T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^4 DE REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Doğan ÜNAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Murat TOSUN

Ekim 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^4 DE REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Doğan ÜNAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 07 / 09 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat TOSUN	**Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY**	**Prof. Dr. İbrahim OKUR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya beni yönlendirip, bilgi ve tecrübesi ile destek veren, çalışmanın her safhasında yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Hocam Doç. Dr. Murat TOSUN'a saygı ve teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Tez çalışmam sırasında sorularıma sabırla cevap vererek bana yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY'a ve Yrd. Doç Dr. Zeynep AZAK'a teşekkür ederim.

Bu çalışma esnasında yardımlarını esirgemeyen aileme ve mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarımıza teşekkürlerimi sunarım.

Doğan ÜNAL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E^n	: $n-$boyutlu Öklid uzayı
$T_M(P)$	: $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$\chi(M)$	: M nin vektör alanları uzayı
S	: M nin Ricci eğrilik tesörü
Γ_{ij}^k	: Christoffel sembolleri
$\varphi(t,v)$	: Regle yüzey
D	: Riemann koneksiyonu
r_{sk}	: M nin skalar eğriliği
ξ	: Birim vektör alanı
M^*	: Hiperregle yüzey
R	: Riemann eğrilik tensörü
M^{**}	: E^n de 2-boyutlu bir regle yüzey

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Regle Yüzey, Striksiyon Eğrisi, Birinci Temel Form, İkinci Temel Form, Eğrilikler.

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde E^3, 3-boyutlu Öklid Uzayı'nda regle yüzeyler tanıtılmış ve bu regle yüzeylerle ilgili temel karakterizasyonlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde E^4, 4-boyutlu Öklid Uzayı'nda regle yüzeler ve hiperregle yüzeyler tanıtılarak, bu regle yüzeylerle ilgili bazı teoremler verilmiştir. Ayrıca E^n, n-boyutlu Öklid Uzayı'nda 2-boyutlu regle yüzeler tanıtılmış, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

RULED SURFACES IN E^4

SUMMARY

Keywords: Euclidean Space, Ruled Surface, Striction Curve, First Fundamental Form, Second Fundamental Form, Curvatures.

This study is prepared as three chapters. In the first chapter of this study, definitions and theorems are given which are about curves and surfaces theories.

In the second chapter of this study, the ruled surfaces in E^3 3-dimensional Euclidean Space are defined and basic characterizations are given about this surfaces.

In the third chapter of this study, the ruled surfaces in E^4 4-dimensional Euclidean space and hyperruled surfaces are defined and some theorems are given about this surfaces. Further the 2-dimensional ruled surfaces in E^n n-dimensional Euclidean space are defined and basic definitions and theorems are given.

BÖLÜM 1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım1.1. A, boştan farklı bir cümle ve V de bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir [Hacısalihoğlu, 1992].

(i). $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

(ii). $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \quad x = (x_i), \qquad y = (y_i), \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1.1}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da Öklid uzayı adını alır. Özel olarak $A = \mathbb{R}^n$ noktalar cümlesi $V = \mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart vektör uzayı olarak alınırsa, Öklid iç çarpımı ile birlikte $A, \mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleştirilmiş bir n-boyutlu Standart Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.3. $d: E^n \times E^n \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x,y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Teorem1.1. E^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.4. $d: E^n \times E^n \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir. Bu iç çarpımın $\mathbb{R}^n$ de bir diğer ifadesini, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \|\beta\| \cos \theta$$

biçiminde yazabiliriz. Burada θ açısı α, β vektörleri arasındaki açı olup pozitif yönde ölçülür. Buradan

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

yazılır. Böylece $\forall x, y, z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\| \|\overrightarrow{yz}\|} \tag{1.2}$$

den hesaplanan θ reel sayısıdır [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.5. E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.6. E^n de $E_0 = (0,0,\dots,0)$, $E_1 = (1,0,\dots,0), \dots$, $E_n = (0,0,\dots,1)$ olmak üzere $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına Standart Öklid çatısı denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.7. E^n de bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

şeklindedir öyle ki

$$x_i : E^n \to \mathbb{R}, \qquad 1 \le i \le n$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n-lisine de E^n in Öklid koordinat sistemi adı verilir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.8. X bir cümle ve X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay adı verilir [Hacısalihoğlu, 1992].

i) $X, \emptyset \in \tau$

ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

iii) $A_i \in \tau,\ i \in I,\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Tanım1.9. X ve Y birer topolojik olsunlar. Eğer

$$f: X \rightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.10. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik manifold adını alır [Hacısalihoğlu, 1992].

(i) M bir haussdorf uzayıdır.

(ii) M nin herbir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım1.11. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. Bu taktirde topolojik manifold tanımı gereğince U bir homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir. Yani

$$: U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

$(, W)$ ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.12. M bir topolojik n-manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir $_\alpha$ homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan $(_\alpha, U_\alpha)$ haritalarının

$$\{(_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

koleksiyonuna bir atlas denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.13. Bir topolojik n-manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\emptyset_{\alpha\beta}$ ve $\emptyset_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S atlasına M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.14. V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.15. A afin uzayının P noktasındaki tüm tanjant vektörlerinin cümlesi $T_A(P)$ olsun. $T_A(P)$ de toplama ve skalar ile çarpma işlemleri, sırasıyla,

$$\oplus : T_A(P) \times T_A(P) \to T_A(P)$$

$$\big((P, \vec{v}), (P, \vec{u})\big) \to (P, \vec{v}) \oplus (P, \vec{u}) = (P, \vec{v} + \vec{u})$$

veya

$$(\vec{v}_P, \vec{u}_P) \to \vec{v}_P \oplus \vec{u}_P = (\vec{v} + \vec{u})_P$$

ve

$$\odot : \mathbb{R} \times T_A(P) \to T_A(P)$$

$$\big(\lambda, (P, \vec{v})\big) \to \lambda \odot (P, \vec{v}) = (P, \lambda\vec{v})$$

veya

$$(\lambda, \vec{v}_P) \to \lambda \odot \vec{v}_P = (\lambda\vec{v})_P$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{R}$, V vektör uzayının cismini göstermektedir. $\{T_A(P)\ ,\ \oplus\ ,\ \mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \odot\}$ altılısının bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.16. M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $P \in V$ noktasındaki tanjant uzayların birleşimi

$$\bigcup_{P\in V} T_V(P)$$

ile gösterilsin.Bir

$$\pi : \bigcup_{P\in V} T_V(P) \to V$$

dönüşümü $\forall t_P \in T_V(P)$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_P) = P$$

biçiminde tanımlansın. Bu taktirde $V \subseteq M$ operatörü üzerindeki bir vektör alanı

$$X: V \to \bigcup_{P\in V} T_V(P)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I: V \to V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur.

Eğer M manifoldu yerine E^n n-boyutlu Öklid uzayı alınırsa E^n de bir X vektör alanını, $\forall P \in E^n$ noktasına bir X_P tanjant vektörünü karşılık getiren fonksiyon olarak düşünülebilir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.17. $f: E^n \to R$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\vec{v}_P \in T_{E^n}(P)$ olsun. Bu durumda $\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere,

$$\vec{v}_P[f] = \frac{d}{dt}\Big(f\big(P_1 + t(Q_1 - P_1), \dots, P_n + t(Q_n - P_n)\big)\Big) \mid_{t=0} \qquad (1.3)$$

reel sayısına f nin $\vec{v}_P$ ye göre türevi denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Teorem1.2. $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $P \in E^n$ ve $f: E^n \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu taktirde, f nin $\vec{v}_P$ tanjant vektörü yönündeki türevi

$$\vec{v}_P[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_P \tag{1.4}$$

dir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.18. $X \in \chi(E^n)$ ve $f \in C\big(E^n, \mathbb{R}\big)$ olsun. $\forall P \in E^n$ için

$$\big(X(f)\big)(P) = X_P[f]$$

olmak üzere, $X[f] \in C\big(E^n, \mathbb{R}\big)$ fonksiyonuna, f nin X yönündeki türevi denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Teorem1.3. E^n de bir eğri α ve diferensiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon f ise

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d\big(f(x)\big)}{dt} \mid_t = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) = D_{\alpha'(t)} f$$

dir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.19. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\alpha : I \to E^n, \quad I \subseteq R$$

$$t \to \alpha(t)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir eğri adı verilir. Burada t ye α eğrisinin parametresi, (I, α) ikilisine de α eğrisinin koordinat komşuluğu denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.20. E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \to I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi (M nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.21. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I,α) ya göre birim hızlı eğri, eğrinin $s \in I$ parametresine de yay parametresi adı verilir.

Ayrıca $a,b \in I$ olmak üzere, a dan b ye M eğrisinin yay uzunluğu diye, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^a \|\alpha'(t)\|dt, \qquad t \in I$$

reel sayısına denir. Bu değer koordinat komşuluğundan bağımsızdır [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.22. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.23. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $=\{\alpha',\alpha'',\dots,\alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\alpha^k,\ k > r$ için;

$$\alpha^k \in Sp\{\}$$

olmak üzere, den elde edilen $\{V_1,V_2,\dots,V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m),V_2(m),\dots,V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Herbir $V_i,\ 1 \le i \le r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.24. $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı

$$\{V_1(s),V_2(s),\dots,V_r(s)\}$$

olsun. Buna göre

$$k_i: I \to R, \quad 1 \le i < r,$$
$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s)\rangle \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir [Hacısalihoğlu, 1992].

Tanım1.25. M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle \ , \ \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.26. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

1) $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z, \ \ \forall X, Y, Z \in \chi(M), \ \ \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

2) $D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y, \ \ \forall X, Y \in \chi(M), \ \ \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir. Özel olarak M manifoldu bir Riemann manifoldu olarak alınırsa, koneksiyonun iç çarpım ile ilgisi düşünülebilir. Bu ise bizi Riemann koneksiyonu kavramına götürür [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.27. E^n Öklid uzayının Riemann koneksiyonu $\overline{D}$ ve M manifoldunun Riemann koneksiyonu da D olsun. M üzerinde her X, Y vektör alanları için

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + V(X, Y) \tag{1.6}$$

eşitliğini sağlayan vektör değerli V tensör alanına ikinci temel formu, bu eşitliğe de Gauss denklemi denir.

Burada $D_X Y$ ve $V(X,Y)$, sırasıyla, $\overline{D}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. ξ, M nin normal vektör alanı olmak üzere $\overline{D}_X \xi$, teğet ve normal bileşenleri cinsinden

$$\overline{D}_X \xi = -A_\xi(X) + D_X \xi \tag{1.7}$$

şeklinde yazılır ve Weingarten denklemi adını alır [Chen, 1973]. (1.6) ve (1.7) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle V(X,Y), \xi \rangle \tag{1.8}$$

olduğu görülebilir.

Tanım1.28. M, m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve V de M nin ikinci temel formu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$V(X,Y) = 0$$

ise M ye E^n de total geodeziktir denir [Chen, 1973].

Tanım1.29. M, E^n de m-boyutlu Riemann manifoldu ve $\xi \in \chi(M)$ birim normal vektör alanı olsun.

$$G(P,\xi) = detA_\xi, \qquad P \in M \tag{1.9}$$

değerine $P \in M$ noktasında ξ doğrultusundaki Lipschitz-Killing eğriliği denir [Thas, 1978a].

$G(P)$, Gauss eğriliği olmak üzere, E^n deki bütün yüzeyler için

$$G(P) = \sum_{j=1}^{n-m} G(P,\xi_j) \tag{1.10}$$

dir. $G(P) = 0$ ise $P \in M$ için M yüzeyine açılabilirdir denir [Thas, 1978a].

Tanım1.30. E^n de vektör alanlarının uzayı $\chi(E^n)$ olsun. $X, Y, Z \in \chi(E^n)$ olmak üzere,

$$\bar{R}: \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$

(1.11)

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{D}_x\big(\bar{D}_y Z\big) - \bar{D}_y(\bar{D}_x Z) - D_{[X,Y]}Z$$

olarak tanımlanan $\bar{R}$ fonksiyonuna E^n in eğrilik fonksiyonu ve $P \in E^n$ noktasındaki $\bar{R}(X_P, Y_P)Z_P$ tensörüne de p noktasındaki eğrilik tensörü veya kısaca E^n in p deki eğriliği denir [Chen, 1973].

Teorem1.4. E^n, n-boyutlu Öklid uzayının her noktada eğriliği sıfırdır.

Tanım1.3. M, m-boyutlu Riemann manifoldu olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$R: T_M(P) \times T_M(P) \times T_M(P) \times T_M(P) \to \mathbb{R}$$

$$(1.12)$$

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle x_1, R(x_3, x_4)x_2 \rangle$$

şeklinde tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensör alanına Riemann eğrilik tensör alanı ve bir $P \in M$ noktasındaki değerine de Riemann eğriliği denir ve

$$K(P) = \langle X, R(X,Y)Y \rangle \tag{1.13}$$

ile gösterilir [Chen, 1973]. V ikinci temel form olmak üzere

$$\langle X, R(X,Y)Y \rangle = \langle V(X,X), V(Y,Y) \rangle - \langle V(X,Y), V(X,Y) \rangle \tag{1.14}$$

olarak ifade edilir.

Tanım1.32. M, m-boyutlu Riemann manifoldu ve R de Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ sistemi $T_M(P)$ nin ortonormal bazı olmak üzere

$$S: T_M(P) \times T_M(P) \to \mathbb{R}$$

$$(1.15)$$

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

şeklinde tanımlanan S tensör alanına Ricci eğrilik tensör alanı ve $S(X,Y)$ nin $P \in M$ noktasındaki değerine de Ricci eğriliği denir [Chen, 1973].

Tanım1.33. M, m-boyutlu Riemann manifoldu ve $P \in M$ için $T_M(P)$ nin ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olsun. S, M nin Ricci eğrilik tensör alanı olmak üzere,

$$r_{sk} = \sum_{i=1}^{m} S(e_i, e_i) \tag{1.16}$$

şeklinde tanımlanan r_{sk} değerine M nin skalar eğriliği denir [Chen, 1973].

Tanım1.34. M, bir Riemann manifoldu ve M nin herbir U koordinat komşuluğu üzerinde yerel koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve tanjant uzayının bazı $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$ olsun.

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k\,, \qquad 1 \le i, j \le n \tag{1.17}$$

olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^k : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

reel değerli Γ_{ij}^k fonksiyonları Christoffel sembolleri olarak adlandırılır.
$[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$ dir. Böylece

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{1.18}$$

dır [Chen, 1973].

Önerme1.1. U üzerinde yerel koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve tanjant uzayının bazı $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$ olsun.

$$W = \sum_j w_j \partial_j$$

olmak üzere

$$D_{\partial_i}\left(\sum_j w_j \partial_j\right) = \sum_k \left\{\frac{\partial w_k}{\partial x_j} + \sum_j \Gamma_{ij}^k w_j\right\} \partial_k$$

dır. Burada Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m} g^{km}\left[\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right] \qquad (1.19)$$

ile verilir ve Koszul eşitliği adını alır. Burada D_{∂_j}, ∂_i yönündeki kovaryant türev ve g^{km} ise g_{km} nin ters matrisidir.

Lemma1.1. E^n de yerel koordinat sistemine göre

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

ve

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \qquad (1.20)$$

dir [Chen, 1973].

Tanım1.35. E^n, n-boyutlu Öklid uzayına $(n-1)$-boyutlu bir yüzey veya $(n-1)$-yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \{\, x \in U \subset E^n \mid f: U \to \mathbb{R},\ x \to f(x) = c, U \text{ bir açık alt küme}\} \qquad (1.21)$$

$\nabla f\mid_P \neq 0$, $\forall P \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. E^n de bir $(n-1)$-yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.36. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} K&: M \to \mathbb{R} \\ P &\to K(P) = detS(P) \end{aligned} \qquad (1.22)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği (total eğrilik) denir [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.37. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$H: M \to \mathbb{R}$$

$$P \to H(P) = \text{İz}\big(S(P)\big) \tag{1.23}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin bir P noktasındaki ortalama eğriliği denir [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.38. E^n in bir M hiperyüzeyi üzerinde q-yuncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty\big(M, \mathbb{R}\big)$$

$$(X, Y) \to I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y\rangle \tag{1.24}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.39. M, E^n de diferensiyellenebilir bir yüzey ve M nin P noktasındaki tanjant vektörleri v_P, w_P olsunlar. M nin birinci temel formu bu tanjant vektörlerin iç çarpımıdır. Yani

$$I\big(v_p, w_p\big) = \langle v_p, w_p\rangle \tag{1.25}$$

dır. Böylece (1.25) denklemi gözönüne alınırsa

$$I(ax_u + bx_v, ax_u + bx_v) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$$

dir. Birinci temel form açık olarak Riemann metriğiyle

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklinde verilebilir ve yüzey üzerindeki eğrinin yay uzunluğunu tanımlar. Burada birinci temel formun E, F ve G katsayıları

$$E = \|x_u\|^2 = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2$$

$$F = x_u . x_v = \frac{\partial x}{\partial u} . \frac{\partial x}{\partial v} \tag{1.26}$$

$$G = \|x_v\|^2 = \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2$$

şeklindedir [Chen, 1973].

Tanım1.40. M, E^n de diferensiyellenebilir bir yüzey ve M nin P noktasındaki tanjant vektörleri v_P, w_P olsunlar. M nin ikinci temel formu bir simetrik bilineer formdur. O halde

$$II(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle \tag{1.27}$$

dir. Sıfırdan farklı her tanjant vektör için

$$II(ax_u + bx_v, ax_u + bx_v) = ea^2 + 2fab + gb^2$$

dir. İkinci temel form açık olarak şöyle tanımlanabilir:

$$e = \sum_i x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}$$

$$f = \sum_i x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v}$$

$$g = \sum_i x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}$$

olmak üzere

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

şeklindedir. Öyle ki N, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere, ikinci temel formun e, f ve g katsayıları

$$e = -N_u x_u$$

$$= N.x_{uu}$$

$$f = -N_v x_u$$

$$= N.x_{uv}$$

$$= N.x_{vu}$$

$$= -N_u x_v$$

$$g = -N_v x_v$$

$$= N.x_{vv}$$

dir. Buradan ise

$$e = \frac{det(x_{uu} x_u x_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$f = \frac{det(x_{uv} x_u x_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad (1.28)$$

$$g = \frac{det(x_{vv} x_u x_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

dir [Chen, 1973].

Tanım1.41. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N olarak verilsin. E^n de Riemann koneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N \qquad (1.29)$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.42. E^{n+1} de bir M hiperyüzeyi üzerinde geodezik denen eğri öyle bir parametrik eğridir ki bu eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M ye ortogonaldir. Yani eğri

$$\alpha: I \to M$$

ise

$$\ddot{\alpha}(t) \in T_M(\alpha(t)) \quad , \quad \forall t \in I$$

dır [Hacısalihoğlu, 1993].

Teorem1.5. Geodeziklerin her noktadaki hız vektörlerinin uzunlukları sabittir [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım1.43. E^{n+1} in bir hiperyüzeyi M ve bir $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. $X_P, Y_P \in T_M(P)$ için,

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$$

oluyorsa bu iki tanjant vektöre eşleniktirler denir.

E^{n+1} in bir n-hiperyüzeyi M ve bir $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Bir $X_P \in T_M(P)$ tanjant vektörü için,

$$\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$$

oluyorsa X_P doğrultusuna M in P noktasındaki bir asimptotik doğrultusu adı verilir [Hacısalihoğlu, 1993].

BÖLÜM 2. E^3 TE REGLE YÜZEYLER

Bu kısımda, E^3 de regle yüzey kavramını ele alacağız ve regle yüzeyler için temel özellikleri vereceğiz.

Tanım2.1. $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall \; P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir [Juza, 1962].

Teorem2.1. $M \subset E^3$ bir regle yüzey olsun. O zaman M nin doğrultmanları, M de hem asimptotik ve hem de geodezik çizgilerdir [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat: $X \in \chi(M)$, M nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun, Her bir doğrultman, bir doğru olduğundan, E^3 de geodeziktir. O halde

$$D_X \; X = \vec{0}$$

dır. Bu ise $\bar{D}_X \; X \; = D_X \; X + \langle S(X), X \rangle \, N$ Gauss denkleminden,

$$\bar{D}_X \; X = \langle S(X), X \rangle \, N$$

dir.

$$\bar{D}_X \; X = \in T_M \quad \text{ve} \quad N \in T_M{}^{\perp}, \; T_M \cap T_M{}^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

olduğundan

$$D_X\, X = \vec{0} \quad \text{ve} \quad \langle S(X), X\rangle = 0$$

olur. Böylece $\bar{D}_X\, X = \vec{0}$ olduğundan, M nin doğrultmanları, M nin geodezik çizgileridir. Ayrıca $\langle S(X), X\rangle$ = 0 olduğundan bu ifade eder ki doğrultmanlar asimptotik çizgilerdir.

Teorem2.2. $M \subset E^3$ bir regle yüzey ve M nin gauss eğrilik fonksiyonu K olsun. O zaman , her $P \in M$ için $K(P) \leq 0$ dır [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat. $P \in M$ noktasındaki doğrultmanların teğet vektör alanı X ve *X(M)* nin bir ortonormal bazı {*X*,*Y*} olsun. Bu baza göre, *M* nin *S* şekil operatörünün matrisi;

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(X), X\rangle & \langle S(Y), X\rangle \\ \langle S(X), Y\rangle & \langle S(Y), Y\rangle \end{bmatrix}$$

dir. Burada Teorem2.1 gereğince $\langle S(X), X\rangle$ =0 olduğundan

$$K = \det S = -(\langle S(X), Y\rangle)^2 \qquad \Rightarrow \; K \leq 0$$

dır.

Şimdi regle yüzeyler için atlas kavramını verelim. *M* bir regle yüzey olsun.

$$\alpha \;: I \to M$$

eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere , $\forall$ $t \in I$ için α(t) noktasında M nin doğrultmanı T ile lineer bağımsız olacak şekilde verilsin. Böylece α(t) $\in M$ noktasındaki doğrultman

$$\beta : \mathbb{R} \to M$$

$$\beta(v) = (\alpha_1(t) + v\alpha_1(t) + ... + \alpha_3(v) + v\alpha_3(t))$$

şeklindedir öyle ki $\alpha_i(t) \in \mathbb{R},\ 1 \leq \text{i} \leq 3$, skalarları, doğrultmanın α(t) noktasındaki bileşenidir. O halde

$$\varphi\text{:I} \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$\varphi(t,v) = \ (\alpha_1(t) + v\alpha_1(t) + ... + \alpha_3(v) + v\alpha_3(t))$$

olmak üzere; $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ sistemi, M için bir atlastır.

$a : I \rightarrow M$ eğrisinin yay parametresi ile verildiğini ve doğrultmanın üzerindeki

$$X\big|_{a(t)} = \sum_{i=1}^{3} a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \ \big|_{a(t)}$$

tanjant vektörünün de her $t \in I$ için birim vektör olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\alpha : I \rightarrow M$$

eğriside $\langle T, X \rangle$=0 olacak şekilde seçilmiş ise M nin birim normali N olmak üzere

$$\{T,X,N\}$$

sistemi, α boyunca bir ortonormal sistem meydana getirir.

Şimdi $\{T,X,N\}$ sisteminin α boyunca değişimi, yani, T ye göre her birinin kovaryant türevlerini bulalım. α boyunca

$$1 = \langle T,T \rangle = \langle N,N \rangle = \langle X,X \rangle \ \Rightarrow \ 0 = T\big[\langle X,X \rangle\big] = 2\langle D_T X, X \rangle$$

$$\Rightarrow \langle D_T X, X \rangle$$

dır. Benzer şekilde

$$\langle D_T N, N \rangle = 0$$

ve

$$\langle D_T T, T\rangle = 0$$

elde edilir. Burada, a, b, c$\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \mathrm{a}\big|_{a(t)} &= \langle D_T T, X\rangle\big|_{a(t)} \\ \mathrm{b}\big|_{a(t)} &= \langle D_T T, N\rangle\big|_{a(t)} \\ \mathrm{c}\big|_{a(t)} &= \langle D_T X, N\rangle\big|_{a(t)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} D_T T &= \mathrm{a}X + bN \\ D_T X &= -\mathrm{a}T + cN \\ D_T N &= -bT - cX \end{aligned} \tag{2.2}$$

olur. Böylece matris formunda,

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{a} & b \\ -\mathrm{a} & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix}$$

dır.

$\varphi(t,v) = a(t) + vX(t)$ ile verilen ifade $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlasında her $v \in \mathbb{R}$ sabit değeri için M nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = T + vD_T X$$

olmak üzere $D_T X = -\mathrm{a}T + \mathrm{c}\mathrm{N}$ olduğundan

$$A = (1 - \mathrm{a}v)T + \mathrm{c}vN$$

şeklinde bulunur. O halde A vektör alanı da X e diktir [Hacısalihoğlu, 1993].

Bir doğrultman boyunca , M nin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, $c \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu ile yakından ilgilidir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem2.3. Bir regle yüzeyin, bir doğrultmanı boyunca teğet düzlemleri aynıdır gerek ve yeter şart $c = 0$ dır [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat. M regle yüzeyi

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3$$
$$\varphi(t,v) = (a_1(t) + va_1(t), a_2(t) + va_2(t), a_3(t) + va_3(t))$$

olmak üzere, $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası ile verilsin. $\{T,X,N\}$ ortonormal sistemi ve doğrultmanın herhangi bir sabit değerine karşılık gelen noktasından geçen $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisinin

$$A = (1\text{-}av)T + cvN$$

teğet vektör alanının göz önüne alalım.

$\alpha\,(t)$ noktasından geçen doğrultmanın her noktasında, teğet düzlemlerin sabit olması için, doğrultman boyunca N nin sabit olması gerekir. Çünkü bu halde, her teğet düzlemin, ortak birer doğruları var ve normalleri aynı olur. N nin doğrultman boyunca sabit olması için $\{A,T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Bu ise

$$A = (1\text{-}av)T + cvN$$

eşitliği gereğince c=0 olmasını gerektirir.

O halde, bir doğrultman boyunca, M nin teğet düzlemlerinin çakışık olması için c=0 olması gerek ve yeterdir [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım2.2 (Dağılma Parametresi). Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir [Juza, 1962].

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile, $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = D_T X$ dir.

Dayanak eğrisinin iki komşu noktası $\vec{\alpha}(s)$, *ve* $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$ olduğundan bu noktalardaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{\alpha}$ vektörünün

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$\begin{aligned} k &= \langle \mathrm{d}\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \rangle, \\ &= \frac{\det[da, X, X']}{\|X'\|} \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak bulunur. Eğer anadoğruların küresel göstergesini göz önüne alırsak bu gösterge yay elementi olan

$$d\psi = \left\| \frac{dX}{dS} \right\| ds = \|D_T X\| ds = \sqrt{a^2 + c^2}\, ds \tag{2.4}$$

komşu iki anadoğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_X = \frac{k}{d\psi}$$

$$X = \frac{\det[da, X, X^{'}]}{\left\| X^{'} \right\|} : \left\| X^{'} \right\| ds \qquad (2.5)$$

veya

$$P_X = \frac{\det[\frac{da}{ds}, X, X^{'}]}{\left\| X^{'} \right\|^2} = \frac{c}{a^2 + c^2} \qquad (2.6)$$

bulunur. Regle yüzeyler için dral koordinat değişimlerine göre en basit diferansiyel invaryanttır [Juza, 1962].

Tanım2.3. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir [Hacısalihoğlu, 1993].

Teorem2.4. Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat. $\Rightarrow$: regle yüzeyinin açılabilir olması için anadoğrular boyunca teğet düzemlin aynı kalması gerekir.

Bu da c=0 olmasını gerektirir dolayısıyla P_X =0 olur.

$\Leftarrow$: P_X =0 ise c=0 olur. Her bir anadoğru boyunca teğet düzlem aynı kalır.

Tanım2.4.

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3$$

$$\varphi\ (t,v) \rightarrow \varphi(t,v) = a(t) + v\mathrm{X}(t) \qquad (2.7)$$

regle yüzeyi her $t \in I$ için

$$\varphi\,(t+2\pi, v) = \varphi\,(t,v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Bir diğer ifade ile bir peryod sonra her anadoğru kendi üzerine gelir [Juza, 1962].

Tanım2.5. Bir $\varphi\,(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir [Juza, 1962].

Tanım2.6. Bir $\varphi\,(t,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir [Juza, 1962].

Tanım2.7. Bir $\varphi\,(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir [Juza, 1962].

Tanım2.8 (Striksiyon Noktasının Yer Vektörü). Bir $\varphi\,(s,u)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\bar{a}}$ yervektörü dayanak eğrisinin $\vec{a}\,(s)$ yervektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{a}(s,\bar{u}) = a(s) + \bar{u}X(s) \qquad (2.8)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s)$+d$\vec{X}(s)$ olan komşu üç ana doğrusu verilsin.

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğrularının ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(s) \wedge (X(s)+ D_T X(s)ds)=X(s) \wedge D_T X(s)ds \tag{2.9}$$

bağıntısından dolayı $X \wedge D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. O halde

$$\langle X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \text{ , } \langle \mathrm{X}+D_T X ds, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \tag{2.10}$$

olacağından

$$\langle D_T X, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0 \tag{2.11}$$

elde edilir. Ayrıca (2.9) den dayanarak eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa (2.11) den dolayı,

$$\langle D_T X, \frac{d\bar{a}}{ds} \rangle = 0 \tag{2.12}$$

olduğundan

$$\langle D_T X, T + \frac{d\bar{u}}{ds} X + \bar{u} D_T X \rangle = 0$$

$$\langle D_T X, T \rangle + \bar{u} \left\| D_T X \right\|^2 = 0$$

$$\bar{u} = -\frac{\langle D_T X, T\rangle}{|D_T X|^2} = \frac{a}{a^2+c^2} \qquad (2.13)$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yervektörü için (2.8) den

$$\vec{\bar{a}}(s) = \vec{a}(s) - \frac{\langle D_T X, T\rangle}{\|D_T X\|^2} X(s) \qquad (2.14)$$

elde edilir. Eğer $\|D_T X\|=0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (2.13) formülünde

$$\bar{u}=0 \text{ veya } \langle D_T X, T\rangle=0 \qquad (2.15)$$

alınması yeterlidir [Hacısalihoğlu, 1993].

Teorem2.5. $c \neq 0$ olmak üzere M bir kapalı regle yüzey olsun. M nin

$$\varphi: I\times\mathbb{R} \to E^3$$

$$\varphi(t,v) \to \varphi(t,v) = a(t)+vX(t)$$

fonksiyonu ile tanımlı $\{(I\times\mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası verilsin. Bu taktirde M nin doğrultmanları arasında, ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık

$$v = \frac{a}{a^2+c^2}$$

değerine karşılık gelen

$$\varphi_v : I \to M$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat. $a(t_1)$ ve $a(t_2)$ $\left(t_1 < t_2 \quad t_1, t_2 \in I\right)$ noktalarından geçen iki doğrultmanı göz önüne alalım. Bu iki doğrultman arasında, bir ortogonal yörünge boyunca uzaklık:

$$J(v) = \int_{t_1}^{t_2} \|A\| dt$$

dir. Burada

$$A=(1-av)T+vcN$$

değeri yerine yazılırsa

$$J(v) = \int_{t_1}^{t_2} (1 - 2av + a^2v^2 + c^2v^2)^{1/2} dt$$

elde edilir. $v_0 \in \mathbb{R}$ için J nin minimum değer alması

$$J(v_0)=0$$

olması ile mümkündür. O halde

$$-2a+2(a^2+c^2)v=0 \Rightarrow v = \frac{a}{a^2+c^2}$$

dır. Böylece ortogonal yörünge olan

$$\beta : I \to M$$
$$\beta = (a_1(t) + \frac{a}{a^2+c^2} a_1(t), a_2(t) + \frac{a}{a^2+c^2} a_2(t), a_3(t) + \frac{a}{a^2+c^2} a_3(t))$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklık, doğrultmanlar arasındaki orotogonal yörünge olan en kısa uzaklıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Tanım2.9. $c \neq 0$ olmak üzere, kapalı M regle yüzeyi $\varphi(t,v)=a(t)+vX(t)$ için atlas $\{(I\times\mathbb{R},\varphi)\}$ olarak verilsin. M nin her bir doğrultman üzerinde

$$v=\frac{a}{a^2+c^2}$$

değerine karşılık gelen noktaya o doğrultman üzerindeki merkez nokta (boğaz noktası) ve M nin merkez noktalarının geometrik yerine de M nin striksiyon çizgisi denir [Hacısalihoğlu, 1993].

Teorem2.6. M regle yüzeyi $\{(I\times\mathbb{R},\varphi)\}$ atlası ile verilmiş olsun. O zaman, $a(t)$ noktasından geçen anadoğrultman üzerinde $\varphi(t,v_0)$ noktası merkez noktasıdır $\Leftrightarrow$ a nın teğet vektör alanı T ve doğrultmanın teğet vektör alanı da X olmak üzere, $\varphi(t,v_0)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normali $D_T X$ dir [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat. ($\Leftarrow$): $\varphi_{v_0} : I\times\{v_0\}\to M$ eğrisinin teğet vektör alanı

$$A=(1-a\,v_0)T+v_0\,cN$$

olduğundan $D_T X$ in teğet düzleme normal olması sebebiyle,

$$\langle D_T X, A\rangle=0$$

$$\Rightarrow \langle -aT+cN^{-}, (1-av_0)T+v_0cN^{-}\rangle=0$$

$$\Rightarrow -a+a^2v_0+v_0c^2=0$$

$$\Rightarrow v_0=\frac{a}{a^2+c^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t,\ v_0)$ noktasının merkez noktası olduğunu ifade eder.

$(\Rightarrow)$: $a(t)$ noktasından geçen doğrultmanın merkez noktası $\varphi(t,\ v_0)$ olsun. O halde

$$\langle D_T X, X\rangle = \langle D_T X, A\rangle = 0$$

olduğunu gösterelim.

$$\langle X, X\rangle = 1 \Rightarrow T[\langle X, X\rangle] = 0 \Rightarrow \langle D_T X, X\rangle = 0 \text{ ve}$$

$$\langle D_T X, A\rangle = \langle -aT + cN^{-}, (1-av)T + cvN^{-}\rangle = 0$$

$$= -a + a^2v + vc^2$$

dır. $\varphi(t,\ v_0)$ merkez noktası olduğundan

$$v = \frac{a}{a^2+c^2} \quad \text{veya} \quad -a + a^2v + vc^2 = 0$$

dır. Böylece $\langle D_T X, A\rangle = 0$ dır [Hacısalihoğlu, 1993].

Teorem2.7. Bir regle yüzeyin Gauss eğriliğinin mutlak değeri, bir doğrultman boyunca, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada maksimum değerini alır [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat. *M* regle yüzeyi

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3$$

$$\varphi(s,v) = (a_1(s) + va_1(s), a_2(s) + va_2(s), a_3(s) + va_3(s))$$

olmak üzere $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası ile verilsin. O zaman $\varphi(s,v)$ noktasındaki tanjant uzayın bir bazı

$$\phi = \{A, X\}$$

dır. $\varphi(s,v)$ noktasında $\varphi(s, v = sabit)$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\frac{d\varphi}{ds^*} = A_0 = \frac{1}{\|A\|}A$$

dır. $\varphi(s, v = sabit)$ eğrisinin yay parametresi de s^* olmaz üzere

$$A_0 = \frac{d\varphi}{ds^*} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{ds^*}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = A$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{(1-2av+a^2v^2+c^2v^2}}$$

$$D_{A_0}A = \frac{1}{\|A\|}D_T A = \frac{1}{\|A\|}\left[(-a'v-bcv)T + (a - a^2v + c^2v)X + (c'v + b - abv)N\right]$$

dır. Benzer şekilde

$$D_{A_0}T = \frac{1}{\|A\|}D_T T = \frac{1}{\|A\|}(aX+bN)$$

$$D_{A_0}N = \frac{1}{\|A\|}D_T N = -\frac{1}{\|A\|}(-bT-cX)$$

dır. $\varphi(s,v)$ noktasındaki ortonormal baz

$$\{A_0, X, N\} \quad , \quad N_{\varphi(s,v)} = N$$

dır, öyle ki

$$A_0 = \frac{A}{\|A\|} \quad , \quad N = N_{\varphi(s,v)}$$

dır. Bu baz bir sağ sistem olduğundan

$$N = A_0 \wedge X$$

$$= \frac{1}{\|A\|}\left[(1-av)T + cvN\right] \wedge X$$

$$= \frac{1}{\|A\|}\left[cvT - (1-av)N\right]$$

dır. Böylece

$$S(A_0) = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 X$$

$$S(X) = \mu_1 A_0 + \mu_2 X$$

olduğundan

$$K = \det S = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1$$

ve Teorem2.1 den dolayı $\mu_2 = \langle S(X), X\rangle = 0$ olduğundan

$$K = -\mu_1\lambda_2$$

dır. Ayrıca *S* simetrik olduğundan

$$\mu_1 = \langle S(X), A_0\rangle = \langle S(A_0), X\rangle = \lambda_2$$

dır. O halde

$$K = -\left[\langle S(A_0), X\rangle\right]^2$$

dır. Şimdi

$$\langle S(A_0), X\rangle$$

ifadesini hesaplayalım.

$$S(A_0) = D_{A_0}\mathrm{N} = \frac{dN}{ds^*} = \frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds^*}$$

dır, öyleki burada s*, v= sabit eğrisinin yay uzunluğudur. Böylece,

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|}$$

dır. O halde

$$S(A_0) = \frac{1}{\|A\|}\frac{dN}{ds}, \qquad S(A_0) = \frac{1}{\|A\|} D_T N$$

elde edilir. Şimdi ise $D_T N$ yi hesaplayalım:

$$\frac{dN}{ds} = D_T N = (\frac{1}{\|A\|})' \left[cvT - (1-av)N\right] + \frac{1}{\|A\|}$$

$$(c'vT + a'vN) + \frac{1}{\|A\|}\left[cvD_T T - (1-av)D_T N\right]$$

veya (2.2) den $D_T T$ ve $D_T N$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{dN}{ds} = D_T N = (\frac{1}{\|A\|})' \left[cvT - (1-av)N\right] + \frac{1}{\|A\|}\left[c'vT + a'vN\right] + \frac{1}{\|A\|}$$

$$\left[b(1-av)T + bcvN + cX\right]$$

elde edilir. Böylece

$$S(A_0) = \frac{1}{\|A\|}\frac{dN}{ds}$$

den

$$\langle X, S(A_0)\rangle = \frac{1}{\|A\|^2}\,\mathrm{c}$$

veya $\varphi(s,v)$ noktasındaki

$$K(s,v) = \frac{c^2}{\|A\|^4}$$

$$K(s,v) = -\frac{c^2}{(1-2av+a^2v^2+c^2v^2)^2} \tag{2.16}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial K}{\partial v} = -\frac{-c^2\,2(1-2av+a^2v^2+c^2v^2)(-2a+a^2v+2c^2v)}{(1-2av+a^2v^2+c^2v^2)^4}$$

olur, pay kısmındaki tam kareler toplamı olmayan kısmın sıfır olması gerekeceğinden

$$v = \frac{a}{a^2+c^2}$$

dır. Bu değere anadoğru üzerindeki karşılık gelen nokta, merkez noktası olduğundan $\vec{X}$ anadoğrusu üzerinde K eğrilik fonksiyonu maksimum değerini merkez noktada alır. v nin bu değeri yerine yazılırsa K nın maksimum değeri için

$$K_{\max} = -\frac{\left(a^2+c^2\right)^2}{c^2} \tag{2.17}$$

elde edilir.

Sonuç2.1. Bir regle yüzey in dağılma parametresi yalnızca doğrultmalara bağlıdır [Hacısalihoğlu, 1993].

Teorem2.8. (Chasles Teoremi): M bir regle yüzey, M nin bir doğrultmanı boyunca normali N_V, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada M nin normali N ise N ile N_V arasındaki açının tanjantı, merkezden N_V nin başlangıç noktasına olan uzaklık ile doğru orantılıdır [Hacısalihoğlu, 1993].

İspat. M nin bir atlası

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3$$

$$\varphi(s,v) = (a_1(s) + va_1(s), a_2(s) + va_2(s), a_3(s) + va_3(s))$$

olmak üzere $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ ve v=0 için $\varphi(t,0)$ noktası, bir merkez noktası olsun. Bu taktirde,

$$a : I \to M \ \ , \ a = (a_1, a_2, a_3)$$

eğrisi, $\varphi(t,0)$ merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. $a : I \to M$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T, $a(t)$ noktasından geçen doğrultmanın birim teğet vektör alanı X olmak üzere , $\varphi(t,0)$ noktasında $D_T X$, M ye normal olur. Böylece, (2.2) den $\varphi(t,0)$ noktasında a=0 dır. O halde $\varphi(t,0)$ merkez noktasında dağılma parametresi a=0 olduğundan (2.6) dan $P_X = \frac{1}{c}$ dır. Diğer taraftan, bu doğrultman boyunca a=0 olduğundan (2.2) den

$$A=T+vcN$$

dir. Böylece doğrultman boyunca yüzeyin normali

$$N_V = \frac{1}{\|A\|} A \wedge X$$

veya

$$N_V = \frac{(\text{-vcT} + N)}{(1+v^2c^2)^{1/2}}$$

dır. Pay ve paydayı *c* ile böler ve $\frac{1}{c} = P_X$ göz önünde bulundurulursa

$$N_V = \frac{(\text{-vT} + P_X N)}{(P_X{}^2 + v^2)^{1/2}}$$

elde edilir. N_V ile N arasındaki açının kosinüsü

$$\cos\theta = \langle N, N_V \rangle$$

$$= \frac{P_X}{(P_X{}^2 + v^2)^{1/2}}$$

veya

$$\cos\theta = \frac{1}{(1+(\frac{v}{P_X})^2)^{1/2}}$$

olduğundan

$$\tan\theta = \frac{v}{P_X}$$

dir. Bu ise teoremi ispat eder.

Sonuç2.2. Bir *M* regle yüzeyi üzerinde bir anadoğru boyunca teğet düzlem bir uçtan ötekine anadoğru etrafında 180° derece döner [Hacısalihoğlu, 1993].

Tanım2.10. $a: I \to E^3$ eğrisi yay parametresi ile verilsin. Bu eğrinin birim teğet vektör alanı *T*=*X* yani

$$T = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olsun. O zaman

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3$$

$$\varphi(t,v) = (a_1(t) + va_1(t), a_2(t) + va_2(t), a_3(t) + va_3(t))$$

olmak üzere $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası ile verilen M yüzeyine $a: I \to E^3$ eğrisinin teğetlerinin tors yüzeyi denir. Buradaki $a: I \to E^3$ eğrisine M nin sırt eğrisi (edge of regression) adı verilir [Hacısalihoğlu, 1993].

BÖLÜM 3. REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde E^4, dört boyutlu Öklid Uzayı’ nda regle yüzeyler ve hiperregle yüzeyler tanıtılarak, bu regle yüzeyler ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir.

3.1. E^4 de Regle Yüzeyler

E^4 de diferensiyellenebilir M eğrisi

$$\alpha: I \to E^4$$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$$

ile verilsin öyle ki burada $0 \in I \subset \mathbb{R}$ dir. Ayrıca E^4 te bir ℓ doğrusu,

$$\ell: \mathbb{R} \to E^4$$

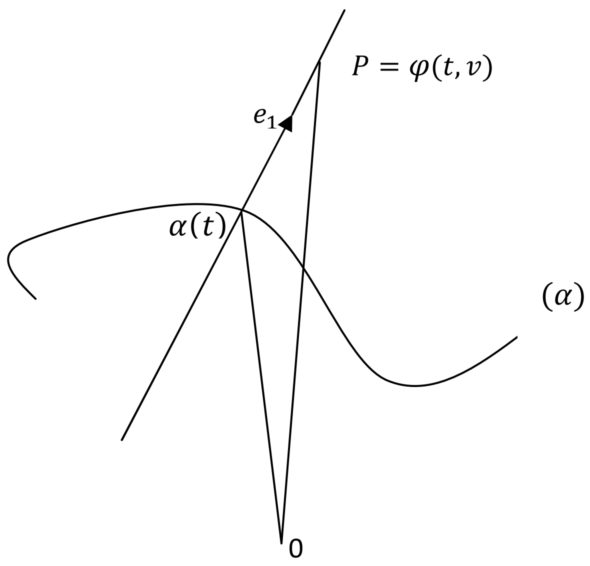
$$v \to \varphi(v) = \alpha(t) + ve(t), \qquad e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t))$$

olsun. Burada $e(t)$, ℓ doğrusunun $\alpha(t)$ noktasında birim doğrultman vektörüdür. Eğer ℓ doğrusu α eğrisi boyunca hareket ederse E^4 de $(Ix\mathbb{R}, \ell)$ koordinat komşuluğu ile gösterilen bir yüzey meydana getirir öyle ki bu regle yüzey parametrik olarak

$$\varphi: Ix\mathbb{R} \to E^4$$

$$(t, v) \to \varphi(t, v) = \alpha(t) + ve(t) \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilir ve M' ile gösterilir [Plass, 1939]. Burada α eğrisi regle yüzeyin dayanak eğrisi ℓ doğrusu da regle yüzeyin doğrultmanı olarak isimlendirilir (Şekil 1).



(Şekil 1)

φ nin t ye ve v ye göre türevi alınırsa

$$\varphi_t = \alpha'(t) + ve'(t)$$

$$\varphi_v = e(t) \tag{3.2}$$

elde edilir. Böylece biz kabul ediyoruz ki

$$rank[\varphi_t, \varphi_v] = rank[\alpha' + ve', e] = 2$$

dir. Bu ifade eder ki M' bir 2- manifolddur.

Ayrıca burada v, $e(t)$ nin pozitif doğrultusundan P nin M eğrisinden uzaklığıdır. Eğer bütün ℓ doğrultmanları aynı noktadan hareket ederse bu takdirde M eğrisinin orijini üzerinde birim hiperküreleri kesen bir koni meydana gelir ve bu koni regle yüzeyin yön konisi olarak isimlendirilir. Bu bölümde ayrıca biz kabul ediyoruz ki M birim hızlı bir eğri ve $\langle \alpha'(t), e(t)\rangle = 0$.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem3.1.1. M', E^4 te bir regle yüzey olsun. Bu takdirde M'nin P noktasındaki Gauss eğriliği

$$K = -\frac{1}{g}\left\{\langle \varphi_{tv}, \varphi_{tv}\rangle - \frac{1}{E}\langle \varphi_{tv}, \varphi_{t}\rangle^2\right\} \tag{3.3}$$

dır [Bayram ve diğerleri, 2009].

İspat. M' regle yüzeyinin herhangi bir $P = \varphi(t, v)$ noktasında tanjant uzayı $\{\varphi_t, \varphi_v\}$ tarafından gerilir. O halde (3.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\varphi_t = \alpha'(t) + ve'(t)$$

$$\varphi_v = e(t)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece birinci temel formun bileşenleri, (1.26) denklemlerinden

$$E = \langle \varphi_t, \varphi_t\rangle = \langle\, \alpha'(t) + ve'(t),\ \alpha'(t) + ve'(t)\rangle$$

$$= \langle\, \alpha'(t),\ \alpha'(t)\rangle + 2\langle\, \alpha'(t), ve'(t)\rangle + v^2\langle\, \alpha'(t),\ \alpha'(t)\rangle$$

$$= 1 + 2\langle\, \alpha'(t), ve'(t)\rangle + v^2\langle e'(t), e'(t)\rangle$$

$$F = \langle \varphi_t, \varphi_v\rangle = \langle\, \alpha'(t) + ve'(t), e(t)\rangle$$

$$= \langle\, \alpha'(t), e(t)\rangle + v\langle\, \alpha'(t), e(t)\rangle = 0$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = \langle e(t), e(t)\rangle = 1$$

dır. M' regle yüzeyinin kovaryant indislere göre simetrik olan Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri Koszul eşitliğinden, yani (1.19) denkleminden dolayı

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}(g^{-1})_{kr}\left[\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right]$$

dır. O halde

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(g^{-1})_{11}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(g^{-1})_{11}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right]$$

dir. Yani

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2}(g^{-1})_{11}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial t}\right]$$

dir. Burada

$$g = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (g^{-1})_{11} = \frac{1}{E}$$

ve

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \langle \varphi_t , \varphi_t \rangle}{\partial t} = 2 \langle \varphi_{tt} , \varphi_t \rangle$$

dır. Böylece

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2E} 2\langle \varphi_{tt} , \varphi_t \rangle = \frac{1}{E} \langle \varphi_{tt} , \varphi_t \rangle$$

olur. Yine Kozsul eşitliğinden

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2} (g^{-1})_{2r} \left[\frac{\partial g_{1r}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{r1}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_r}\right]$$

ve

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} (g^{-1})_{21} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right] + \frac{1}{2} (g^{-1})_{22} \left[\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right]$$

dır. Yani burada

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} (g^{-1})_{21} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial t} + \frac{\partial g_{11}}{\partial t} - \frac{\partial g_{11}}{\partial t}\right] + \frac{1}{2} (g^{-1})_{22} \left[\frac{\partial g_{12}}{\partial t} + \frac{\partial g_{21}}{\partial t} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right]$$

dir.

Ayrıca g simetrik olduğundan $g_{21} = g_{12} = 0$ dır. O halde

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} (g^{-1})_{22} \left[-\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right]$$

dir.

$(g)_{22} = G$ ve $(g^{-1})_{22} = G$ olduğundan

$$\Gamma_{11}^{2} = -\frac{1}{2G}\, 2\,\langle \varphi_{tv}, \varphi_t \rangle = \frac{1}{G}\,\langle \varphi_{tv}, \varphi_t \rangle$$

dir. Kozsul denkleminden

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2}\,(g^{-1})_{\,11}\left[\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}\right]$$

dır. O halde

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2}\,(g^{-1})_{\,11}\left[\frac{\partial g_{21}}{\partial t} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial t}\right]$$

dır. Böylece $g_{12} = g_{21} = 0$ olduğundan

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{2E}\, 2\,\langle \varphi_{tv}, \varphi_t \rangle = \frac{1}{E}\,\langle \varphi_{tv}, \varphi_t \rangle$$

dir. Benzer yol takip edilerek

$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{22}^{1} = \Gamma_{22}^{2} = 0$$

olduğu görülür. O halde

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} &= \frac{1}{E}\,\langle \varphi_{tt}, \varphi_t \rangle \\
\Gamma_{11}^{2} &= -\frac{1}{G}\langle \varphi_{tv}, \varphi_t \rangle \\
\Gamma_{12}^{1} &= \frac{1}{E}\langle \varphi_{tv}, \varphi_t \rangle \\
\Gamma_{12}^{2} &= \Gamma_{22}^{2} = \Gamma_{22}^{1} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

dır. Böylece (1.6) denklemi ile verilen Gauss denklemi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\varphi_t}\varphi_t &= \varphi_{tt} = \nabla_{\varphi_t}\varphi_t + V\,(\varphi_t, \varphi_t) \\
\overline{\nabla}_{\varphi_t}\varphi_v &= \varphi_{tv} = \nabla_{\varphi_t}\varphi_v + V\,(\varphi_t, \varphi_v) \\
\overline{\nabla}_{\varphi_v}\varphi_v &= \varphi_{vv} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

dır. Öyle ki burada

$$\overline{\nabla}_{\varphi_t}\varphi_t = \Gamma_{11}^{1}\,\varphi_t + \Gamma_{11}^{2}\,\varphi_v$$

$$\overline{\nabla}_{\varphi_t}\varphi_v = \Gamma_{12}^{1}\,\varphi_t + \Gamma_{12}^{2}\,\varphi_v \tag{3.6}$$

dir. (3.4) , (3.5) ve (3.6) denklemlerinden

$$v(\varphi_t\,,\varphi_t) = \varphi_{tt} - \frac{1}{E}\,\langle\varphi_{tt}\,,\varphi_t\rangle l_t + \frac{1}{G}\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_t\rangle\varphi_v$$

$$v(\varphi_t\,,\varphi_v) = \varphi_{tv} - \frac{1}{E}\,\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_t\rangle\varphi_t \tag{3.7}$$

$$v(\varphi_v\,,\varphi_v) = 0$$

dır. Buradan ise M' regle yüzeyinin Gauss eğriliği (1.14) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$K = \frac{1}{g}(\langle v\,(\,\varphi_t\,,\varphi_t), h\,(\,\varphi_v, \varphi_v)\rangle - \|V\,(\,\varphi_t\,,\varphi_v)\|^2)$$

dir.

$V\,(\,\varphi_v\,,\varphi_v) = 0$ dolayısıyla $\langle V\,(\,\varphi_t\,,\varphi_t), V(\,\varphi_v, \varphi_v)\rangle = 0$ dır. Ayrıca $\|V\,(\,\varphi_t\,,\varphi_v)\|^2 = \langle V\,(\,\varphi_t\,,\varphi_v), V\,(\,\varphi_t, \varphi_v)\rangle$ olduğundan

$$K = -\,\frac{\langle V\,(\,\varphi_t\,,\varphi_v), V\,(\,\varphi_t, \varphi_v)\rangle}{g}$$

dir. (3.7) denklemi kullanılırsa;

$$K = -\,\frac{\langle\varphi_{tv} - \frac{1}{E}\,\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_t\rangle\varphi_t\,,\varphi_{tv} - \frac{1}{E}\,\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_t\rangle\varphi_t\,\rangle}{g}$$

$$= -\,\frac{\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_{tv}\rangle - \frac{2}{E}\,\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_t\rangle^2 + \frac{1}{E^2}\,\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_t\rangle\langle\varphi_t\,,\varphi_t\rangle}{g}$$

$$= -\,\frac{1}{g}\left\{\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_{tv}\rangle - \frac{1}{E}\,\langle\varphi_{tv}\,,\varphi_t\rangle^2\right\}$$

olur.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç3.1.1. M', E^4 de bir regle yüzey olsun. Bu takdirde M nin bir P noktasında Gauss eğriliği

$$K = -\frac{1}{g}\left(\frac{\langle e'(t), e'(t)\rangle - \langle \alpha'(t), e'(t)\rangle^2}{E}\right) \tag{3.8}$$

dir.

İspat. Eğer (3.7) denklemi (3.3) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

E^4 de M regle yüzeyinin ortalama eğriliği $\|H\|$ olmak üzere $V\,(\varphi_v, \varphi_v) = 0$ olduğundan (1.14) denkleminden hareketle

$$\|H\| = \frac{\langle V\,(\varphi_u, \varphi_v), V\,(\varphi_u, \varphi_u)\ \rangle}{4g^2} \tag{3.9}$$

olduğu görülür. O halde aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç3.1.2. E^4 de M' bir regle yüzeyi olsun. Bu taktirde M' nin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} 4\|H\| = \frac{1}{g^2}\Big\{ & \langle X_{uu}, X_{uu}\rangle - \frac{1}{E}\langle X_{uu}, X_u\rangle^2 + \frac{1}{G}\langle X_{uv}, X_u\rangle[2\langle X_{uu}, X_v\rangle + \langle X_{uv}, X_u\rangle] \\ & - \frac{2}{EG}\langle X_{uu}, X_u\rangle\langle X_{uv}, X_u\rangle\langle X_u, X_v\rangle\Big\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

dır [Bayram ve diğerleri, 2009].

İspat : (3.7) ve (3.9) denklemlerinden sonuç açıktır.

3.2. E^4 de Hiperregle Yüzeyler

M^*, E^4 de α dayanak eğrili ve ℓ doğrultmanlı bir regle yüzey olsun. Eğer ℓ doğrultmanı yerine e_i , $1 \leq i \leq 2$, vektörleri tarafından gerilen $E_2(t)$ düzlemini alırsak, $E_2(t)$ nin α dayanak eğrisi boyunca hareketiyle elde edilen 3-boyutlu yüzey, hiperregle yüzey olarak adlandırılır ve M^* ile gösterilir. Bu hiperregle yüzey parametrik olarak

$$\varphi : \; I \times \mathbb{R}^2 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^4$$

$$(t,v) \;\longrightarrow\; \varphi(t,v) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{2} v_i e_i \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilir [Thas, 1978a]. Kabul edelim ki α dayanak eğrisi $E_2(t)$ doğrultman uzayının ortogonal yörüngesi olsun. Eğer

$$\text{rank}\,[\, e_0 \;,\; e_1 \;,\; e_2 \;,\; \dot{e}_1 \;,\; \dot{e}_2 \,] = 4 - k \tag{3.12}$$

olmak üzere,

i) Eğer $k = 0$ ise M bir açılamaz regle yüzeydir.
ii) Eğer $k = 1$ ise M bir açılabilir regle yüzeydir.

dir. Burada e_0, α dayanak eğrisinin birim tanjant vektör alanı ve $\dot{e}_i$, α eğrisi boyunca e_i vektör alanlarının türevleridir.

Kabul edelimki $\{e_0 , e_1 , e_2\}$, M^* regle yüzeyinin tanjant demetinin ortonormal bazı ve ξ da M^* nin birim normal vektör alanı olsun. Bu taktirde (1.7) denklemi göz önüne alınırsa Weingarten denklemi ;

$$\begin{aligned} \overline{D}_{e_0}\xi &= a_{00}e_0 + a_{01}e_1 + a_{02}e_2 + c_0\xi \\ \overline{D}_{e_1}\xi &= a_{10}e_0 + a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + c_1\xi \\ \overline{D}_{e_2}\xi &= a_{20}e_0 + a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + c_2\xi \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir. Öyle ki burada a_{ij} , $0 \le i,j \le 2$ ler A_ξ matrisinin bileşenleridirler. Böylece (3.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned} &\langle \overline{D}_{e_0}\xi \;,\; e_0\rangle = a_{00} \;, && \langle \overline{D}_{e_0}\xi \;,\; e_1\rangle = a_{01} \;, && \langle \overline{D}_{e_0}\xi \;,\; e_2\rangle = a_{02} \\ &\langle \overline{D}_{e_1}\xi \;,\; e_0\rangle = a_{10} \;, && \langle \overline{D}_{e_1}\xi \;,\; e_1\rangle = a_{11} \;, && \langle \overline{D}_{e_1}\xi \;,\; e_2\rangle = a_{12} \\ &\langle \overline{D}_{e_2}\xi \;,\; e_0\rangle = a_{20} \;, && \langle \overline{D}_{e_2}\xi \;,\; e_1\rangle = a_{21} \;, && \langle \overline{D}_{e_2}\xi \;,\; e_2\rangle = a_{22} \end{aligned} \tag{3.14}$$

dır. Buradan ise,

$$\langle \overline{D}_{e_1}\xi \;,\; e_0\rangle \;=\; -\langle A_\xi(e_1)\;,\; e_0\rangle \;=\; -\langle V(e_1,\, e_0)\;, \xi\rangle \;=\; a_{10}$$

$$\langle \overline{D}_{e_0}\xi \;,\; e_1\rangle \;=\; -\langle A_\xi(e_0)\;,\; e_1\rangle \;=\; -\langle V(e_0,\, e_1)\;, \xi\rangle \;=\; a_{01}$$

elde edilir. O halde $V(e_1,\, e_0) = V(e_0,\, e_1)$ olduğundan $a_{10} = a_{01}$ dır.

$$\langle \overline{D}_{e_2}\xi \;,\; e_0\rangle \;=\; -\langle A_\xi(e_2)\;,\; e_0\rangle \;=\; -\langle V(e_2,\, e_0)\;, \xi\rangle \;=\; a_{02}$$

$$\langle \overline{D}_{e_0}\xi \;,\; e_2\rangle \;=\; -\langle A_\xi(e_0)\;,\; e_2\rangle \;=\; -\langle V(e_0,\, e_2)\;, \xi\rangle \;=\; a_{20}$$

$V(e_2,\, e_0) = V(e_0,\, e_2)$ olduğundan $a_{02} = a_{20}$ dır. Ayrıca = $V\left(e_i,\, e_j\right) = 0$, $1 \leq i, j \leq 2$ olduğundan

$$\langle \overline{D}_{e_0}\xi \;,\; e_0\rangle \;=\; -\langle A_\xi(e_0)\;,\; e_0\rangle \;=\; -\langle V(e_0,\, e_0)\;, \xi\rangle \;=\; a_{00}$$

$$\langle \overline{D}_{e_i}\xi \;,\; e_j\rangle \;=\; -\langle A_\xi(e_i)\;,\; e_j\rangle \;=\; -\langle V\left(e_i,\, e_j\right)\;, \xi\rangle \;=\; a_{ij} \;=\; 0$$

dır. O halde A_ξ matrisi

$$A_\xi = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir simetrik matristir. Burada $a_{02} = a_{20} = a_2$, $a_{01} = a_{10} = a_1$ ve $a_{00} = a_0$ seçilmiştir.

Teorem3.2.1. M^*, E^4 de bir hiperregle yüzey ve M^* nin bir ortonormal bazı $\{e_0, e_1, e_2\}$ olsun. Bu taktirde M^* nin e_i ve e_0 vektör alanları tarafından üretilen $\chi(M^*)$ in iki boyutlu σ doğrultusunda Riemann eğriliği

$$K_\sigma(\, e_i, e_0) = -\langle \overline{D}_{e_i}e_0, \overline{D}_{e_i}e_0\rangle, \qquad 1 \leq i \leq 2 \tag{3.15}$$

dır [Thas, 1978a].

İspat. Kabul edelim ki M^* nin Riemann eğrilik tensörü R olsun. Bu taktirde (1.12) denkleminden

$$K_\sigma = \langle e_i, R(e_i, e_0)e_0\rangle$$

dır. O halde (1.14) denklemi göz önüne alınırsa

$$\langle e_i, R(e_i, e_0)e_0 \rangle = \langle V(e_i, e_i), V(e_0, e_0) \rangle - \langle V(e_i, e_0), V(e_i, e_0) \rangle$$

dır. O halde $V\left(e_i, e_j\right) = 0,\ \ 1 \leq i, j \leq 2$ olduğundan

$$\langle \overline{D}_{e_i} e_{0,} e_j \rangle = \langle e_0, \overline{D}_{e_i} e_j \rangle = 0, \qquad 1 \leq i, j \leq 2$$

ve

$$\langle \overline{D}_{e_i} e_{0,} e_0 \rangle = \langle e_0, \overline{D}_{e_i} e_0 \rangle = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq 2$$

denklemlerinden, sırasıyla, $\overline{D}_{e_i} e_0 e_j$ ve $\overline{D}_{e_i} e_0 e_0$ dır. Bu ifade eder ki $\overline{D}_{e_i} e_0$ bir normal vektör alanıdır. Yani

$$\overline{D}_{e_i} e_0 = V(e_i, e_0)$$

dır. Böylece

$$K_\sigma = -\langle \overline{D}_{e_i} e_{0,} \overline{D}_{e_i} e_0 \rangle, \quad 1 \leq i \leq 2$$

dir.

Tanım3.2.1 M^*, E^4 de hiperregle yüzey ve M^* nin eğrilik tensörü R olsun. Eğer $\{e_0, e_1, e_2\}$, $\chi(M^*)$ in ortonormal baz alanı ise bu taktirde M^* nin Ricci eğrilik tensörü

$$S: \chi(M^*) \times \chi(M^*) \to \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \to S(X, Y) = \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

ve M nin skaler eğriliği

$$r = \sum_j S(\,e_j, e_j) \qquad (3.16)$$

şeklindedir.

Teorem3.2.2. M^*, E^4 de hiperregle yüzey, $E_2(t) = Sp\{e_1, e_2\}$, M^* nin doğrultman uzayı olsun. Bu taktirde M^* nin skaler eğriliği

$$r = -2\sum_{i} {a_i}^2 \tag{3.17}$$

dir [Thas, 1978a].

İspat. $\{e_0, e_1, e_2\}$, M^* nin ortonormal baz alanı olsun. Bu taktirde

$$r = \sum_{j=0}^{2} S(\, e_j, e_j) = S(e_0, e_0) + \sum_{i=1}^{2} S(e_i, e_i)$$

dir. O halde

$$S(e_0, e_0) = \sum_{i} \langle R(e_i, e_0)e_0, e_i\rangle$$

$$= \sum_{i} K(\, e_i, e_0) = -\sum_{i} {a_i}^2$$

ve

$$S(e_i, e_i) = \sum_{j} \langle R\big(e_j, e_i\big)e_i, e_j\rangle$$

$$= K_r(e_i, e_0) = -{a_i}^2$$

dir. Böylece açıktır ki

$$S(e_0, e_0) = -\sum_{i} S(e_i, e_i)$$

dir. Buradan ise

$$r = -2\sum_{J} S\big(e_j, e_j\big) = -2\sum_{i} {a_i}^2$$

3.3. E^n de 2-boyutlu Regle Yüzeyler

E^n , n-boyutlu Öklid Uzayı'nda $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir bir eğri

$$\alpha : I \to E^n$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots\ldots, \alpha_n(s)) \tag{3.18}$$

olsun. E^n de verilen bir $e_1(s)$ doğrultman vektörlü bir l doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle elde edilen yüzeye , E^n de 2-boyutlu bir regle yüzey adı verilir ve M^{**} ile gösterilir. Bu regle yüzey parametrik olarak

$$\psi : I\, x\, \mathbb{R} \to E^n$$

$$(s, v) \to \psi(s, v) = \alpha(s) + v\, e_1(s) \tag{3.19}$$

ile gösterilir [Thas, 1978b]. Burada $\alpha(s)$ dayanak eğrisi, $e_1(s)$ de doğrultman vektörü olarak isimlendirilir. Bu bölümde $\alpha(s)$ dayanak eğrisi, $e_1(s)$ doğrultusundaki doğrultmanın ortogonal yörüngesi olarak kabul edilecektir.

$\{e_1, e_2\}$, $\chi(M^{**})$ nin bir ortonormal bazı, öyle ki $e_2 = \alpha'(s)$ olsun. Bu taktirde

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1, \qquad \langle e_1, e_2 \rangle = 0$$

dır. E^n de standart baz sistemi $\frac{\partial}{\partial \chi_1}, \ldots., \frac{\partial}{\partial \chi_n}$ olsun. $s = s_0$ sabit değeri için

$$e_2(s_0) = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.20}$$

olmak üzere

$$(\overline{D}_{e_1} e_2)_{s=s_0} = \sum_{i=1}^{n} e_1(b_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{db_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.21}$$

elde edilir. Burada $\overline{D}$, E^n de Riemann koneksiyonudur. Böylece $P(e_1, s_0)$ noktasında M^{**} nin G Gauss eğriliği olmak üzere

$$G(P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{db_i}{ds}\right)^2 |_p$$

olur. Buradan ise

$$G = \langle \overline{D}_{e_1} e_2, \overline{D}_{e_1} e_2 \rangle \tag{3.22}$$

bulunur [Thas, 1978b].

Kabul edelim ki $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-2}\}$ vektör alan sistemi $P \in M^{**}$ noktasında $T_{M^{**}}(P)$ uzayının bir ortonormal bazı olsun. Bu taktirde $P \in M^{**}$ noktasında $T_{E^n}(P)$ nin bir bazı $\{e_1, e_2, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}\}$ dir. (1.7) denklemi ile verilen Weingarten denklemi bu baz vektörleri için yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{D}_{e_1} \xi_j &= a_{11}^j\, e_1 + a_{12}^j\, e_2 + \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1}^j \xi_i \\ \overline{D}_{e_2} \xi_j &= a_{21}^j\, e_1 + a_{22}^j\, e_2 + \sum_{i=1}^{n-2} b_{2i}^j \xi_i\,, \qquad 1 \le j \le n-2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. Bu denklemlere Weingarten türev denklemleri denir. (3.23) denklemlerinde $A_{\xi_j}(e_i) \in x\ (M^{**})$ olduğundan A_{ξ_j} lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi aynı notasyonla gösterirsek,

$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} a_{11}^j & a_{12}^j \\ a_{21}^j & a_{22}^j \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

bulunur. (3.23) türev denklemlerinden

$$\begin{aligned} \langle \overline{D}_{e_1} \xi_j, e_1 \rangle &= a_{11}^j\,, \qquad \langle \overline{D}_{e_1} \xi_j, e_2 \rangle = a_{12}^j \\ \langle \overline{D}_{e_2} \xi_j, e_1 \rangle &= a_{21}^j\,, \qquad \langle \overline{D}_{e_2} \xi_j, e_2 \rangle = a_{22}^j \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.25) ve (1.8) denklemlerinden dolayı

$$a_{12}^j = a_{21}^j \tag{3.26}$$

dir. Ayrıca E^n de bir doğru geodezik olduğundan $\overline{D}_{e_1}\, e_1 = 0$ yani

$$a_{11}^{j} = 0 \tag{3.27}$$

dır. Böylece A_{ξ_j} matrisi

$$A_{\xi_j} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12}^{j} \\ a_{12}^{j} & a_{22}^{j} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

şeklini alır. O halde A_{ξ_j}matrisi için aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç3.3.1. M^{**}, E^n de 2-boyutlu regle yüzey olsun. M nin A_{ξ_j} şekil operatörüne karşılık gelen matris, simetrik bir matristir [Thas, 1978b].

Sonuç3.3.2. M^{**}, E^n de 2-boyutlu regle yüzey ve A_{ξ_j} de ξ_j , $1 \leq j \leq n-2$ birim doğrultusu için tanımlanmış olan şekil operatörü olsun. Bu taktirde

$$\det A_{\xi_j} = \left(a_{12}^{j}\right)^2 \tag{3.29}$$

Lipschitz-Killing eğriliği tanımından

$$G(P, \xi_j) = \det A_{\xi_j}$$

olduğundan Sonuç 3.19 den

$$G(P, \xi_j) = \left(a_{12}^{j}\right)^2 \tag{3.30}$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç3.3.3. M^{**}, E^n de 2-boyutlu regle yüzey olsun. M^{**} nin her noktada ve her normal doğrultudaki Lipschitz-Killing eğriliği

$$G\,(P, \xi_j) = (a_{12}^{j})^2, \qquad 1 \leq j \leq n-2$$

dir [Thas, 1978b].

Weingarten türev denklemlerinden

$$\langle \bar{D}_{e_1} \xi_j, e_2 \rangle = a_{12}^{j}, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

dır. Ayrıca $\langle \xi_j, e_2 \rangle = 0$ olduğundan

$$e_1\left[\langle \xi_j, e_2\rangle\right] = \langle \overline{D}_{e_1}\xi_j, e_2\rangle + \langle \xi_j, \overline{D}_{e_1}e_2\rangle = 0$$

bulunur. Buradan ise

$$\langle \overline{D}_{e_1}\xi_j, e_2\rangle = -\langle \xi_j, \overline{D}_{e_1}e_2\rangle$$

elde edilir. Bu ifadede sol taraf a_{12}^j dir. O halde

$$\langle \xi_j, \overline{D}_{e_1}e_2\rangle = -a_{12}^j$$

dır. Ayrıca $\overline{D}_{e_1}e_2e_1$ ve $\overline{D}_{e_1}e_2e_2$ olduğundan

$$\overline{D}_{e_1}e_2 = V(e_1, e_2) \tag{3.31}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}\langle \overline{D}_{e_1}e_2, \xi_j\rangle &= \langle A_{\xi_j}(e_1), e_2\rangle \\ &= -\langle V(e_1, e_2), \xi_j\rangle\end{aligned}$$

olduğundan

$$\langle V(e_1, e_2), \xi_j\rangle = -a_{12}^j$$

elde edilir. O halde son olarak

$$V(e_1, e_2) = \sum_{j=1}^{n-2}\langle V(e_1, e_2), \xi_j\rangle\xi_j$$

$$V(e_1, e_2) = -\sum_{j=1}^{n-2} a_{12}^j\xi_j \tag{3.32}$$

bulunur. Böylece son denklem ve (3.31) denkleminden

$$\overline{D}_{e_1}e_2 = -\sum_{j=1}^{n-2} a_{12}^j\xi_j \tag{3.33}$$

dir.

Teorem3.3.1. M^{**}, E^n de 2 boyutlu regle yüzey olsun. Bu taktirde M^{**} nin Gauss eğriliği

$$G = -\sum_{j=1}^{n-2} (a_{12}^{j})^2 \tag{3.34}$$

dir [Thas, 1978b].

İspat. (3.22) denkleminden

$$G = \langle \overline{D}_{e_1} e_2, \overline{D}_{e_1} e_2 \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde (3.27) i yerine yazarsak

$$G = -\sum_{j=1}^{n-2} (a_{12}^{j})^2$$

elde edilir.

Bu teorem ve sonuç3.3.1 den aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç3.3.4. E^n de M^{**} regle yüzeyinin Gauss eğriliği, Lipschitz-Killing eğriliğine bağlı olarak

$$G(p) = -\sum_{j=1}^{n-2} G(P, \xi_j)$$

dir.

Sonuç3.3.5. E^n de M regle yüzeyi açılabilirdir $\Leftrightarrow$ Gauss eğriliği sıfıra eşittir [Thas, 1978b].

Sonuç3.3.6. E^n de M regle yüzeyi açılabilirdir $\Leftrightarrow$ Lipschitz-Killing eğriliği her noktada sıfırdır [Thas, 1978b].

KAYNAKLAR

BAYRAM B., BULCA B., ARSLAN K., ÖZTÜRK G., Superconformal Ruled Surfaces in E^4, Mathematical Communications, Vol 14, No:2, pp 235-244 (2009).

BURES, J., Some Remarks On Surfaces In The 4-dimensional Euclidean Space. Czechoslovak Math. Journ. 25, pp 479-490 (1974).

CHEN B. Y., Geometry of Submanifolds, Dekker, New York (1973).

HACISALIHOĞLU, H., Diferensiyel Geometri Cilt I. A.Ü. Fen Fakültesi (1992).

HACISALIHOĞLU, H., Diferensiyel Geometri Cilt II. A.Ü. Fen Fakültesi (1993).

JUZA M., Ligne de striction sur une generalisation a plusierurs dimensions d'une surface regle, Czechosl. Math. J. 12, pp 243-250 (1962).

PLASS M. H., Ruled Surfaces in Euclidean Four Space, Ph D. Thesis Massachusetts Institute of Technology (1939).

THAS C., Minimal Monosystems, Yokohama Math J. 26, pp 157-167 (1978a).

THAS C., Properties of ruled surfaces in the Euclidean Spaces E^m , Academia Sinica, Vol 6, No:1, pp 133-142 (1978b).

ÖZGEÇMİŞ

Doğan Ünal, 01.01.1986 da İstanbul’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Fatih’te tamamladı. 2003 yılında Adile Mermerci Anadolu Lisesi’nden mezun oldu. Aynı yıl başladığı Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nü 2007 yılında bitirdi. Yine aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nde yüksek lisans öğrenimine başladı ve 2007-2009 yılları arasında Kültür Dersaneleri ve Eduway Dersanleri’ nde Matematik Öğretmenliği yaptı. 2009 yılından bu yana da Sakarya Üniversitesi Uzaktan Eğitim Merkezi’ nde uzman olarak çalışmaktadır.