{C},$$

qui est pleinement fidèle et qui permet d'identifier $\mathcal{C}$ a une sous-catégorie pleine de $s\mathcal{C}$.

Définition 7.1.4. *Soient $X_\bullet$ un objet simplicial de $\mathcal{C}$ et X_{-1} un objet de $\mathcal{C}$. Une* augmentation de $X_\bullet$ vers X_{-1} *est un morphisme d'objets simpliciaux $f : X_\bullet \longrightarrow X_{-1}$.*

De manière équivalente, une augmentation de $X_\bullet$ vers X_{-1} est un morphisme $f : X_0 \longrightarrow X_{-1}$ tel que $fd_0 = fd_1$.

7.1.2. *Homotopie d'applications simpliciales.*

Il est possible de définir une rélation d'homotopie entre les morphismes des objets simpliciaux d'une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque, ainsi que la notion d'objet contractile.

Définition 7.1.5. *Soient $f,g : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ deux morphismes de $s\mathcal{C}$. Une* homotopie h de f à g *est une famille de morphismes*

$$h_i^n : X_n \longrightarrow Y_{n+1},\ n \geq 0,\ 0 \leq i \leq n,$$

qui satisfont les identitées suivantes (où nous écrivons h_i pour h_i^n).

$$\begin{aligned}
d_0 h_0 &= f, \qquad d_{n+1}h_n = g,\\
d_i h_j &= \begin{cases} h_{j-1}d_i, & i < j,\\ d_i h_{j+1}, & 0 \leq i-1 = j < n,\\ h_j d_{i-1}, & 0 \leq j < i-1 \leq n,\end{cases}\\
s_i h_j &= \begin{cases} h_{j+1}s_i, & i \leq j,\\ h_j s_{i-1}, & i > j.\end{cases}
\end{aligned}$$

On doit remarquer que cette notion d'homotopie n'est pas symétrique.

Définition 7.1.6. *On dit qu'un objet simplicial augmenté $d_0 : X_\bullet \longrightarrow X_{-1}$ est* contractile *si, pour tout $n \geq -1$ il existe des morphismes $s_{-1} : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ tels que*

$$\begin{aligned}
d_0 s_{-1} &= id,\\
d_{i+1}s_{-1} &= s_{-1}d_i, \qquad \forall i \geq 0,\\
s_j s_{-1} &= s_{-1}s_{j-1}, \qquad \forall j \geq 0.
\end{aligned}$$

Exercice 7.1.7. Prouver qu'un objet augmenté $f : X_\bullet \longrightarrow X_{-1}$ est contractile si, et seulement si, il existe un morphisme d'objets simpliciaux $g : X_{-1} \longrightarrow X_\bullet$ tel que $fg = id$ et il existe une homotopie de id sur gf.

7.1.8. Dualement, on définit un *objet cosimplicial de* $\mathcal{C}$ comme un foncteur covariant $X^\bullet : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}$. Il est détérminé par une suite d'objets X^n, $n \geq 0$, et morphismes $d^i = X^\bullet(\delta_i)$, $s^i = X^\bullet(\sigma_i)$ qui satisfont les identités simpliciales. Par exemple, les ensembles simpliciaux Δ^n, $n \geq 0$, déterminent un espace cosimplical $\Delta : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{S}$.

Un objet cosimplicial de $\mathcal{C}$ est un objet simplicial de $\mathcal{C}^{op}$, donc on peut tranférer les notions de categorie des objets simpliciaux de $\mathcal{C}$, par exemple l'homotopie, à celle des objets cosimpliciaux. On note $cs\mathcal{C}$ la catégorie des objets cosimpliciaux de $\mathcal{C}$, on a $cs\mathcal{C} = (s\mathcal{C}^{op})^{op}$.

7.2. **Groupes abéliens simpliciaux.**

On va rappeller maintenant la correspondence de Dold-Kan pour les groupes abéliens simpliciaux, ou plus généralement pour les objets simpliciaux d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Voir pour les détails [Ma] ou [GJ].

Soit $A_\bullet$ un groupe abélien simplicial, c'est-à-dire, un objet de $s\mathcal{A}b$. On peut lui associer deux complexes de chaînes, le complexe A_* et le complexe normalisé NA_*.

Le degré n du complex A_* est A_n, avec différentielle

$$d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i : A_n \longrightarrow A_{n-1}.$$

Le degré n du complexe normalisé NA_* est défini par

$$NA_n = A_n \cap \ker d_0 \cap \cdots \cap \ker d_{n-1},$$

avec différentielle définie par $(-1)^n d_n : NA_n \longrightarrow NA_{n-1}$.

L'inclusion $NA_n \longrightarrow A_n$ définit un monomorphisme de complexes qui est une équivalence homotopique, donc les deux complexes ont la même homologie, $H_*(NA) = H_*(A)$. De plus, si DA dénote le sous-complexe de A généré en chaque degré par les simplexs dégenerés (c'est-à-dire, les images des morphismes de dgénération s_i), alors la composition

$$NA \longrightarrow A \longrightarrow A/DA,$$

est un isomorphisme de complexes de chaînes.

Réciproquement, si K_* est un complexe de chaînes de groupes abéliens, on peut lui associer un groupe abélien simplicial $\Gamma(K)$ déterminé par

$$\Gamma(K)_n = \bigoplus_{[n] \twoheadrightarrow [k]} K_k,$$

où la somme parcourt l'ensemble de morphismes surjectifs $[n] \twoheadrightarrow [k]$ et les morphismes face et dégénération sont définis convenabelement, (voir [Ma]).

Corespondance de Dold-Kan 7.2.1. *Les foncteurs*

$$N : s\mathcal{A}b \leftrightarrows \mathbf{C}_+(\mathcal{A}b) : \Gamma$$

définissent une équivalence de catégories. □

De plus, cette correspondance transforme les homotopies simpliciales en homotopies de la catégorie des complexes, c'est-à-dire, on a:

Proposition 7.2.2. *Soit h une homotopie entre les morphismes de groupes abéliens simpliciaux $f,g : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$. Alors, $\sum h_i : A_n \longrightarrow B_{n+1}$ définit une homotopie de morphismes de complexes $f \sim g : A_* \longrightarrow B_*$.* □

Il est clair que l'homotopie $h = \sum h_i$ ainsi définie vérifie $h(DA) \subseteq DB$ et, par passage au quocient, induit une homotopie $h : N(f) \sim N(g) : NA_* \longrightarrow NB_*$.

En particulier, on obtient le résultat suivant pour les groupes abéliens augmentés contractiles.

Corollaire 7.2.3. *Soit $A_\bullet \longrightarrow A_{-1}$ un groupe abélien augmenté contractile. Alors le complexe augmenté $A_* \longrightarrow A_{-1}$ est un complexe contractile, donc il est exact.* □

7.2.4. On résume quelques propriétées de la correspondance de Dold-Kan qui nous seront utiles pour la suite, (voir [GJ]).

(1) Soit A un groupe anélien simplicial, alors
$$\pi_n(A,0) = H_n(NA) = H_n(A),\ n \geq 0.$$
(2) Un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de groupes abéliens simpliciaux est une équivalence faible si, et seulement si, $Nf : NA \longrightarrow NB$ est un quasi-isomorphisme de complexes; donc la correspondance de Dold-Kan induit une équivalence des catégories homotopiques
$$Ho(s\mathcal{A}b) \cong Ho(\mathbf{C}_+(\mathcal{A}b)).$$
(3) Soit A un groupe abélien simplicial et $\overline{W}A$ la construction d'Eilenberg-MacLane de A, qui en degré n est donnée par la somme directe
$$\overline{W}A_{n+1} = A_n \oplus A_{n-1} \oplus \cdots \oplus A_0,$$
avec morphismes face et dégénération convenables. Alors,
$$N\overline{W}A_n = NA_{n-1},$$
donc $N\overline{W}A = NA[-1]$; c'est-à-dire, la construction $\overline{W}$ correspond au foncteur de translation des complexes de chaînes.

7.2.5. Dualisant tout ce qu'on a dit de la correspondance de Dold-Kan on trouve une équivalence de catégories entre la catégorie des groupes abéliens cosimpliciaux et celle des complexes de cochaînes positifs de groupes abéliens
$$N : cs\mathcal{A}b \leftrightarrows \mathbf{C}^+(\mathcal{A}b) : \Gamma.$$
Dans ce cas, le complexe normalisé NA^* est donné par
$$NA^n = A^n \cap \ker s^0 \cap \cdots \cap \ker s^{n-1},$$
avec différentielle $d = \sum(-1)^i d^i$.

7.3. **La résolution standard associée à un cotriple.**

Cette section est basé sur [ML].

Définition 7.3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un* triple *(ou monade)* $(\mathsf{T},\varepsilon,\eta)$ *sur $\mathcal{C}$ est un foncteur* $\mathsf{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *et deux transformations naturelles* $\varepsilon : id \Rightarrow \mathsf{T}$, $\eta : \mathsf{TT} \Rightarrow \mathsf{T}$*, tels que*

$$\eta(\mathsf{T}\eta) = \eta(\eta\mathsf{T}),$$
$$\eta(\mathsf{T}\varepsilon) = id = \eta(\varepsilon\mathsf{T}).$$

L'exemple de triple le plus important est celui défini par un couple de foncteurs adjoints: soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur adjoint à droite de F, c'est-à-dire, qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),D) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,G(D)),$$

pour des objets $C \in Ob\mathcal{C}$ et $D \in Ob\mathcal{D}$ quelconques. On définit un triple sur $\mathcal{C}$ comme suit: soit $\mathsf{T} = GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. D'après l'adjonction entre G et F, il existe des transformations naturelles de foncteurs $id \Rightarrow GF$ et $FG \Rightarrow id$. La première définit ε, tandis que, à l'aide de la seconde, on définit η selon

$$\eta : \mathsf{TT} = G(FG)F \Rightarrow U(id)F = \mathsf{T}.$$

7.3.1. *Résolution cosimplicial standard définie par un triple.*

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $(\mathsf{T},\varepsilon,\eta)$ un triple définit sur $\mathcal{C}$.

Définition 7.3.2. *Soit C un objet de $\mathcal{C}$. On appelle* résolution cosimplicial standard de C défini par T *l'objet cosimplicial* $\mathsf{BT}^\bullet(C)$ *de $\mathcal{C}$ définit par*

$$\mathsf{BT}^n(C) = \mathsf{T}^{n+1}(C),$$

avec morphismes de face et dégénération donnés par

$$\begin{aligned} d^i &= \mathsf{T}^i\eta\mathsf{T}^{n-i}, \\ s^i &= \mathsf{T}^i\varepsilon\mathsf{T}^{n-i}. \end{aligned}$$

Les identités simpliciales s'ensuivent aisément des identitées des compositions de T, ε et η d'un triple.

La transformation naturelle $\varepsilon : id \Rightarrow \mathsf{T}$ définit une augmentation $C \longrightarrow \mathsf{BT}^\bullet(C)$. La justification du terme résolution pour $\mathsf{BT}^\bullet(C)$ vient du résultat suivant.

Proposition 7.3.3. *Soit* $\mathsf{T} = GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *le triple associé à un couple de foncteurs adjoints* $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$*. Alors, l'objet cosimplicial augmenté de $\mathcal{D}$*

$$FC \longrightarrow F\mathsf{BT}^\bullet(C),$$

est contractile.

Preuve. La transformation naturelle η du triple permet de définir

$$s_{-1} : F\mathsf{TT}^n = F(GF)\mathsf{T}^n = (FG)F\mathsf{T}^n \xrightarrow{\eta F\mathsf{T}} F\mathsf{T}^n,$$

et on prouve aisément qu'on obtient ainsi une contraction. □

En particulier, si $\mathcal{D} = \mathcal{A}b$ est la catégorie des groupes abéliens, on trouve que, d'après le Corollaire 7.2.3, le complexe de cochaînes $F\mathsf{BT}^*(C)$ est une résolution de FC pour tout objet C de $\mathcal{C}$.

Références

[B] J. Boardman, *Conditionally convergent spectrale sequences.* In Geometric Applications of Homotopy Theory. Springer LNM **658**, (1978), 80–130.

[BG] K. Brown, S. Gersten, *Algebraic K-theory as generalized sheaf cohomology.* Higher K-theories. Springer LNM **341** (1973), 266–292.

[BK] A. Bousfield, D. Kan, *Homotopy limits, completions and localzations.* Springer LNM **304**. Springer, 1987.

[BK2] A. Bousfield, D. Kan, *A second quadrant homotopy spectrale sequence.* Trans. AMS, **177** (1973), 305–318.

[BN] M. Bökstedt, A. Neeman, *Homotopy limits in triangulated categories.* Comp. Math. **86**, (1993), 209–234.

[Bo] Bourbaki, N., *Algèbre. Chap. X.* Hermann éd.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg *Homological Algebra.* Princeton UP, 1956.

[CH] T. Y. Chow, *You could have invented spectrale sequences.* Notices of the AMS, **53**, (January 2006), 15–19.

[EGA] Grothendieck, A., Dieudonné, J., *Élements de Géometrie Algébrique III.* Publ. IHES **11**, 1961.

[EM] S. Eilenberg, J. Moore, *Limits and spectrale sequences.* Topology —bf 1, (1962), 1–24.

[Go] R. Godement, *Algèbre homologique et théorie des faisceaux.* Hermann éd. 1958

[G] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Math. J. **9**, (1957), 119–221.

[GJ] P. Goerss, J.F. Jardine, *Simplicial homotopy theory.* Birkhäuser Veralg, 1999.

[GM] I. Guelfand, Y. Manin, *Methods of Homological Algebra.* Springer Verlag, 1997/2003.

[GNPR] F. Guillén, V. Navarro, P. Pascual, A. Roig, *A Cartan-Eilenberg approach to homotopical algebra.* ArXiv 0707.3704. To appear in Journal of Pure and App. Algebra, 2009.

[J] J. F. Jardine, *Simplicial Presheaves.* Jour. of Pure and Appl. Algebra, **47** (1987), 35–87.

[K] B. Keller, *Cyclic homology.* Documenta Math. **3**, (1998), 231–259.

[Ma] J.P. May, *Simplicial objects in Algebraic Topology.* Van Nostrand, 1967.

[ML] S. MacLane, *Categories for the working mathematician.* Springer Verlag, 1971.

[M] McCleary *User's guide to spectrale sequences.* Pubblish or Perish, 1985.

[Q] D. Quillen, *Algebraic algebraic K-theory, I.* Higher K-theories. Springer LNM **341** (1973), 85–147.

[Sp] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes.* Comp. Math. **65** , (1988), 121–154.

[Sw] R. Switzer, *Algebraic Topology. Homotopy and Homology.* Springer V. 1975.

[T] R. Thomason, *Algebraic K-theory and étale cohomology.* Ann. ENS, **98** (1985), 437–552.

[W] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge U.P. 1994.

[W2] C. Weibel, *Cyclic homology for schemes.* Proc. AMS, **124**, (1996), 1655–1662.

(H. Hamraoui) Département de mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences Aïn Chock, Université Hassan II Aïn Chock, Km 8, Route El Jadida, B.P. 5366 Mâarif, Casablanca (Maroc)

E-mail address: `hamraoui@facsc-achok.ac.ma`

(P. Pascual) Departament de Matemàtica Aplicada 1, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona (Spain).

E-mail address: `pere.pascual@upc.edu`