T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEMPOTENT MATRİSLER ve İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARININ NONSİNGÜLERLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet DENİZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR

Eylül 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEMPOTENT MATRİSLER ve İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARININ NONSİNGÜLERLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet DENİZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 22 / 09 / 2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR	**Doç. Dr. Refik KESKİN**	**Doç. Dr. Elman ALİYEV**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Tez konusu seçiminde ve çalışmanın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, çok değerli hocam Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR' e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarıma, yakın desteğini gördüğüm Matematik Bölümü Arş. Gör. Murat SARDUVAN' a ve beni bugünlere getiren sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet DENİZ
Eylül 2006

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.......... ii
İÇİNDEKİLER.......... iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.......... v
ÖZET.......... vi
SUMMARY.......... vii

BÖLÜM 1.
ÖN BİLGİLER.......... 1
1.1. Giriş.......... 1
1.2. Bir Matrisin Rankı.......... 1
1.3. Bir Matrisin Sütun Uzayı ve Sıfır Uzayı.......... 2
1.4. Bazı Özel Matrisler.......... 3
1.5. Nonsingülerlikle İlgili Önemli Bir Lemma.......... 4
1.6. Matrislerde Direkt Çarpım.......... 5
1.7. Bir Matrisin Koşullu Tersi (c-inversi).......... 5

BÖLÜM 2.
İDEMPOTENT ve TRİPOTENT MATRİSLER.......... 6
2.1. Giriş.......... 6
2.2. İdempotent ve Tripotent Matrislerle İlgili Bazı Özellikler.......... 6
2.3. İdempotent ve Tripotent Matrislerin Lineer Kombinasyonları.......... 11
2.3.1. İki idempotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliği.......... 11

2.3.2. Bir idempotent ve bir tripotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliği………………………… 13
2.3.3. İki değişmeli tripotent matrisin lineer kombinasyonunun tripotentliği………………………………………………... 14

BÖLÜM 3.
İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARININ NONSİNGÜLERLİĞİ……………………………………………………….. 17
3.1. Giriş.. 17
3.2. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun Nonsingülerliği 17
3.2.1. Sonuçlar.. 18
3.3. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun İnvolutifliği…... 27

BÖLÜM 4.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.. 33

KAYNAKLAR.. 35
ÖZGEÇMİŞ.. 37

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_n$	: n boyutlu kompleks elemanlı vektörler kümesi
$\mathbb{C}_{m,n}$	: $m \times n$ boyutlu kompleks elemanlı matrislerin kümesi
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, ...$	: Matrisler; $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{C}_{m,n}$
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	: Vektörler; $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_i\right) \in \mathbb{C}_{m,n}$
$a, b, c, ...$	: Skalerler; $a \in \mathbb{C}$
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değil
$=$	: Eşit
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\neq$	: Eşit değil
$\Re(\mathbf{A})$	: **A** matrisinin sütun uzayı
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	: **A** matrisinin sıfır uzayı
$p \Rightarrow q$	: p doğru ise q da doğrudur.
$\mathcal{P}$	: $n \times n$ kompleks idempotent matrislerin kümesi
$\mathbf{A}^*$	: **A** matrisinin eşlenik transpozesi
$\mathbf{A}'$	: **A** matrisinin transpozesi
$\det(\mathbf{A})$	: **A** matrisinin determinantı
$\mathrm{iz}(\mathbf{A})$	: **A** matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanlarının toplamı
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	: **A** ile **B** matrisinin direkt çarpımı
$\mathbb{C}_*$	: Sıfırdan farklı kompleks sayılar kümesi

ÖZET

Anahtar kelimeler: İdempotent matris; Tripotent matris; Nonsingülerlik; Lineer kombinasyon; İnvolutif matris.

Kuadratik formların, özellikle idempotent matrisli kuadratik formların istatistik teorilerinde merkezi bir rol oynadığı iyi bilinmektedir. Bununla birlikte istatistik teorisi ile ilgili detaylar bu çalışmada verilmemektedir.

Bu çalışmanın amacı iki aşamalıdır: $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ herhangi iki idempotent matris, c_1 ve c_2 skalerler olmak üzere $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonunun nonsingülerliğiyle ilgili olan ve J. K. Baksalary ve O. M. Baksalary[2] tarafından ele alınan problemi incelemek ve ikinci olarak iki değişmeli idempotent matrisin lineer kombinasyonunun bir involutif matris olduğu tüm durumları karakterize etme problemi için tam çözüm ortaya koymaktır. Bir involutif matris daima nonsingüler olduğundan dolayı ikinci durum, birinci durumun özel bir durumu olduğuna dikkat etmek gerekir.

Çalışma şöyle düzenlenmiştir. Bazı temel tanımlar ve yardımcı sonuçlar Bölüm 1 de verilmektedir. Bölüm 2 de, idempotent ve tripotent matrislerin lineer kombinasyonları ile ilgili bazı sonuçlar sunulmaktadır. Yukarıda bahsedilen esas konular Bölüm 3 te tartışılmaktadır.

IDEMPOTENT MATRICES AND NONSINGULARITY OF LINEAR COMBINATIONS OF IDEMPOTENT MATRICES

SUMMARY

Keywords: Idempotent matrix; Tripotent matrix; Nonsingularity; Linear combination; Involutive matrix.

It is well known that quadratic forms, particulary those with idempotent matrices play a central role in statistical theory. However, it is not given the details of the statistical theory here.

The purpose of this study is two fold: to investigate the problem considered by Baksalary and Baksalary[2], which deals with the nonsingularity of any linear combination $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ where $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$ are any two idempotent matrices and c_1 and c_2 are scalars, and secondly, to established complete solutions to the problem of characterizing all situations in which a linear combinations of two commuting idempotent matrices is an involutive matrix. Notice that the latter is a special case of the former because of the fact that an involutive matrix is always nonsingular.

The study is organized as follows. Some basic definitions and auxiliary results are given in Chapter 1. In Chapter 2, some results related to the linear combinations of idempotent and tripotent matrices are presented. Main subjects mentioned above are discussed in Chapter 3.

BÖLÜM 1. ÖN BİLGİLER

1.1. Giriş

Çalışma, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerine inşa edilmektedir. Bir m×n boyutlu $\mathbf{A}$ matrisi, kompleks sayıların dikdörtgensel bir düzenlemesidir. Yaygın olarak kullanıldığı gibi, bu $\mathbf{A}\left(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\right)$ olarak yazılır. $\mathbf{a}_{\mathrm{ij}}$, $\mathbf{A}$ nın i. satır ve j. sütununda bulunan elemanı gösterir. Çalışma boyunca matrisler koyu ve büyük harflerle ($\mathbf{A}$ gibi), vektörler koyu ve küçük harflerle ($\mathbf{a}$ gibi), skalerler ise küçük italik harfler (c gibi) ile gösterilecektir.

Bu bölümde, konu ile ilgili temel kavramlar ve ispatsız olarak bazı özellikler ve teoremler verilmektedir.

1.2. Bir Matrisin Rankı

Tanım 1.2.1 : $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektörler kümesini ele alalım. Eğer

$$\sum a_i \mathbf{x}_i = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, ..., a_n$ skalerleri bulunamıyorsa $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ vektörlerine, lineer bağımsız değil ise lineer bağımlıdır denir[6].

Tanım 1.2.2: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. $\mathbf{A}$ nın sütun rankı onun içerdiği lineer bağımsız sütunlarının maksimum sayısıdır. $\mathbf{A}$ nın satır rankı onun içerdiği lineer bağımsız satırların maksimum sayısıdır.

Özellikler 1.2.3:1. Bir matrisin satır rankı ile sütun rankı aynıdır.

2. Elementer satır ya da sütun işlemleri matrisin rankını değiştirmez.

3. Birinci ve ikinci uyarılar blok matrisler için de geçerlidir.

4. Eğer bir matrisin rankı satır veya sütun sayısına eşit ise bu matrise tam ranklı matris denir[9,11].

Uyarı 1.2.4: Bundan böyle bir $\mathbf{A}$ matrisi için sütun ya da satır rank ifadesi değil, kısaca rank ifadesi kullanılacak ve $r(\mathbf{A})$ ile gösterilecektir.

1.3. Bir Matrisin Sütun Uzayı ve Sıfır Uzayı

Tanım 1.3.1(Bir matrisin sütun uzayı): $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,m}$ olsun. ($\mathbf{A}$ nın sütunları $\mathbb{C}_n$ de vektör olarak gösterilebilir. Dolayısıyla $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m]$ yazılabilir.) $\mathbf{A}$ nın sütunları tarafından üretilen vektör uzayı $\mathbf{A}$ nın sütun uzayı olarak tanımlanır ve $\Re(\mathbf{A})$ ile gösterilir[8].

Uyarı 1.3.2: $\mathbf{A}$ nın sütun uzayının boyutunun, $\mathbf{A}$ nın lineer bağımsız sütunlarının sayısına yani $\mathbf{A}$ nın rankına eşit olduğuna dikkat etmek gerekir. $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,m}$ matrisinin sütun uzayını tanımlamanın diğer bir yolu, $\Re(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{Ab}\,; \mathbf{b} \in \mathbb{C}_m\}$ dir[8].

Teorem 1.3.3: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ bir nonsingüler matris (tersi olan matris) olsun. Bu durumda $\mathbf{A}$ nın sütun uzayı $\mathbb{C}_n$ dir[8].

Tanım 1.3.4(Bir matrisin sıfır uzayı): $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,m}$ olsun. $\mathbf{A}$ nın sıfır uzayı $S = \{\mathbf{y} : \mathbf{Ay} = \mathbf{0}\,; \mathbf{y} \in \mathbb{C}_m\}$ şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ ile gösterilir[8].

Teorem 1.3.5: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,m}$ matrisinin sıfır uzayı $\mathbb{C}_m$ nin bir alt vektör uzayıdır[8].

Teorem 1.3.6: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,m}$ olsun. $\mathbf{A}$ nın sıfır uzayı ve $\mathbf{A}$ nın sütun uzayının ortogonal tümleyeni aynıdır[8].

1.4. Bazı Özel Matrisler

Tanım 1.4.1: $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_{n,n}$ olmak üzere; $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ koşulunu sağlayan $\mathbf{P}$ matrisine idempotent matris, eğer $\mathbf{P}$ matrisi $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ şartını da sağlıyorsa, bu $\mathbf{P}$ matrisine simetrik idempotent matris denir[8].

Tanım 1.4.2: $\mathbf{T} \in \mathbb{C}_{n,n}$ olmak üzere $\mathbf{T} = \mathbf{T}^3$ koşulunu sağlayan $\mathbf{T}$ matrisine tripotent matris, eğer $\mathbf{T}$ matrisi $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$ şartını da sağlıyorsa, bu $\mathbf{T}$ matrisine simetrik tripotent matris denir[8].

Tanım 1.4.3: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine, eğer eşlenik transpozesine eşit ise hermityen matris denir. Yani $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ için eğer, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ ise $\mathbf{A}$ matrisine hermityen matris denir[7].

Özellik 1.4.4: Hermityen matrisin özdeğerleri reeldir[7].

Tanım 1.4.5: $\mathbf{T} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine, eğer $\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}$, $\mathbf{T}^2 \neq \mathbf{T}$ ve $\mathbf{T}^2 \neq -\mathbf{T}$ koşullarını sağlıyorsa gerçek tripotent matris denir.

Bir $\mathbf{T}$ gerçek tripotent matrisinin en önemli özelliği, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ idempotent matrislerinin farkı olarak $\left(\mathbf{T} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\right)$ tek türlü yazılabilmesidir (bkz. Lemma 5.6.6, [17]).

Tanım 1.4.6: Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ simetrik matrisine, eğer $\mathbf{y} \in \mathbb{C}_n \backslash \{0\}$ vektörü için $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} > \mathbf{0}$ ise pozitif kararlı ve her $\mathbf{y} \in \mathbb{C}_n$ vektörü için $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ ise pozitif yarı-kararlı matris denir[15].

Tanım 1.4.7: Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine, eğer

$$\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

koşulunu gerçekliyorsa ortogonal matris denir. Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$ veya $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$ özelliklerinden yalnız ve yalnız birini sağlıyorsa yarı-ortogonal matris denir[15].

Uyarı 1.4.8: Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisinin ortogonal olmasının gerek ve yeter bir koşulunun $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$ olduğuna dikkat edelim.

Tanım 1.4.9: Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine, simetrik idempotent bir matris ise bir izdüşüm matrisi denir[8].

Tanım 1.4.10: $\mathbf{A}^2 = \mathrm{I}$ koşulunu sağlayan bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine involutif matris denir[8].

Tanım 1.4.11: Bir $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi için $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ oluyorsa $\mathbf{A}$ matrisine normal matris denir[6].

1.5. Nonsingülerlikle İlgili Önemli Bir Lemma

Lemma 1.5.1: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisinin nonsingüler olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ olmasıdır[13].

1.6. Matrislerde Direkt Çarpım

Tanım 1.6.1: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{m_2,n_2}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_{m_1,n_1}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin direkt çarpımı $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ biçiminde gösterilir ve

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}b_{11} & \mathbf{A}b_{12} & \cdots & \mathbf{A}b_{1n_1} \\ \mathbf{A}b_{21} & \mathbf{A}b_{22} & \cdots & \mathbf{A}b_{2n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}b_{m_1 1} & \mathbf{A}b_{m_1 2} & \cdots & \mathbf{A}b_{m_1 n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\mathbf{A} & b_{12}\mathbf{A} & \cdots & b_{1n_1}\mathbf{A} \\ b_{21}\mathbf{A} & b_{22}\mathbf{A} & \cdots & b_{2n_1}\mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m_1 1}\mathbf{A} & b_{m_1 2}\mathbf{A} & \cdots & b_{m_1 n_1}\mathbf{A} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır[8].

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \in \mathbb{C}_{m_1 m_2, n_1 n_2}$ olduğuna dikkat etmek gerekir.

1.7. Bir Matrisin Koşullu Tersi (c-inversi)

Tanım 1.7.1: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. $\mathbf{A}$ matrisi için $\mathbf{A}\mathbf{A}^c\mathbf{A} = \mathbf{A}$ koşulunu sağlayan bir $\mathbf{A}^c \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi varsa bu matrise $\mathbf{A}$ nın bir koşullu tersi (c-inversi) denir[8].

Uyarı 1.7.2: Her $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{m,n}$ matrisin en az bir c-inversi olup tek olmayabilir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgi, örneğin [8] de bulunabilir.

Bundan sonraki bölümlerde aksi vurgulanmadığı sürece matrisler kompleks matrisler olacaktır.

BÖLÜM 2. İDEMPOTENT ve TRİPOTENT MATRİSLER

2.1. Giriş

Bu bölümde öncelikli olarak idempotent ve tripotent matrislerin iyi bilinen özelliklerine yer verilmektedir. Sonra, bu tip matrislerin lineer kombinasyonlarına ilişkin güncel ve önemli birkaç çalışmadan bahsedilecektir. Bu çalışmalar $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_3$ idempotent matrislerinin $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonların idempotentliğine dair iki, $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$ şeklindeki lineer kombinasyonların idempotentliğine dair bir ve $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ tripotent matrisler olmak üzere $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonların tripotentliğine dair bir çalışmadan oluşmaktadır.

$\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ sıfır olmayan idempotent matrislerinin $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonların idempotentliği hakkındaki çalışmalar literatürde çoktan yer almaktadır(Bkz. örneğin, Teorem 5.1.2 ve 5.1.3 [17]).

Bu tip matrislerin ve yukarıda bahsedilen çalışmaların cebirsel özellikleri yanı sıra istatistik teorilerinde oynadıkları rol bakımından da oldukça önemli olduğunu vurgulamakta yarar vardır.

2.2. İdempotent ve Tripotent Matrislerle İlgili Bazı Özellikler

Bu kısımda idempotent ve tripotent matrislerin iyi bilinen bazı özellikleri ispatsız olarak sıralanacaktır.

Teorem 2.2.1: Eğer $\mathbf{P}$ bir izdüşüm matrisi ise, iz$\mathbf{P}$ = rank$\mathbf{P}$ dir[18].

Teorem 2.2.2: İzdüşüm matrisleri pozitif yarı kararlıdır[18].

Teorem 2.2.3: Eğer $\mathbf{P}_i\left(i=1,2\right)$ bir izdüşüm matrisi ve $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$ pozitif yarı kararlı ise, bu durumda $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$ matrisleri birer izdüşüm matrisleridir[18].

Teorem 2.2.4: $\mathbf{P}$ idempotent ve pozitif yarı kararlı bir matris ise,

$$\mathbf{TAT}'=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

koşulunu sağlayan bir $\mathbf{T}$ ortogonal matris vardır[19].

Teorem 2.2.5: Eğer $\mathbf{P}$ simetrik ise, $\mathbf{P}$ nin idempotent ve r ranklı olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{P}$ nin r tane özdeğerinin 1' e ve n-r tane özdeğerinin 0' a eşit olmasıdır[18].

Teorem 2.2.6: $\mathbf{P}$ idempotent bir matris ise tüm özdeğerleri 0 veya 1 sayılarından oluşur[19].

Teorem 2.2.7: Eğer $\mathbf{P}$ idempotent ise $\mathbf{I}-\mathbf{P}$ de idempotenttir[18].

Teorem 2.2.8: $\mathbf{P}$ tam ranklı $n\times n$ boyutlu bir idempotent matris ise $\mathbf{P}=\mathbf{I}$ dır. Eğer $\mathbf{P}$ rankı n den daha küçük olan bir izdüşüm matrisi ise o zaman $\mathbf{P}$ pozitif yarı kararlı bir matristir[8].

Lemma 2.2.9: $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}=\mathbf{FG}$ şeklinde yazılabilen tam ranklı bir kare matris olsun. Bu durumda $\mathbf{P}$ nin idempotent bir matris olması için bir gerek ve yeter koşul $\mathbf{GF}=\mathbf{I}$ olmasıdır[6].

Teorem 2.2.10: $\mathbf{P}$, $n\times n$ boyutlu bir idempotent matris olsun.

a) $\mathbf{P}^*$ matrisi idempotenttir.

b) $\mathbf{Px}=\mathbf{x}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{x}\in\Re\left(\mathbf{P}\right)$ olmasıdır.

c) $\mathcal{N}\left(\mathbf{P}\right)=\Re\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)$ dir[6].

Teorem 2.2.11: $\mathbf{P}$ $n \times n$ boyutlu p, $(p<n)$ ranklı herhangi bir matris olsun.

a) Eğer $\mathbf{P}$ idempotent matris ise, $\mathbf{P}$ nin p tane sıfırdan farklı özdeğeri vardır ve bunların hepsi 1' e eşittir.

b) Eğer $\mathbf{P}$ simetrik matris ise $\mathbf{P}$ nin idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{P}$ nin sıfırdan farklı ve hepsi 1'e eşit olan p tane özdeğerinin var olmasıdır[8].

Teorem 2.2.12: Eğer $\mathbf{P}$ i. köşegen elemanı 1 e eşit olan $n \times n$ boyutlu bir simetrik idempotent matris ise o zaman onun i. köşegen elemanı hariç olmak üzere i. satır ve i. sütunundaki elemanlar sıfırdır[8].

Teorem 2.2.13: Eğer $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ $n \times n$ boyutlu idempotent matrisler ise $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ matrisi de idempotent bir matristir[8].

Teorem 2.2.14: $\mathbf{P}_1$, $n \times n$ boyutlu izdüşüm matrisi olsun. Bu durumda $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}_1$ matrisi simetrik ve ortogonal bir matristir[8].

Teorem 2.2.15: **A ve B** $n \times n$ boyutlu matrisler olsun. Eğer $\mathbf{ABA} = \mathbf{A}$ veya $\mathbf{BAB} = \mathbf{B}$ ise bu durumda $\mathbf{AB}$ ve $\mathbf{BA}$ matrisleri idempotenttir[8].

Teorem 2.2.16: $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ $n \times n$ boyutlu idempotent matrisler olsun. Eğer $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ise $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ matrisleri de idempotenttir[8].

Teorem 2.2.17: $n \geq m$ olmak üzere $\mathbf{P}$ $m \times n$ boyutlu matrisi $\mathbf{PP}' = \mathbf{I}$ koşulunu sağlasın, yani $\mathbf{P}$ satırları ortogonal normal bir matris olsun. Bu durumda $\mathbf{P}'\mathbf{P}$ $n \times n$ boyutlu simetrik idempotent matristir[8].

Teorem 2.2.18: $\mathbf{A}$ herhangi bir $m \times n$ boyutlu matris olsun. Bu durumda $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ nın idempotent matris olması için gerek ve yeter bir koşul $\mathbf{AA}'$ nin idempotent matris olmasıdır[8].

Teorem 2.2.19: t bir pozitif tamsayısı olmak üzere $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{t+1}$ koşulunu sağlayan $n \times n$ boyutlu simetrik bir matris olsun. Bu durumda $\mathbf{P}$ idempotent bir matristir[8].

Teorem 2.2.20: $\mathbf{A}$ herhangi bir $m \times n$ boyutlu matris olsun. Bu durumda $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ nın idempotent matris olması için gerek ve yeter bir koşul $\mathbf{A}'$ nün $\mathbf{A}$ nın bir c-inversi olmasıdır[8].

Teorem 2.2.21: $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ $n \times n$ boyutlu izdüşüm matrisleri olsun. Bu durumda $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ nin izdüşüm matris olması için gerek ve yeter bir koşul $\mathbf{P}_1\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\right) = \mathbf{0}$ olmasıdır[8].

Teorem 2.2.22: $\mathbf{T}$ $n \times n$ boyutlu simetrik tripotent matris olsun.

a) $\mathbf{A}$ herhangi bir $n \times n$ boyutlu ortogonal matris olmak üzere $\mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{A}$ $n \times n$ boyutlu simetrik tripotent matristir.

b) $\mathbf{B}$ herhangi bir nonsingüler matris olmak üzere $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B}$ $n \times n$ boyutlu tiripotent matristir.

c) $\mathbf{T}^2$ $n \times n$ boyutlu izdüşüm matristir.

d) $-\mathbf{T}$ $n \times n$ boyutlu simetrik tripotent bir matristir.

e) $\mathbf{T}$ matrisinin c-inversinin $\mathbf{T}$ ye eşit olmasının bir gerek ve yeter koşulu $\mathbf{T}$ matrisinin tiripotent olmasıdır[8].

Teorem 2.2.23: $\mathbf{T}$ herhangi $n \times n$ boyutlu bir tripotent matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{T}$ nin özdeğerleri -1, 0 veya 1 sayılarından oluşur[8].

Teorem 2.2.24: $\mathbf{T}$, herhangi bir $n \times n$ boyutlu simetrik matris olsun. $\mathbf{T}$ nin simetrik tripotent bir matris olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbf{T} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ olacak şekilde iki ayrık, simetrik, idempotent $n \times n$ boyutlu $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin var olmasıdır. Bundan başka, bu matrisler

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^2 + \mathbf{T}\right) \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}^2 - \mathbf{T}\right)$$

şeklinde tek türlü tanımlanır[8].

Teorem 2.2.25: $\mathbf{T}$ herhangi $n \times n$ boyutlu bir tripotent matris olsun. O zaman $\text{rank}(\mathbf{T}) = \text{iz}(\mathbf{T}^2)$ dir[8].

Teorem 2.2.26: $\mathbf{T}$ herhangi $n \times n$ boyutlu tripotent matris olsun ve $\mathbf{T}$ nin n_1 özdeğeri 1 e, n_2 özdeğeri -1 e ve n_3 özdeğeri 0 a eşit olsun. Bu durumda,

a) $\frac{1}{2}\text{iz}(\mathbf{T}^2 + \mathbf{T}) = n_1$,

b) $\frac{1}{2}\text{iz}(\mathbf{T}^2 - \mathbf{T}) = n_2$,

c) $\text{iz}(\mathbf{I} - \mathbf{T}^2) = n_3$,

d) $\text{iz}(\mathbf{T}) = n_1 - n_2$

dir[8].

Teorem 2.2.27: $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$, $n \times n$ boyutlu simetrik matrisler olsun.

- **a)** Eğer $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri idempotent ve $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ise o zaman $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ matrisi simetrik ve tripotenttir.
- **b)** Eğer $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri idempotent ise, o zaman $\mathbf{A}$, $-\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve $-\mathbf{B}$ matrisleri simetrik ve tripotenttir.
- **c)** $\mathbf{A}$ $(\text{veya } \mathbf{B})$ matrisinin tiripotent matris olmasının gerek ve yeter bir koşulu $\mathbf{A}^2$ (veya $\mathbf{B}^2$) nin idempotent bir matris olmasıdır[8].

Teorem 2.2.28: $\mathbf{T}$ herhangi $n \times n$ boyutlu nonsingüler tripotent bir matris ise, bu durumda:

$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$, $\mathbf{T}^2 = \mathbf{I}$ veya $(\mathbf{T} + \mathbf{I})(\mathbf{T} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$

dır[8].

2.3. İdempotent ve Tripotent Matrislerin Lineer Kombinasyonları

Kısım 2.2 de idempotent matrisler ve doğrudan idempotent matrisler ile ilişkili olan tripotent matrislerin bazı özellikleri ispatsız olarak verilmiştir. Bu çalışmanın esasını idempotent matrislerin lineer kombinasyonlarının nonsingülerliği oluşturmaktadır. Dolayısıyla bu kısımda idempotent ve tripotent matrislerin lineer kombinasyonları üzerindeki güncel çalışmaların son yıllardaki gelişimi kısaca tanıtılacaktır.

2.3.1. İki idempotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliği

J. K. Baksalary ve O. M Baksalary [1], iki idempotent matris verildiğinde bunların lineer kombinasyonunun da idempotent olduğu tüm durumları karakterize etmiştir. Çalışmada ortaya konan temel teorem ve sonucu aşağıda verilmektedir.

Teorem 2.3.1: $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ sıfırdan farklı idempotent matrisler, c_1 ve c_2 sıfır olmayan kompleks skalerler olmak üzere $\mathbf{P}$, bu matrislerin

$$\mathbf{P} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}$$

biçimindeki lineer kombinasyonu olsun. Bu durumda $\mathbf{P}$ nin idempotent olduğu tam olarak dört durum vardır.

(a) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ise,

- **(i)** $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$,
- **(ii)** $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$,
- **(iii)** $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$,

(b) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ ise $c_1 \in \mathbb{C}/\{0,1\}$, $c_2 = 1 - c_1$, $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = \mathbf{0}$ dır[1].

Sonuç 2.3.2: Teorem 2.3.1.'in varsayımları altında, $\mathbf{P} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}$ nin idempotent matris olması için gerekli koşul $\mathbf{AB}$ ve $\mathbf{BA}$ çarpımlarının her birinin idempotent matris olmasıdır[1].

H.Özdemir ve A.Y. Özban[16] ın, Teorem 2.3.1 in (a) şıkkının farklı bir ispatını vermiş olduğunu hatırlatmakta yarar vardır. O çalışmada, sıfır olmayan, karşılıklı komutatif üç farklı idempotent matris verildiğinde onların lineer kombinasyonunun idempotent olduğu bazı durumları karakterize etme problemi de ele alınmıştır. Bu probleme ilişkin olarak ortaya koydukları esas sonuç aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 2.3.3: $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_\mathrm{i} \neq \mathbf{P}_\mathrm{j}$ ve $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ şartını sağlayan değişmeli idempotent matrisler $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ sıfırdan farklı kompleks skalerler olmak üzere $\mathbf{P}$ onların

$$\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3$$

şeklindeki lineer kombinasyonu olsun. Bu durumda $\mathbf{P}$'nin idempotent olduğu durumlar aşağıdadır:

(a) $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $\mathbf{P}_\mathrm{i}\mathbf{P}_\mathrm{j} = \mathbf{0}$, $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, $\mathrm{i}, \mathrm{j} = 1,2,3$

(b) $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$)

(c) $c_1 = -1$, $c_2 = c_3 = 1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$)

(d) $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = -1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$)

Ayrıca $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$ ve $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2$ (denk olarak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3$) olacak şekilde hiçbir $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ matrisi yoktur[16].

Üçlü lineer kombinasyonlarla ilgili benzer bir çalışmanın O. M. Baksalary [5] tarafından yapılmış olduğunu da belirtmek gerekir.

2.3.2. Bir idempotent ve bir tripotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliği

J. K. Baksalary ve O. M Baksalary ve G.P.H. Styan[4], bir idempotent ve bir gerçek tripotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotent olduğu tüm durumları karakterize etme problemini ele almıştır. Çalışmadaki esas sonuçlar aşağıdaki teoremlerde verilmektedir.

Teorem 2.3.4: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan farklı bir idempotent matris ve $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_{n,n}$, Tanım 1.4.5 de bahsedilen tektürlü ayrışımı $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ olan bir gerçek tripotent matris olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sıfırdan farklı olmak üzere $\mathbf{C}$ matrisi, $\mathbf{C} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}$, yani

$$\mathbf{C} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}_1 - c_2\mathbf{B}_2$$

biçimindeki $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin bir lineer kombinasyonu olsun. Bu durumda $\mathbf{C}$ nin idempotent matris olduğu tüm durumlar aşağıdadır.

(a) $\mathbf{AB}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{A}$ ise,

(a_1) $c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ \mathbf{AB}_1 = \mathbf{0},\ \mathbf{AB}_2 = \mathbf{B}_2,$

(a_2) $c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ \mathbf{A} = \mathbf{B}_2,$

(a_3) $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ \mathbf{AB}_1 = \mathbf{B}_1,\ \mathbf{AB}_2 = \mathbf{0},$

(a_4) $c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ \mathbf{A} = \mathbf{B}_1,$

(a_5) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2},\ \mathbf{A} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$

(a_6) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2},\ \mathbf{A} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$

$(\mathbf{b})$ $\mathbf{AB}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}_2 \neq \mathbf{B}_2\mathbf{A}$ ise,

(b_1) $c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2)^2 = \mathbf{0},$

(b_2) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2}$, $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2)^2 = \mathbf{B}_1$,

$(\mathbf{c})$ $\mathbf{AB}_1 \neq \mathbf{B}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{A}$ ise,

(c_1) $c_1 = 2,\ c_2 = -1$, $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1)^2 = \mathbf{0}$,

(c_2) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2}$, $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1)^2 = \mathbf{B}_2$,

(d) $\mathbf{AB}_1 \neq \mathbf{B}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}_2 \neq \mathbf{B}_2\mathbf{A}$ ise,

$c_1 = 1$ ve c_2 de

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1)^2 - (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2)^2 = c_2(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$$

denkleminin bir çözümüdür[4].

Teorem 2.3.5: Teorem 2.3.3 ün varsayımları altında $\mathbf{C} = c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}_1 - c_2\mathbf{B}_2$ matrisinin idempotent olmasının bir gerek şartı;
$\mathbf{A}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ ve $(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\mathbf{A}$ çarpımlarının her birinin idempotent olmasıdır[4].

2.3.3. İki değişmeli tripotent matrisin lineer kombinasyonunun tripotentliği

İki değişmeli tripotent matrisin lineer kombinasyonunun tripotent olduğu tüm durumları karakterize etme problemi J. K. Baksalary, O. M Baksalary ve H. Özdemir [3] tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmanın esas sonucu aşağıdaki teoremde verilmektedir. Bu teoremde, matrislerden birinin diğerinin bir skaler katı olması durumu hariç tutulmaktadır. Ancak bunun nedeni kısaca vurgulanmıştır. Bu nedenle, önce bu trivial durumu bir lemma şeklinde ispatlı olarak inşa edilecek ve sonra adı geçen teorem verilecektir.

Lemma 2.3.6: $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ sıfırdan farklı iki tripotent matris ise $\mathbf{T}_1$ in $\mathbf{T}_2$ nin skaler katı olduğu yalnızca $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ durumları vardır.

İspat: Diyelim ki $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ nin bir skaler katı olsun:

$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^3 = c^3\mathbf{T}_2^3 = c^3\mathbf{T}_2 = c^2 c\mathbf{T}_2 = c^2\mathbf{T}_1$

buradan $\left(c^2 - 1\right)\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ elde edilir.

$\mathbf{T}_1$ sıfırdan farklı olduğundan $c = \pm 1$ elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ sıfırdan farklı değişmeli tripotent matrisler ve c_1 ve c_2 sıfırdan farklı skalerler olmak üzere, $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ lineer kombinasyonunun tripotent olduğu tüm durumları ortaya koymaktadır. Ancak $\mathbf{T}_1$ in $\mathbf{T}_2$ nin skaler katı olduğu durumu hariç tutulmaktadır. Çünkü bu durumda Lemma 2.3.6 dan $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ veya $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ olur. Bu durumlarda çözüm trivialdir. Gerçekten, örneğin $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ ise $\mathbf{T} = \left(c_1 + c_2\right)\mathbf{T}_1$ olur. Buradan

$$\left(c_1 + c_2\right)^3 \mathbf{T}_1^3 = \left(c_1 + c_2\right)\mathbf{T}_1 \;\Rightarrow\; \left[\left(c_1 + c_2\right)^3 - \left(c_1 + c_2\right)\right]\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$$

elde edilir. Buradan $c_1 + c_2 = 0$ veya $c_1 + c_2 = 1$ veya $c_1 + c_2 = -1$ olur. Dolayısıyla $\mathbf{T}$ nin tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu $c_2 = -c_1$ veya $c_2 = -c_1 + 1$ veya $c_2 = -c_1 - 1$ olarak bulunur. Bunlar ise sırasıyla $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T} = -\mathbf{T}_1$ olmasına karşılık gelir.

$\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ olması durumunda da aynı sonuçlar elde edilir.

Teorem 2.3.7: $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \mathbb{C}_{\mathrm{n,n}}$ değişme özelliğini sağlayan sıfırdan farklı tripotent matrisler ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sıfırdan farklı skalerleri için $\mathbf{T}$ onların $\mathbf{T} = c_1\mathbf{T}_1 + c_2\mathbf{T}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonu olsun. Bu durumda $\mathbf{T}_1 \neq \pm\mathbf{T}_2$ kabulü altında $\mathbf{T}$ matrisi tripotenttir ancak ve ancak aşağıdaki şartlardan biri sağlanır.

(a) $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ veya $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$

(b) $c_1 = 1,\ c_2 = -2$ veya $c_1 = -1,\quad c_2 = 2$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$

(c) $c_1 = 2,\ c_2 = -1$ veya $c_1 = -2,\ c_2 = 1$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$

(d) $c_1 = 1,\ c_2 = 1$ veya $c_1 = -1,\ c_2 = -1$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$

(e) $c_1 = 1,\ c_2 = 2$ veya $c_1 = -1,\ c_2 = -2$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$

(f) $c_1 = 2,\ c_2 = 1$ veya $c_1 = -2,\ c_2 = -1$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2$

(g) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2}$ veya $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2}$ veya $c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2}$ veya $c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2}$ ve $\mathbf{T}_1^2\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2,\ \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2^2 = \mathbf{T}_1$ dir[3].

Bu teoremin koşullarını sağlayan aşağıdaki örneği verebiliriz;

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{T}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{T}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{T}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}^{(1)}$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}^{(2)}$ alındığında teoremin (a) ve (b) durumları sağlanır. $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}^{(2)}$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}^{(1)}$ alındığında teoremin (c) durumu, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}^{(1)}$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}^{(3)}$ alındığında teoremin (d) ve (e) durumu, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}^{(3)}$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}^{(1)}$ alındığında teoremin (f) durumu ve son olarak $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}^{(1)}$ ve $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}^{(4)}$ alındığında (g) durumu sağlanır. [Bu örnekler [3] den alınmıştır.]

Gerek bu bölüm ve gerekse bu ve sonraki bölümlerde geçen kavram ve özelliklere esasen daha detaylı bilgilerin örneğin, [10], [12] ve [15] de bulunabileceğini hatırlatarak bu bölümü bitirmek istiyoruz.

BÖLÜM 3. İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARININ NONSİNGÜLERLİĞİ

3.1. Giriş

Bölüm 2 de iki idempotent matrisin lineer kombinasyonunun idempotentliği ve tripotentliği ve iki değişmeli tripotent matrisin lineer kombinasyonunun tripotentliği problemleri ele alınmıştı. Bu tip lineer kombinasyonların nonsingülerlikleri üzerinde de çalışmalar yapılmaktadır. İdempotent tripotent ve nonsingüler matrislerin birçok teoride olduğu gibi istatistik teorilerinde de önemli rol oynadığını vurgulamakta yarar vardır. Ancak burada bu konu üzerinde durulmayacaktır.

Bu bölümde J. K. Baksalary ve O. M. Baksalary [2] tarafından ele alınan bir çalışma ayrıntılı olarak incelenecektir. Bu çalışmadaki sonuçlar aslında J. Groβ ve G. Trenkler [9] ve J. J. Koliha, V. Rakočević ve I. Straškraba [13] tarafından yapılmış çalışmalarındaki sonuçları içeren güçlendirilmiş bir çalışmadır. Bundan başka, lineer kombinasyonun involutifliğe kısıtlaması durumu da ayrıca ele alınmaktadır. Bu problem hem nonsingülerliği ve hem de özel bir tipi (involutifliği) içermesi bakımından ilginç olsa gerek.

3.2. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun Nonsingülerliği

Ele alınan problem, $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ idempotent matrislerinin nontirivial (aşikar olmayan) lineer kombinasyonları ile, yani $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ idempotent matrisler olmak üzere

$$\mathbf{P}(c_1, c_2) = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad (3.1.1)$$

şeklindeki matrislerle ilgilidir. Bundan böyle genel olarak,

$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{P} \in \mathbb{C}_{n,n} : \mathbf{P} = \mathbf{P}^2 \right\}$ ve $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gösterimi kullanılacaktır.

J. Groβ ve G. Trenkler [9, sonuç 1 ve 4], $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ nin toplamının ve farkının ranklarını göz önüne almak suretiyle $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ nin, yani $\mathbf{P}(1,-1)$ ve $\mathbf{P}(1,1)$ in nonsingülerlikleri için kriterler ortaya koydular. Bu kriterler hem direkt olarak $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ nin hem de onların fonksiyonları olan matrislerin sütun ve satır uzaylarına göre ifade edilmektedir. Bu sonuçlar J. J. Koliha ve arkadaşları [13] tarafından değişik bir şekilde ortaya konulmuştur. Onların ispatları, Lemma 1.5.1' e yani

$\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ nonsingülerdir $\Leftrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$

olması gerçeğine dayanır. Ayrıca onlar Teorem 2.1 ile $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ nin nonsingülerliği ile birleştirildiğinde $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ nin nonsingülerliğini garanti eden kapalı bir koşul koymak suretiyle, [9, sayfa 393] deki, $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ nin nonsingüler ise $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ de nonsingülerdir olması gözlemini güçlendirmiştir. Bu sözü edilen ek koşulun, [9] daki Sonuç 5 ile denklem(4.2) yi birleştirmek suretiyle elde edilebileceğini vurgulamak gerekir.

3.2.1 Sonuçlar

$\mathbf{P}(c_1, -c_1)$ hariç olmak üzere (3.1.1) ile belirlenen tüm matrisler nonsingüler olsa bile $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ nin nonsingüler olması gerekmez. Örneğin:

$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise bu durumda

$$\mathbf{P}(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & c_2 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

olur. Bu matris $\det\left[\mathbf{P}(c_1, c_2)\right] = (c_1 + c_2)c_1$ olduğundan, $(c_1 + c_2) \neq 0$ olduğu sürece tüm $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için nonsingülerdir. Ancak açık olarak,

$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi nonsingüler değildir.

Bu bölümdeki esas sonuçlar bu gerçekten hareketle ortaya konulmuştur. Bu bilgiler ışığı altında $\{\mathbf{P}(c_1,c_2): c_1,c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ ailesinin elemanları ile $\{\mathbf{P}(c_1,c_2): c_1,c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ve } c_1+c_2 \neq 0\}$ alt ailesinin elemanları arasında herhangi bir ilişkinin olup olmadığı sorusunun akla gelmesi doğaldır. Aşağıdaki teorem böyle bir ilişkinin gerçekten var olduğunu ve çok güçlü olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 3.2.1: $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ olsun. Eğer $\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1 + \widetilde{c_2}\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonu $\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2} \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2} \in \mathbb{C}_*$ için nonsingüler ise, o zaman $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonu da $c_1 + c_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$ ler için nonsingülerdir.

İspat : $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$, $c_1 + c_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi keyfi skalerler olmak üzere $\mathrm{x} \in \mathcal{N}(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2)$ olsun. Bu durumda

$$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2) \;\Rightarrow\; (c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow$$

$$c_1\mathbf{P}_1\mathrm{x} = -c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.1}$$

elde edilir. (3.2.1) denklemi sırası ile önce $\mathbf{P}_1$, sonra $\mathbf{P}_2$ ile soldan çarpılır ve $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ olması göz önüne alınırsa ;

$$c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x} = -c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} \text{ ve } c_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x} = -c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.2}$$

elde edilir. (3.2.1) ve (3.2.2) den

$$c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x} = -c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x} = -c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} = c_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x} \tag{3.2.3}$$

bulunur. Buradan $c_1, c_2 \neq 0$ olduğu için (3.2.3) ün sağlanması

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x} \text{ ve } \mathbf{P}_2\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.4}$$

denklemlerinin sağlanmasını gerektirir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{c_1}+\widetilde{c_2}\right)\left(\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1+\widetilde{c_2}\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x} &= \left(\widetilde{c_1}^2\mathbf{P}_1+\widetilde{c_1}\widetilde{c_2}\mathbf{P}_2+\widetilde{c_2}\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1+\widetilde{c_2}^2\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x}\\ &= \left(\widetilde{c_1}^2\mathbf{P}_1^2+\widetilde{c_1}\widetilde{c_2}\mathbf{P}_2+\widetilde{c_2}\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1+\widetilde{c_2}^2\mathbf{P}_2^2\right)\mathbf{x}\\ &= \left(\widetilde{c_1}^2\mathbf{P}_1^2+\widetilde{c_1}\widetilde{c_2}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+\widetilde{c_2}\widetilde{c_1}\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+\widetilde{c_2}^2\mathbf{P}_2^2\right)\mathbf{x}\\ &= \left(\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1+\widetilde{c_2}\mathbf{P}_2\right)^2\mathbf{x}\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Dolayısı ile $\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1+\widetilde{c_2}\mathbf{P}_2$ nonsingüler olduğu için, eşitliğin her iki tarafı $\left(\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1+\widetilde{c_2}\mathbf{P}_2\right)^{-1}$ ile soldan çarpıldığında

$$\left(\widetilde{c_1}+\widetilde{c_2}\right)\mathbf{x}=\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1\mathbf{x}+\widetilde{c_2}\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.5}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.5) eşitliğinin soldan $\mathbf{P}_1$ ile çarpılmasıyla

$$\left(\widetilde{c_1}+\widetilde{c_2}\right)\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1\mathbf{x}+\widetilde{c_2}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \widetilde{c_1}\mathbf{P}_1\mathbf{x}+\widetilde{c_2}\mathbf{P}_1\mathbf{x}-\widetilde{c_1}\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\widetilde{c_2}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.6}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitliğin (3.2.3) denkleminin üçüncü eşitliğinde yerine yazılmasıyla, birinci ve üçüncü eşitliklerden $c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x}=-c_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}\Rightarrow\left(c_1+c_2\right)\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{0}$ olur. Dolayısıyla $c_1+c_2\neq 0$ ve (3.2.3) den $\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{0}=\mathbf{P}_2\mathbf{x}$ eşitlikleri bulunur. O zaman (3.2.5) denkleminden $\left(\widetilde{c_1}+\widetilde{c_2}\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ bulunur. $\widetilde{c_1}+\widetilde{c_2}\neq 0$ olduğundan dolayı $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ elde edilir. O halde $\mathcal{N}\left(c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2\right)=\{\mathbf{0}\}$ dır. Bu ise ön bilgilerdeki Lemma 1.5.1 $\left(\mathbf{A}\in\mathbb{C}_{n,n}\text{nonsingüler matristir}\Leftrightarrow\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)=\{\mathbf{0}\}\right)$'e göre $\left(c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2\right)$'nin nonsingüler olması anlamına gelir ve ispat tamamlanır[2]. ■

Teorem 3.3.1' e göre, $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P_2}$ toplamının nonsingülerliği ile ilgili [9] ve [13] teki tüm sonuçlar, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$ ve $c_1 + c_2 \neq 0$ olmak üzere herhangi bir $\mathbf{P}(c_1, c_2)$ lineer kombinasyonu için geçerli kalır. Özellikle, Koliha ve arkadaşları [13] tarafından verilen Teorem 2.1, aşağıda sunulan Terem 3.2.2 şeklinde genelleştirilebilir.

Teorem 3.2.2: Herhangi $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ matrisleri ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$ sayıları için aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ nonsingülerdir.

b) $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ nonsingülerdir.

İspat : $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ nonsingüler ve $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2)$ olsun. Bu durumda Teorem 3.3.1 in ispatından (3.3.4) eşitliğinin sağlanacağı açıktır. Ayrıca $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$ ise, bu durumda,

$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.7}$$

olacağı açıktır. (3.2.7), soldan $\mathbf{P}_1$ ile çarpılırsa;

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.8}$$

bulunur. Böylece (3.2.7) ve (3.2.8) den $\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{x}$ bulunur. Buradan (3.2.7) de $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}$ yerine $\mathbf{P}_1\mathbf{x}$ yazıldıktan sonra soldan $\mathbf{P}_2$ ile çarpılırsa,

$$\mathbf{P}_2\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x} \tag{3.2.9}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.8) ve (3.2.9) dan, $(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ nin nonsingülerliğini de göz önüne alarak,

$$\left(\mathbf{P}_1\mathbf{x}-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}\right)+\left(\mathbf{P}_2\mathbf{x}-\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_1\mathbf{x}-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}-\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}+\mathbf{P}_2\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)^{-1}\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)^{-1}\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}=\mathbf{0}$$

bulunur. Bunun anlamı, $\mathbf{x}\in\mathcal{N}\left(c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2\right)$ ve $\mathbf{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)$ keyfi olduğu için, $\mathcal{N}\left(c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2\right)=\{\mathbf{0}\}$ ve $\mathcal{N}\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)=\{\mathbf{0}\}$ dır. Dolayısıyla gerekliliğin ispatı tamamlanır.

Yeterliliğin ispatı için. $\mathbf{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)\Rightarrow\left(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.10}$$

olur. (3.2.10) soldan önce $\mathbf{P}_1$ sonra $\mathbf{P}_2$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}\,,\ \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{P}_2\mathbf{x} \tag{3.2.11}$$

bulunur. (3.2.10) ve (3.2.11) den,

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{P}_2\mathbf{x}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}$$

yazılabilir. Bu yüzden (b) koşulu altında,

$$\left(\mathbf{P}_1\mathbf{x}-\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}\right)+\left(\mathbf{P}_2\mathbf{x}-\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}$$

$$\left(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x}-c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}\right)+\left(c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x}-c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}$$

$$\left(c_1\mathbf{P}_1-c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+c_2\mathbf{P}_2-c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\left(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)^{-1}\left(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2\right)^{-1}\left(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

olur. Bu $\mathbf{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\right)$ keyfi olduğundan, $\mathcal{N}\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\right) = \{\mathbf{0}\}$ olduğunu söyler. Bu da ispatı bitirir[2]. ■

Teorem 3.2.1 in bir diğer sonucu [9] deki Sonuç 4' te verilen $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ toplamının nonsingülerliğinin karakterizasyonu aynı zamanda, $c_1 + c_2 \neq 0$ koşulu ile, herhangi bir $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonunun nonsingülerliğinin bir karakterizasyonuna denk olmasıdır. Bu ise $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ nin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşulun

$$\Re\left(\mathbf{P}_1\right) \cap \Re\left[\mathbf{P}_2\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\right)\right] = \{\mathbf{0}\} \text{ ve } \mathcal{N}\left(\mathbf{P}_1\right) \cap \mathcal{N}\left(\mathbf{P}_2\right) = \{\mathbf{0}\} \tag{3.2.12}$$

olduğunu gösterir. $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ nin rolleri, $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ ifadesinde simetrik olmasına rağmen (3.2.12) nin ilk parçasında durumun böyle olmaması ilginçtir. Ancak aşağıdaki teorem, bu tip simetrikliğin de elde edilebilir olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.2.3: Herhangi $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ matrisleri ve $c_1 + c_2 \neq 0$ olmak üzere $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$ skalerleri için aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ nonsingülerdir.
b) $\Re\left[\mathbf{P}_1\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\right] \cap \Re\left[\mathbf{P}_2\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\right)\right] = \{\mathbf{0}\}$ ve $\mathcal{N}\left(\mathbf{P}_1\right) \cap \mathcal{N}\left(\mathbf{P}_2\right) = \{\mathbf{0}\}$ dır.

İspat: $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ nonsingüler olsun. Eğer $\mathbf{x} \in \Re\left[\mathbf{P}_1\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\right] \cap \Re\left[\mathbf{P}_2\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\right)\right]$ ise, o zaman kesinlikle $\mathbf{x} \in \Re\left(\mathbf{P}_1\right) \cap \Re\left(\mathbf{P}_2\right)$ dır. Bu nedenle $\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{y}$, $\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{z}$ olacak şekilde $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}_n$ vardır. Ayrıca $\mathbf{x} \in \Re\left[\mathbf{P}_1\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\right]$ olduğu için

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} \;,\; \mathbf{s} \in \mathbb{C}_n \tag{3.2.13}$$

eşitliği yazılabilir.

$\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{y}$ ve $\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{z}$ eşitlikleri sırası ile $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ ile soldan çarpılırsa

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{y} = \mathbf{x} \tag{3.2.14}$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{z} = \mathbf{x} \tag{3.2.15}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.2.13), (3.2.14) ve (3.2.15) eşitliklerinden;

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\mathbf{x} = \mathbf{P}_2\mathbf{x} = \mathbf{P}_1\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} \tag{3.2.16}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.2.16) dan

$$\begin{aligned} c_1\left(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x} = c_1\left(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x}\right) = c_1\left(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x}\right) & \\ = c_1\left(c_1 + c_2\right)\mathbf{x} & \\ = \left(c_1 + c_2\right)c_1\mathbf{x} = \left(c_1 + c_2\right)c_1\mathbf{P}_1\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} & \\ = \left(c_1 + c_2\right)\left(c_1\mathbf{P}_1 - c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} & \\ = \left(c_1 + c_2\right)\left(c_1\mathbf{P}_1 - c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2 - c_2\mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} & \\ = \left(c_1 + c_2\right)\left(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} & \end{aligned}$$

olur. Yani

$$c_1\left(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x} = \left(c_1 + c_2\right)\left(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\mathbf{s}$$

bulunur. Bu denklemden, $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ nonsingüler olduğundan,

$$c_1\mathbf{x} = \left(c_1 + c_2\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} \tag{3.2.17}$$

bulunur. (3.2.16) denklemi dikkate alınarak (3.2.17) soldan $\mathbf{P}_1$ ile çarpılırsa,

$$c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} = \left(c_1 + c_2\right)\mathbf{P}_1\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_2\right)\mathbf{s} = \left(c_1 + c_2\right)\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x}$$

$$\Rightarrow c_1\mathbf{x} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{x}$$

elde edilir. Bu ise $c_2 \neq 0$ kabulünden dolayı $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ olması anlamına gelir. Ayrıca, eğer $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}_1) \cap \mathcal{N}(\mathbf{P}_2)$ alınırsa $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}_1) \Rightarrow \mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}_2) \Rightarrow \mathbf{P}_2\mathbf{x}=\mathbf{0}$ elde edilir. O zaman,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1\mathbf{x}+\mathbf{P}_2\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad &\Rightarrow c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ &\Rightarrow (c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2)\mathbf{x}=\mathbf{0} \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, $c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2$ nonsingüler olduğu için $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ dır. Dolayısıyla ispatın bu kısmı tamamlanır.

Tersine olarak $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2)$ olsun. Bu durumda (3.2.3) ve (3.2.4) sağlanır. (3.2.3) ve (3.2.4) ü göz önüne alarak,

$$(c_1+c_2)\mathbf{P}_1\mathbf{x}=c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}=-c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x}+c_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}=c_2\mathbf{P}_1(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\mathbf{x} \tag{3.2.18}$$

$$(c_1+c_2)\mathbf{P}_1\mathbf{x}=c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}=-c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x}+c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x}=-c_2\mathbf{P}_2(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1)\mathbf{x} \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.2.18) ve (3.2.19) dan,

$$(c_1+c_2)\mathbf{P}_1\mathbf{x}=c_2\mathbf{P}_1(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\mathbf{x}=-c_2\mathbf{P}_2(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1)\mathbf{x} \tag{3.2.20}$$

bulunur. (3.2.20) den, $\mathbf{P}_1\mathbf{x} \in \Re[\mathbf{P}_1(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)] \cap \Re[\mathbf{P}_2(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1)]$ olduğu görülür. Dolayısıyla (b) deki ilk koşuldan $\mathbf{P}_1\mathbf{x}=\mathbf{0}$ olur ve (3.2.3) göz önüne alındığında $\mathbf{P}_2\mathbf{x}=\mathbf{0}$ elde edilir. Bunlar ise, $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}_1) \cap \mathcal{N}(\mathbf{P}_2)$ olması anlamına gelir. (b) nin ikinci koşulu da göz önüne alındığında $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ olduğu anlaşılır. Bu ise ispatı tamamlar[2]. ■

Aşağıda verilecek Teorem 3.2.4 $\mathbf{P}(c_1, c_2)$ lineer kombinasyonunun nonsingülerliğinin, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ ifadelerinin aynı veya orantılı lineer kombinasyonunun nonsingülerliği ile ilişkili olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.2.4 : $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ nonsigülerdir.

b) $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{I} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ nonsigülerdir.

İspat : Her şeyden önce, $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ idempotent olduğundan,

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) &= c_1\mathbf{P}_1 - c_1\mathbf{P}_1 - c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2 - c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 - c_2\mathbf{P}_2 \\ &= -(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1) \qquad (3.2.21)\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Şimdi ispata geçilebilir.

$c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ nonsingüler ve $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2)$ olsun. Bu durumda (3.2.3) ve (3.2.4) denklemlerinin sağlanacağı açıktır. (3.2.4) den, $c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x} - c_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ve $c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x} - c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitlikleri bulunur. Bu iki ifade taraf tarafa toplanır ve (3.2.3) göz önüne alınırsa

$$c_1\mathbf{P}_1\mathbf{x} - c_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{x} - c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{x} = -(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

bulunur. $(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)$ nonsingüler olduğu için $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ elde edilir. $\mathbf{x}$ keyfi olduğundan $\mathcal{N}(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2) = \{\mathbf{0}\}$ elde edilir. Dolayısıyla $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ nonsingülerdir.

Şimdi de $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ olsun. Buradan, $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dır. Bu eşitlik soldan $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ ile çarpılırsa (3.2.21) elde edilir. Buradan, $c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ nonsingüler olduğu için $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bulunur. Böylece, $\mathbf{x}$ keyfi olduğundan

$\mathcal{N}\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)=\{\mathbf{0}\}$ olur. Dolayısıyla $\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$ nonsingülerdir. Böylece ispatın bu kısmı tamamlanmış olur.

Tersine olarak, $c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2$ ve $\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$ nonsingüler ve $\mathbf{x}\in\mathcal{N}\left(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\left(c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\right)\mathbf{x}=\mathbf{0} \tag{3.2.23}$$

dır. (3.2.21) ve (3.2.23) eşitliklerinden,

$$\left(c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)\mathbf{x}=\mathbf{0} \tag{3.2.24}$$

yazılabilir. $\left(c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2\right)$ ve $\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\right)$ matrisleri nonsingüler olduğundan $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ bulunur. Bu ise, $\mathbf{x}$ keyfi olduğundan, $c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+c_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ in nonsingüler olması demektir. Böylece ispat tamamlanır[2]. ■

3.3. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonunun İnvolutifliği

İnvolutif matrisler hem nonsingüler hem de tripotenttir. İki değişmeli idempotent matrisin lineer kombinasyonunun tripotent olması problemi J. K. Baksalary ve diğerleri [3] te ele alınmıştı. Lineer kombinasyonun tripotent olması durumunun involutifliğe kısıtlanması halinde o problem bu bölümde ele alınan esas problemin özel ancak önemli bir durumu olarak değerlendirilebilir.

Bu kısımda, bu problem ele alınacaktır. Ancak bu, [3] te verilen sonuç ispatlı olarak ortaya konulduktan sonra detaylı bir biçimde yapılacaktır.

Teorem 3.3.1: $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ boyutlu sıfırdan ve birbirinden farklı değişmeli idempotent matrisler olmak üzere $\mathbf{T}$ onların $\mathbf{T} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonu olsun. Bu durumda $\mathbf{T}$ tripotenttir ancak ve ancak aşağıdaki koşullardan biri sağlanır.

a) $(c_1, c_2) \in \{(1,-1), (-1,1)\}$,

b) $(c_1, c_2) \in \{(1,-2), (-1,2)\}$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$,

c) $(c_1, c_2) \in \{(2,-1), (-2,1)\}$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$,

d) $(c_1, c_2) \in \{(1,1), (-1,-1)\}$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ dır.

İspat: $\mathbf{T}$ nin tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu,

$$(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2)^3 = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$$

$$c_1^3\mathbf{P}_1^3 + c_2^3\mathbf{P}_2^{\,3} + 3c_1^2c_2\mathbf{P}_1^2\mathbf{P}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^2 - c_1\mathbf{P}_1 - c_2\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

$$c_1\left(c_1^2 - 1\right)\mathbf{P}_1 + c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_2 + 3c_1^2c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0} \qquad (3.3.1)$$

dır. (3.3.1) denklemi önce $\mathbf{P}_1$ sonra $\mathbf{P}_2$ ile çarpılırsa sırasıyla

$$c_1\left(c_1^2 - 1\right)\mathbf{P}_1 + c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 3c_1^2c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0} \qquad (3.3.2)$$

ve

$$c_1\left(c_1^2 - 1\right)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_2 + 3c_1^2c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 3c_1c_2^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0} \qquad (3.3.3)$$

denklemleri elde edilir. (3.3.1) denkleminden (3.3.2) i ve (3.3.3) ü çıkarırsak

$c_1\left(c_1^2 - 1\right)\mathbf{P}_1 - c_1\left(c_1^2 - 1\right)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ ve $c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_2 - c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$, buradan

$$c_1\left(c_1^2 - 1\right)\left(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right) = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad c_2\left(c_2^2 - 1\right)\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right) = \mathbf{0} \qquad (3.3.4)$$

denklemleri elde edilir. $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ olduğu için (3.3.1) denklemi aşağıdaki dört durumda ele alınmalıdır:

$$c_1 \in \{-1,1\}, \quad c_2 \in \{-1,1\}, \tag{3.3.5}$$

$$c_1 \in \{-1,1\}, \quad c_2 \notin \{-1,1\}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \tag{3.3.6}$$

$$c_1 \notin \{-1,1\}, \quad c_2 \in \{-1,1\}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \tag{3.3.7}$$

$$c_1 \notin \{-1,1\}, \quad c_2 \notin \{-1,1\}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \ \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2. \tag{3.3.8}$$

(3.3.5) durumunda (3.3.1) denkleminin iki hali vardır;

i) Eğer $c_1 = 1,\ c_2 = -1$ veya $c_1 = -1,\ c_2 = 1$ ise (3.3.1) denklemi $3\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 - 3\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ olur. Yani eşitlik ek şart olmaksızın sağlanır.

ii) Eğer $c_1 = 1,\ c_2 = 1$ veya $c_1 = -1,\ c_2 = -1$ ise (3.3.1) denklemi $3\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 3\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ halini alır. Bu da ancak $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ olmasıyla mümkündür.

Bu iki gözlem sırasıyla a) ve d) nin ispatıdır.

(3.3.6) durumunda (3.3.1) denkleminin yine iki hali vardır;

i) Eğer $c_1 = 1,\ c_2 \notin \{-1,1\}$ ve $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ise

$$c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_2 + 3c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 3c_2^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_2 + 3c_2\left(1 + c_2\right)\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left(c_2^3 - c_2 + 3c_2 + 3c_2^2\right)\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_2\left(c_2^2 + 3c_2 + 2\right)\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_2\left(c_2 + 1\right)\left(c_2 + 2\right)\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

dır. $c_2 \neq 0,\ c_2 \neq \pm 1$ ve $\mathbf{P}_2 \neq \mathbf{0}$ olduğu için $c_2 = -2$ olmalıdır. Dolayısı ile $c_1 = 1,\ c_2 = -2$ ve $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ elde edilir.

ii) Eğer $c_1 = -1,\ c_2 \notin \{-1,1\}$ ve $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ise

$$c_2\left(c_2^2 - 1\right)\mathbf{P}_2 + 3c_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 - 3c_2^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_2\left(c_2^2-1\right)\mathbf{P}_2+3c_2\left(1-c_2\right)\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow\left(c_2^3-c_2+3c_2-3c_2^2\right)\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_2\left(c_2^2-3c_2+2\right)\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_2\left(c_2-1\right)\left(c_2-2\right)\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$$

dır. $c_2\neq 0$, $c_2\neq 1$, $\mathbf{P}_2\neq\mathbf{0}$ olduğu için $c_2=2$ olmalıdır. Yani $c_1=-1$, $c_2=2$ ve $\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ bulunur. Bunlar da b) şıkkını verir.

(3.3.7) durumunda da (3.3.1) denkleminin iki hali söz konusudur;

i) Eğer $c_1\notin\{-1,1\}$, $c_2=1$ ve $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ise

$$c_1\left(c_1^2-1\right)\mathbf{P}_1+3c_1^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+3c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_1\left(c_1^2-1\right)\mathbf{P}_1+3c_1\left(c_1+1\right)\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_1\left(c_1^2+3c_1+2\right)\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_1\left(c_1+1\right)\left(c_1+2\right)\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$$

dır. $c_1\neq 0$, $c_1\neq -1$ ve $\mathbf{P}_1\neq\mathbf{0}$ olduğu için $c_1=-2$ olmalıdır. Yani $c_1=-2$, $c_2=1$ ve $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ bulunur.

ii) Eğer $c_2=-1$, $c_1\notin\{-1,1\}$ ve $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ise

$$c_1\left(c_1^2-1\right)\mathbf{P}_1-3c_1^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2+3c_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_1\left(c_1^2-1\right)\mathbf{P}_1-3c_1\left(c_1-1\right)\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_1\left(c_1^2-3c_1+2\right)\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c_1\left(c_1-1\right)\left(c_1-2\right)\mathbf{P}_1=\mathbf{0}$$

dır. $c_1\neq 0$, $c_1\neq 1$ ve $\mathbf{P}_1\neq\mathbf{0}$ olduğu için $c_1=2$ dir. Yani $c_1=2$, $c_2=-1$ ve $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ olur. Bu da c) yi verir.

(3.3.8) durumunda ise $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2$ olur ve bu da hipotez ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Bir involutif matris aynı zamanda bir tripotent matris, ancak bir tripotent matris her zaman bir involutif matris değildir. Dolayısıyla aşağıda verilecek olan Teorem 3.3.2 nin çözüm kümesinin Teorem 3.3.1 de verilen sonuçların bir alt kümesi olacağı açıktır. Ayrıca, yukarıda söz ettiğimiz gibi involutif matrisler nonsingüler matrisler olduğundan bu teorem önceki kısımdaki sonuçların özel bir sınıfını teşkil eder. Bunu vurgulamakta yarar vardır.

Teorem 3.3.2: $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_*$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ sıfır olmayan ve birbirinden farklı değişmeli matrisler olmak üzere $\mathbf{A}$, onların $\mathbf{A} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ şeklindeki lineer kombinasyonu olsun. Bu durumda $\mathbf{A}$ involutiftir ancak ve ancak aşağıdaki koşullardan biri sağlanır.

a) $(c_1, c_2) \in \mathrm{S}_1$ ve $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$,

b) $(c_1, c_2) \in \mathrm{S}_2$ ve $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}$,

c) $(c_1, c_2) \in \mathrm{S}_3$ ve $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$

dir. Burada;

$\mathrm{S}_1 = \{(1,-1), (-1,1), (1,1), (-1,-1)\}$, $\mathrm{S}_2 = \{(1,-2), (-1,2)\}$ ve $\mathrm{S}_3 = \{(2,-1), (-2,1)\}$

dir.

İspat: $\mathbf{A} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ matrisinin involutif olması için bir gerek ve yeter koşul

$$(c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{I} \tag{3.3.9}$$

olmasıdır. (3.3.9) denklemi ve Teorem 3.3.1 den olabilecek durumlar:

i) Eğer $(c_1, c_2) = (1,1)$ veya $(c_1, c_2) = (-1,-1)$ ise bu durumda (3.3.9) denklemi $\mathbf{P}_1$ ile çarpılırsa $\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ elde edilir. Buradan $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ bulunur. Aynı şekilde $(c_1, c_2) = (1,-1)$ veya $(c_1, c_2) = (-1,1)$ ise, yine $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ bulunur. Bunlar (3.3.9) da kullanıldığında $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ bulunur. Böylece ispatın a) şıkkı yapılmış olur.

ii) Eğer $(c_1, c_2) = (1, -2)$ veya $(-1, 2)$ ise bu durumda (3.3.9) ve Teorem 3.3.1 deki $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2$ koşulu göz önüne alındığında, $\mathbf{P}_1 - 4\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + 4\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ ifadesinden $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}$ elde edilir. $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}$ koşulu, direkt olarak (3.3.9) u sağlaması da b) nin ispatını tamamlar.

iii) Eğer $(c_1, c_2) = (2, -1)$ veya $(-2, 1)$ ise, bu durumda (3.3.9) ve Teorem 3.3.1 deki $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$ koşulu göz önüne alındığında $4\mathbf{P}_1 - 4\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ ifadesinden $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ elde edilir. $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$ olması da direkt olarak (3.3.9) u sağlayacağından c) nin ispatı da tamamlanır. ■

BÖLÜM 4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de, Bölüm 2 ve Bölüm 3 te kullanılan bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verildi. Bölüm 2 de, Bölüm 3 te incelediğimiz teoremlerin hazırlanışında fikir veren ve temel oluşturan bazı makaleler incelenmiştir.

Bölüm 3 te $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ nin nonsingulerliğinin, $c_1 + c_2 \neq 0$ olmak üzere herhangi bir $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonunun nonsingulerliğine denk olduğu görüldü. Bu, daha önce konu ile ilgili yapılan çalışmaların genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Bu bölümde $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ nin lineer kombinasyonuna ilişkin bazı başka nonsingülerlik problemleri de ele alınmıştır. Son olarak $c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonunun nonsingulerliği probleminden yola çıkarak, bir involutif matrisin aynı zamanda nonsingüler olması göz önüne alınıp, bu lineer kombinasyonun ne zaman involutif olacağı ile ilgili bir sonucu ortaya konulmuştur.

Özellikle non-negatif ve idempotent matrisli kuadratik formlar, regrasyon, korelasyon, deneysel tasarım ve varyans analizi teorilerinde önemli rol oynar. Ele alınan $\mathbf{P} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2$ lineer kombinasyonunun nonsingülerlik probleminin, bu lineer kombinasyonun daha önce çalışılmış olan idempotentlik problemi ile birleştirilmesi ve $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ reel simetrik matrisler olması ek koşulunun konulması halinde ilginç bir istatistik yorumu ortaya çıkarmaktadır. Şöyle ki; $\mathbf{0}$ sıfır matrisi ve $\mathbf{I}$ birim matrisi göstermek üzere, $\mathbf{x}$ $n \times 1$ boyutlu reel rasgele vektörü, $\mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ çoklu normal dağılımına sahip ise, bu durumda $\mathbf{x}'\mathbf{P}_1\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}'\mathbf{P}_2\mathbf{x}$ kuadratik formlarının her birinin bir χ^2 rasgele değişkeni olarak dağıldığını Teorem 5.1.1[14] veya Lemma 9.1.2[17] den biliyoruz. Bu iki kuadratik formun lineer kombinasyonunun nonsingülerliği, bu kombinasyonun idempotentliği ve involutifliği problemleri ile birlikte düşünüldüğünde problem, χ^2 dağılımlı kuadratik formlarının lineer kombinasyonlarının ne zaman bir χ_n^2 dağılımına sahip olacağı sorusuna karşılık gelir.

Birçok özel tipli matris, gerek istatistik teorisinde ve gerekse diğer uygulamalı bilimlerde yaygın kullanıma sahiptir. Matrislerin nonsingüler olması ise sistemle ilgili ortaya çıkan problemlerin çözümlerini oldukça basitleştirir. Bu nedenle, benzer problemler diğer bazı özel tipli matrisler için de ele alınabilir. Ayrıca özel tipli matrislerin karma lineer kombinasyonları ile ilgili benzer problemleri incelemenin de mümkün olduğunu vurgulamakta yarar vardır.

Ayrıca bu tür problemlerle ilgili bilgisayar programları geliştirilmesi ve uygulamalı bilimlerde kullanılması üzerinde de durulabileceğini belirtmek gerekir.

KAYNAKLAR

[1] BAKSALARY, J. K., BAKSALARY, O. M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 321 (2000) 3-7.

[2] BAKSALARY, J. K., BAKSALARY, O. M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 388 (2004) 25-29.

[3] BAKSALARY, J. K., BAKSALARY, O. M., ÖZDEMİR, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl. 388 (2004) 45-51.

[4] BAKSALARY, J. K., BAKSALARY, O. M., STYAN, G. P.H., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrices and a tripotent matrices, Linear Algebra Appl. 354 (2002) 21-34.

[5] BAKSALARY, O. M., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint, Linear Algebra Appl. 388 (2004) 67-78.

[6] BEN-ISRAEL, A., GREVILLE, T.N.E., Generalized Inverses Theory and Applications., John Wiley&Sons, Canada, (1974).

[7] BRONSON, R., Schaum's outlines of theory and problems of matrix operations, The united States of Amerika, (1989).

[8] GRAYBILL, F. A, Introduction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company, Inc, California, (1970).

[9] GROB, J. and TRENKLER, G., Nonsingularity of the difference of two oblique projectors, SIAM. J. Matrix Anal. Appl. 21 (1999) 390-395.

[10] GROSS, J., TRENKLER, G., On the product of oblique projectors, Linear and Multilinear Algebra 44 (1998) 247-259.

[11] HALMOS, P. R., Finite-Dimentional Vector Spaces, Van Nostrand, Princeton. NJ, (1958).

[12] HORN, R. A., JOHNSON C. R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York. (1985).

[13] KOLIHA, J. J., RAKOCEVIC, V., STRASKRABA, I., The difference and sum of projectors, Linear Algebra Appl. 388 (2004) 279-288.

[14] MATHAI, A. M., PROVOST, S. B., Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications, Dekker, New York, (1992).

[15] NEUDECKER, H., MAGNUS, J. R., Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, John Wiley&Sons, New York, (1994).

[16] OZDEMIR, H., OZBAN, A.Y., On idempotency of linear combinations of Idempotent matrices, Applied Mathematics and Computation (2003).

[17] RAO, C. R., MITRA, S. K., Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, Wiley, New York. (1971).

[18] SEBER, G. A. F., Linear regression analysis, John Wiley and Sons, inc., New York, (1977).

[19] TATLIDİL, H., Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz, Ziraat Matbaacılık A.Ş. Ankara (2002).

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet DENİZ 1980' de Kahramanmaraş'ta doğdu. İlk öğrenimini Mersin Viranşehir İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Liseyi Mersin Salim Yılmaz Lisesi'nde bitirdi. 2002 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü bitirdi. 2003 yılı Ağustos ayında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü matematik öğretmenliği tezsiz yüksek lisans programını tamamladı. Şu an özel bir eğitim öğretim kurumunda matematik öğretmenliği yapmaktadır.