

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELASTİK VE SÖNÜM MESNETLİ PLAKLARIN
TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Mak. Yük. Müh. Hüseyin DAL

Enstitü Anabilim Dalı : MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ

Enstitü Bilim Dalı : MAKİNE TASARIM VE İMALAT

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ömer K. MORGÜL

Ocak 2011

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELASTİK VE SÖNÜM MESNETLİ PLAKLARIN
TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Mak. Yük. Müh. Hüseyin DAL

Enstitü Anabilim Dalı : MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ

Enstitü Bilim Dalı : MAKİNE TASARIM VE İMALAT

Bu tez 11/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı

Üye

Üye

Üye (Danışman)

Üye

TEŞEKKÜR

Gerek bundan önceki her türlü çalışmalarında, gerekse bu zorlu tez çalışmam boyunca, zamanına bakmaksızın yardım ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Ömer K. MORGÜL'e, bu güne kadar benim için büyük emekler harcayan ve zorluklar çeken tüm aile fertlerime, büyük sabır gösteren eşime sonsuz şükranlarımı sunarım. Tüm tebrik ve teşekkürleri, rahmetli anneme armağan ediyorum.

Bu tez; Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından desteklenmiştir (Proje no: 2010-01-06-015 ve Proje No2:2007-50-02-023).

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
TABLolar LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY.....	xiv
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
1.1. Plaklar.....	1
1.2. Plak Titreşimleri Üzerine Yapılan Güncel Çalışmalar.....	7
1.3. Tezin Amacı ve Kapsamı.....	11
BÖLÜM 2. KLASİK PLAK TEORİSİ.....	14
2.1. Giriş.....	14
2.2. Şekil Değiştirme - Yer Değiştirme Bağlılıları.....	16
2.3. Gerilme - Deformasyon Bileşenleri Bağlılıları.....	18
2.4. Gerilmelerle Deplasman Bileşenleri Arasındaki Bağlılılar.....	19
2.5. Gerilmelerin Bileşkesi Olarak Momentlerin Bulunması.....	20
2.6. Diferansiyel Elemanın Dengesi ve Plak Diferansiyel Denklemi.....	23
2.7. Kirchhoff Plağının Kenar Kuvvetlerinin Elde Edilmesi.....	25
2.8. İnce Plakların Titreşim Teorisi.....	27
BÖLÜM 3. ELASTİK VE SÖNÜM MESNETLİ PLAK TİTREŞİMLERİ.....	30
3.1. Giriş.....	30
3.2. Karşılıklı İki Kenarı Elastik Mesnetli Plak Modelinin	

Oluşturulması.....	30
3.3. Elastik Mesnetli Plak Modelinin Diferansiyel Denklemi.....	32
3.4. Karşılıklı İki Kenarı Elastik ve Sönüm Mesnetli Plak Modeli.....	34
3.5. Sınır Şartlarına Bağlı Çözüm Fonksiyonunun Elde Edilmesi.....	36
3.6. Elastik ve Sönüm Mesnetli Plagın Galerkin Yöntemiyle Çözümü...	40
3.7. Sönüm Mesnetli Plagın Serbest Titreşimleri İçin Genel Çözüm.....	45
3.8. Normalize İşlemi.....	49
BÖLÜM 4. SAYISAL ÇÖZÜMLER.....	50
4.1. Giriş.....	50
4.2. Elastik Mesnetli Sönümsüz Plak Modelinin Titreşimleri.....	51
4.2.1. Ankastre-Basit-Ankastre-Basit (ABAB) plak.....	51
4.2.2. Basit-Basit-Serbest-Basit (BBSB) plak.....	53
4.2.3. Ankastre-Basit-Serbest-Basit (ABSB) plak.....	54
4.2.4. Ankastre-Basit-Basit-Basit (ABBB) plak.....	55
4.2.5. Serbest-Basit-Serbest-Basit (SBSB) plak.....	56
4.2.6. Basit-Basit-Basit-Basit (BBBB) plak.....	57
4.2.7. Ankastre-Basit-Elastik-Basit (ABEB) plak.....	59
4.2.8. Elastik-Basit-Elastik-Basit (EBEB) plak.....	62
4.2.9. Basit-Basit-Elastik-Basit (BBEB) plak.....	64
4.2.10. Serbest-Basit-Elastik-Basit (SBEB) plak.....	65
4.2.11. Ankastre-Basit-Burulma Yay-Basit (ABMB) plak.....	66
4.2.12. Burulma Yay-Basit- Burulma Yay -Basit (MBMB) plak...	68
4.2.13. Basit-Basit- Burulma Yay -Basit (BBMB) plak.....	70
4.2.14. Serbest-Basit- Burulma Yay-Basit (SBMB) plak.....	71
4.2.15. Ankastre-Basit-Doğrusal Yay-Basit (ABYB) plak.....	71
4.2.16. Doğrusal Yay-Basit-Doğrusal Yay-Basit (YBYB) plak.....	74
4.2.17. Basit-Basit-Doğrusal Yay-Basit (BBYB) plak.....	76
4.2.18. Serbest-Basit-Doğrusal Yay-Basit (SBYB) plak.....	77
4.2.19. Burulma Yay-Basit-Doğrusal Yay-Basit (MBYB) plak.....	78
4.3. Elastik ve Sönüm Mesnetli Plak Modelinin Serbest Titreşimleri....	81
4.3.1. Basit-Basit-Sönüm (Damping)-Basit (BBDB) plak.....	81
4.3.2. Ankastre-Basit-Sönüm-Basit (ABDB) plak.....	82

4.3.3. Ankastre-Basit-Elastik ve Sönüm-Basit (AB(ED)B) plak.....	84
4.3.4. Elastik ve Sönüm-Basit-Elastik ve Sönüm-Basit ((ED)B(ED)B) plak.....	85
4.3.5. Sönüm-Basit-Sönüm-Basit (DBDB) plak.....	87
4.3.6. Ankastre-Basit-Burulma Yayı ve Sönüm-Basit (AB(MD)B) plak.....	88
4.3.7. Burulma Yayı ve Sönüm - Basit - Burulma Yayı ve Sönüm - Basit ((MD)B(MD)B) plak.....	89
4.3.8. Ankastre-Basit-Doğrusal Yay ve Sönüm-Basit (AB(YD)B) plak.....	89
4.3.9. Doğrusal Yay ve Sönüm - Basit - Doğrusal Yay ve Sönüm - Basit ((YD)B(YD)B) plak.....	90
BÖLÜM 5. SONUÇLAR.....	91
KAYNAKLAR.....	96
EKLER.....	103
ÖZGEÇMİŞ.....	106

SİMGELER VE KISALTMALAR

k_i	Plak kenarlarındaki doğrusal yay katsayıları
K_i	Plak kenarlarındaki burulma yay katsayıları
\bar{k}_i	(x_i, y_i) Noktalarındaki doğrusal yay katsayıları
\bar{K}_i	(\bar{x}_i, \bar{y}_i) Noktalarındaki burulma yay katsayıları
c_i	Plak kenarlarındaki sönüm elemanı katsayıları
c_{kritik}	Kritik sönüm
\bar{m}_i	(x'_i, y'_i) Noktalarındaki kütleler
$p(x, y)$	Dış kuvvet
$W(x, y)$	Plağın çökme fonksiyonu
$w(x, y, t)$	Sönümsüz plağın zamana bağlı deformasyon fonksiyonu
$w_{hd}(x, y, t)$	Sönümlü plağın zamana bağlı deformasyon fonksiyonu
w_{hd0}	Başlangıç yer değiştirmesi
\dot{w}_{hd0}	Başlangıç hızı
A_{mn}	Fourier katsayıları
M_x, M_y, M_{xy}	Momentler
N_k, N_K, N_m	Plak üzerindeki doğrusal ve burulma yayları ve kütlelerin sayısı
Q_x, Q_y	Kesme kuvvetleri
V_x, V_y	Kenar kesme kuvvetler
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilmeler
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmeleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Normal zorlanmalar
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Kayma zorlanmaları
u, v, w	x, y, z koordinat bileşenleri
A	Ankastre destekli kenar
B	Basit destekli kenar

S	Serbest
D	Sönüm destekli kenar
E	Elastik destekli kenar
ED	Elastik ve sönüm destekli kenar
M	Burulma yayı destekli kenar
MD	Burulma yayı ve sönüm destekli kenar
Y	Doğrusal yay destekli kenar
YD	Doğrusal yay ve sönüm destekli kenar
$\nabla^2(\bullet)$	Laplas operatörü
$\nabla^4(\bullet)$	Hamilton operatörü
\mathcal{L}	Diferansiyel operatör
B	Üstel fonksiyon katsayısı
D	Plak rijitliği
E	Elastisite modülü
G	Kayma modülü
I	Atalet momenti
m,n	1,2,3,..., ∞
M, N	Polinomsal Fourier serisi terim sayısı
a,b	Plak boyutları
h	Plak kalınlığı
λ	Sönümlü plak kökleri
$\lambda_{am}, \lambda_{bn}$	$m\pi/a, n\pi/b$
ν	Poisson oranı
ρ	Plak yoğunluğu
f, ω	Doğal frekans (Hz) ve Dairesel doğal frekans (rad/sn)
Ω	Frekans parametresi
t	Zaman
t_s	Sönümlenme zamanı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	Kanal kapağı ve betonarme döşeme.....	2
Şekil 1.2	Köprü ve plak elemanı.....	2
Şekil 1.3	Tanker ve hızlı tren.....	2
Şekil 1.4	Otomobil ve uydu.....	2
Şekil 1.5	Yolcu uçağı ve mekik.....	3
Şekil 1.6	Plak çeşitleri a)Plak b)Membran c)Bükülgen plak d)Kalın plak....	5
Şekil 1.7	Düzlemsel taşıyıcılar a) Plak b) Levha c) Ön gerilmeli plak.....	6
Şekil 2.1	Plak parametreleri, orta düzlemi ve deformasyonu.....	15
Şekil 2.2	Euler-Bernoulli kiriş hipotezinin gösterimi.....	16
Şekil 2.3	Deformasyondan önce ve sonra plak elemanı.....	17
Şekil 2.4	Kayma zorlanmasının gösterimi.....	18
Şekil 2.5	Diferansiyel plak elemanına etkiyen gerilme bileşenleri.....	21
Şekil 2.6	Plak elemanının dengesi.....	23
Şekil 2.7	Burulma momentlerinin kesme kuvveti şeklindeki ifadesi.....	26
Şekil 3.1	Elastik destekli ve yüklü ince dikdörtgen plak modeli.....	32
Şekil 3.2	Elastik destekli ince dikdörtgen plak modeli.....	32
Şekil 3.3	İki kenarı elastik sönüm mesnetli plak modeli.....	34
Şekil 3.4	İki kenarı elastik ve sönüm mesnetli plak modelinin kesiti.....	34
Şekil 4.1	ABAB plak ve sınır parametreleri.....	51
Şekil 4.2	ABAB plak için mod biçimleri.....	52
Şekil 4.3	BBSB plak ve sınır parametreleri.....	53
Şekil 4.4	BBSB plak için mod biçimleri.....	54
Şekil 4.5	ABSB plak ve sınır parametreleri.....	54
Şekil 4.6	ABBB plak ve sınır parametreleri.....	55
Şekil 4.7	ABBB plak için mod biçimleri.....	56
Şekil 4.8	SBSB plak ve sınır parametreleri.....	56

Şekil 4.9	SBSB plak için mod biçimleri.....	57
Şekil 4.10	BBBB plak ve sınır parametreleri.....	58
Şekil 4.11	BBBB plak için simetrik mod biçimleri.....	58
Şekil 4.12	ABEB plak ve sınır parametreleri.....	59
Şekil 4.13	ABEB plak için mod biçimleri.....	60
Şekil 4.14	ABEB plağın $x=a$ kenarının doğrusal yay katsayılarına göre değişimi.....	61
Şekil 4.15	ABEB plağın $x=a$ kenarının burulma yay katsayılarına göre değişimi.....	61
Şekil 4.16	EBEB plak ve sınır parametreleri.....	62
Şekil 4.17	EBEB plak için mod biçimleri.....	63
Şekil 4.18	EBEB plağın $x=0$ kenarının 3. modunun burulma yay katsayılarına göre değişimi.....	64
Şekil 4.19	EBEB plağın $x=0$ kenarının 3. modunun doğrusal yay katsayılarına göre değişimi.....	64
Şekil 4.20	BBEB plak ve sınır parametreleri.....	65
Şekil 4.21	SBEB plak ve sınır parametreleri.....	66
Şekil 4.22	SBEB plak için mod biçimleri.....	66
Şekil 4.23	ABMB plak ve sınır parametreleri.....	67
Şekil 4.24	ABMB plağın $x=a$ kenarının 2. modunun burulma yay katsayılarına göre değişimi.....	67
Şekil 4.25	ABMB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 1-2 mod şeklinin burulma yaylarına göre değişimi.....	68
Şekil 4.26	MBMB plak ve sınır parametreleri.....	68
Şekil 4.27	MBMB plağın $x=0$ kenarının burulma yay katsayılarına göre 2. mod değişimi.....	69
Şekil 4.28	MBMB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 1-2 mod şeklinin burulma yaylarına göre değişimi.....	69
Şekil 4.29	BBMB plak ve sınır parametreleri.....	70
Şekil 4.30	SBMB plak ve sınır parametreleri.....	71
Şekil 4.31	ABYB plak ve sınır parametreleri.....	72
Şekil 4.32	ABYB plak için mod biçimleri.....	73
Şekil 4.33	ABYB plağın $x=a$ kenarının yay katsayılarına göre değişimi.....	73

Şekil 4.34	ABYB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 1. modunun yay katsayılarına göre değişimi.....	74
Şekil 4.35	YBYB plak ve sınır parametreleri.....	74
Şekil 4.36	YBYB plak için mod biçimleri.....	75
Şekil 4.37	YBYB plağın $x=a/2$ orta çizgisinin 3. modunun yay katsayılarına göre değişimi.....	76
Şekil 4.38	YBYB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 3. modunun doğrusal yay katsayılarına göre değişimi.....	76
Şekil 4.39	BBYB plak ve sınır parametreleri.....	77
Şekil 4.40	SBYB plak ve sınır parametreleri.....	77
Şekil 4.41	SBYB plak için mod biçimleri.....	78
Şekil 4.42	MBYB plak ve sınır parametreleri.....	79
Şekil 4.43	MBYB plak için mod biçimleri.....	80
Şekil 4.44	MBYB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 1.modunun yay katsayılarına göre değişimi.....	80
Şekil 4.45	BBDB plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi.....	82
Şekil 4.46	ABDB plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi.....	83
Şekil 4.47	ABDB plağın $x=a$ kenar orta noktasının titreşimi.....	83
Şekil 4.48	ABDB plağın titreşiminin $c_1=10 \text{ Ns/m}^2$ için zamanla azalması.....	84
Şekil 4.49	AB(ED)B plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi..	85
Şekil 4.50	(ED)B(ED)B plağın orta noktasının titreşimi.....	86
Şekil 4.51	(ED)B(ED)B plağın titreşiminin $c_{0,1}=10 \text{ Ns/m}^2$ için azalması.....	87
Şekil 4.52	DBDB plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi.....	88
Şekil 4.53	AB(MD)B plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi.	88
Şekil 4.54	(MD)B(MD)B plağın orta noktasının titreşimi.....	89
Şekil 4.55	AB(YD)B plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi..	90
Şekil 4.56	(YD)B(YD)B plağın orta noktasının titreşimi.....	90

TABLolar LİSTESİ

Tablo 4.1	Hesaplamalarda kullanılan plak değerleri.....	50
Tablo 4.2	ABAB plak için ilk 9 frekans parametreleri.....	52
Tablo 4.3	ABAB plak için yüksek frekans parametreleri.....	52
Tablo 4.4	BBSB plak için frekans parametreleri.....	53
Tablo 4.5	ABSB plak için frekans parametreleri.....	55
Tablo 4.6	ABBB plak için frekans parametreleri.....	55
Tablo 4.7	SBSB plak için frekans parametreleri.....	57
Tablo 4.8	BBBB plak için frekans parametreleri.....	58
Tablo 4.9	ABEB plak için frekans parametreleri.....	59
Tablo 4.10	EBEB plak için mod frekansları ve frekans parametreleri.....	62
Tablo 4.11	BBEB plak için doğal frekans ve frekans parametreleri.....	65
Tablo 4.12	SBEB plak için doğal frekans ve frekans parametreleri.....	66
Tablo 4.13	ABMB plak için frekans ve frekans parametreleri.....	67
Tablo 4.14	MBMB plak için doğal frekans ve frekans parametreleri.....	69
Tablo 4.15	BBMB plak için burulma yay katsayılarına göre frekans parametreleri.....	70
Tablo 4.16	SBMB plak için burulma yay katsayılarına göre frekans parametreleri.....	71
Tablo 4.17	ABYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri.....	72
Tablo 4.18	YBYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri.....	75
Tablo 4.19	BBYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri.....	77
Tablo 4.20	SBYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri.....	78

Tablo 4.21	MBYB plak için yay katsayılarına göre frekans parametreleri.....	79
Tablo 4.22	BBDB plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri.....	81
Tablo 4.23	ABDB plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri.....	83
Tablo 4.24	AB(ED)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri....	85
Tablo 4.25	(ED)B(ED)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri.	86
Tablo 4.26	DBDB plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri.....	87
Tablo 4.27	AB(MD)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri....	88
Tablo 4.28	(MD)B(MD)B plağın yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri..	89
Tablo 4.29	AB(YD)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri....	89
Tablo 4.30	(YD)B(YD)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri	90

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Plak titreşimi, Elastik destekli plak, sınır sönümü, frekans parametresi

Bu tez çalışmasında, karşılıklı iki kenarından basit mesnetli, diğer iki kenarı boyunca doğrusal yaylar, burulma yayları ve sönüm elemanlarıyla desteklenmiş, ince bir plak modelinin serbest titreşimleri incelenmiştir. Bu plak modelinin hareketine ait diferansiyel denkleminin çözümü için, polinomsal Fourier sinüs serisi kullanılmıştır. Polinomsal Fourier serisi çözüm fonksiyonu, kökleri plak boyutlarıyla orantılı, en düşük dereceden basit bir polinomla, Fourier sinüs serilerinin süper pozisyonundan oluşmaktadır. Çözüm fonksiyonunda polinom kullanılmasının nedeni, plakta oluşabilecek süreksizlik problemlerini önlemek içindir. Çözüm fonksiyonu, sınır şartlarına bağlı olarak elde edilmiştir. Daha sonra, bu çözüm fonksiyonu kullanılarak, elastik destekli ve sınır sönümlü ince plağın diferansiyel denklemi, Galerkin prensibiyle çözülmüş, doğal frekanslar ve frekans parametreleri elde edilmiştir. Çeşitli sönüm değerlerine göre, sönümlü plak modeli için kök değerleri elde edilmiştir. Başlangıç şartları verilerek gerekli katsayılar elde edilmiş ve plağın sönümlü serbest titreşim çözümü bulunmuştur.

Mevcut model ve metot literatürdeki sönümsüz durum için yapılmış çalışmalarla birlikte değerlendirilerek, yapılan çalışmanın doğruluğu gösterilmiştir. Sınır şartlarını da içinde barındıran polinomsal Fourier sinüs serisi çözüm fonksiyonunun, elastik ve sönüm destekli ince plakların çözümünde, güvenilir bir şekilde kullanılabileceği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlardan ve grafiklerden, plak kenarlarına yerleştirilen sönüm elemanlarının, plak titreşimlerinin azaltılmasında kullanılabileceği görülmüştür.

Plaklarla ilgili sayısız çalışmalar yapılmıştır. Plak titreşim literatüründe, sınır sönümlü plakların serbest titreşimleriyle ilgili çalışmaların yetersiz olduğu görülmüştür. Bu çalışmada elastik ve sönüm mesnetli ince plakların serbest titreşimleri incelenerek literatürdeki eksikliğe katkı yapmak amaçlanmıştır. Tüm hesaplarda, klasik plak teorisi olarak ta isimlendirilen Kirchhoff plak teorisi kullanılmıştır.

INVESTIGATION OF VIBRATIONS OF PLATES WITH ELASTIC AND DAMPING SUPPORT

SUMMARY

Keywords: Vibration of plate, Elastic supported plate, boundary damping, frequency parameters

In this study, free vibrations of a thin plate supported by linear, torsion springs and damping elements along two edges and simple supports on the other edges are examined. Fourier sine series is applied in order to solve the differential equation. Fourier solution function is formed by superposition of Fourier sine series and minimum degree polynomial. In solution function, polynomial is used in order to prevent discontinuity problems. Solution functions are dependent on boundary conditions. Differential equation of plate with elastic and damping is solved by Galerkin principle and frequency and frequency parameters are obtained using the solution function. For damping plate the root values are found with regard to various damping values. The required coefficients are gained by setting initial values and the solution of damping free vibration of the plate is obtained.

The existing method is evaluated concerning undamped conditions indicated in literature and the accuracy of the study is determined and presented. It is also introduced that solution functions of Fourier sine series are applied credibly to solutions of thin plates supported by elastic and damping. It is seen from the results that damping elements positioned on the edges of the plate can be also used to reduce plate vibrations.

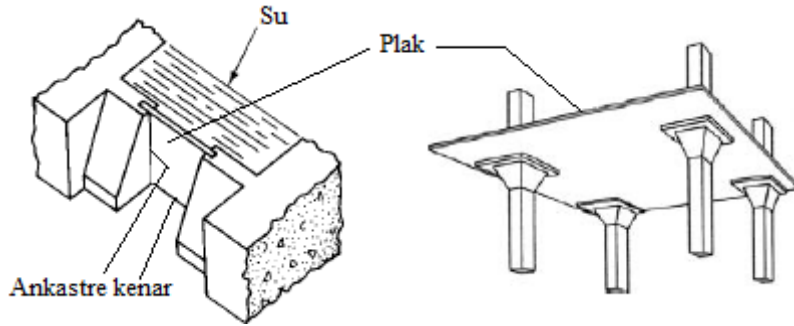
There are numerous studies on plates. It is observed that there are not adequate studies on the free vibration of plates with boundary damping. In this research, free vibration of plates with elastic and damping support is investigated. The classical Kirchhoff's Plate Theory is applied.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

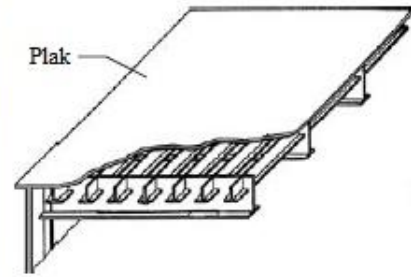
1.1. Plaklar

Plaklar, kalınlık olarak ifade edilen bir boyutunun, diğer iki boyutundan oldukça küçük olan düzlemsel elemanlar olarak ifade edilmektedir. Başka bir ifadeyle, h kalınlıklı düz bir yüzeyle ifade edilen yapısal elemanlardır. Plağın alt ve üst sınırlarını oluşturan alt ve üst yüzeylere $\pm h/2$ mesafedeki düz yüzey, plağın orta yüzeyi olarak isimlendirilmektedir. Plak kalınlığı sabit olabildiği gibi, değişken kalınlıklı da olabilmektedir. Orta düzlemlerinin geometrilerine göre dikdörtgen, dairesel, elips, üçgensel vb. plaklar şeklinde isimlendirilirler.

Mühendislik uygulamalarında sıklıkla kullanılan plak ve plak tipi yapılar, son yıllarda özel önem kazandı. Mühendislik yapılarındaki yapısal bileşenlerin önemli bir kısmını plaklar oluşturmaktadır. Zemin ve temel yapılar, ince duvar paneller, baraj ve kanal kapakları, köprü yapılar, otomotiv kaportası ve bazı parçaları, demiryolu araçlarında kullanılan levha tipi parçalar, hard disklerde kullanılan çok ince dairesel diskler vb. plak elemanlara örnek olarak verilebilir. Plaklar aynı zamanda gemi, uzay ve havacılık endüstrisinde de vazgeçilmezdirler. Örneğin bir uçak kanadı ve gövdesi komple bir plak yapı oluşturduğu gibi, aynı zamanda birçok plak bileşeni de içermektedir. Uydular da, bünyesinde çok özel plak elemanlar barındıran bir süper yapı olarak isimlendirilmektedirler. Aynı şekilde makine endüstrisinde genellikle tüm makineler, mikro boyutlardan çok büyük boyutlara kadar, plak eleman içerebilmektedirler. Plakların birçok uygulama alanlarından bazıları, aşağıdaki şekillerde (Şekil 1.1, Şekil 1.2, Şekil 1.3, Şekil 1.4, Şekil 1.5) görülmektedir.



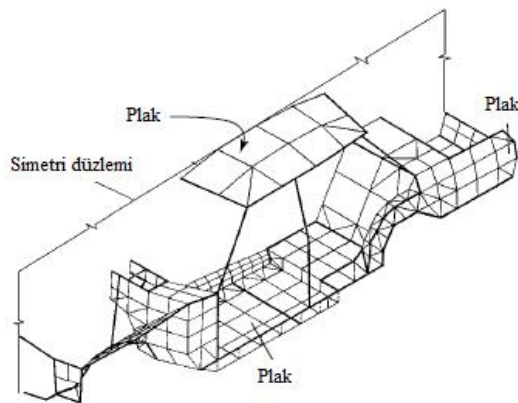
Şekil 1.1 Kanal kapağı ve betonarme döşeme



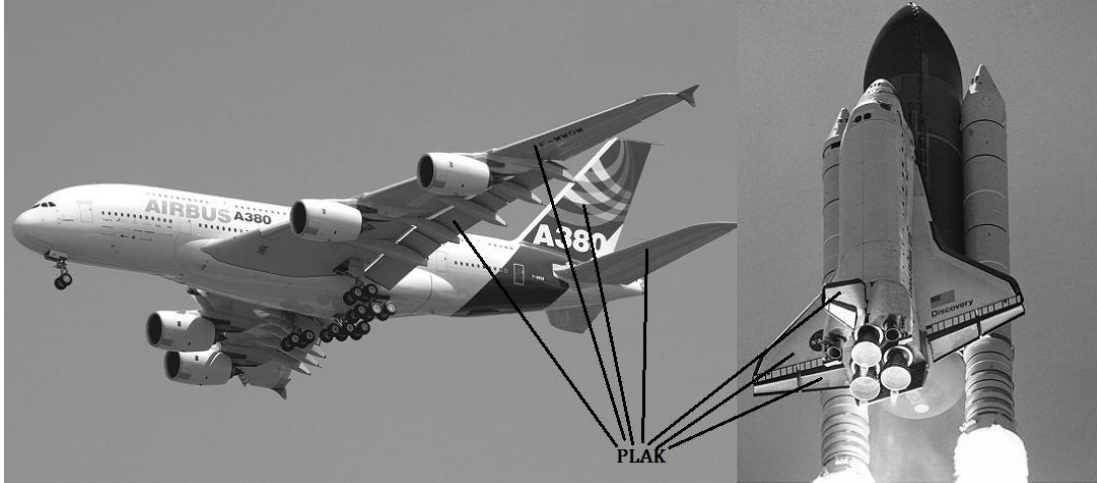
Şekil 1.2 Köprü ve plak elemanı



Şekil 1.3 Tanker ve hızlı tren



Şekil 1.4 Otomobil ve uydu



Şekil 1.5 Yolcu uçağı ve mekik [1]

Plak geniş bir kısmı, elastisite teorisi denklemleri vasıtasıyla analiz edilmektedir. Bazı plakların diferansiyel denklemlerinin kesin çözümleri, sadece belirli sınır ve yükleme şartları için elde edilebilmektedir. Birçok plak problemleri için çeşitli enerji metotları, analitik çözümlere yakın sonuçlar verebilmektedir. Bilgisayar teknolojisinin ve kullanımının gelişmesiyle, sayısal çözüm teknikleri artarak, kayda değer bir önem kazandı. Sayısal çözüm tekniklerinden sonlu elemanlar metodu, diğer metotlara göre daha çok kullanılmaktadır. Plak çözümleri için sonlu farklar, sınır eleman, ızgara, sonlu şeritler vb. gibi metotlar da mevcuttur. Analitik metotlara örnek olarak ise, Navier, Levy, süper pozisyon vb. gibi metotlar verilebilir.

Plak teorisindeki amaç, yüksüz veya belirli bir yüke maruz plaktaki, gerilme, deformasyon, titreşim gibi statik ve dinamik parametrelerin hesaplanmasıdır. Dolayısıyla bir plağın titreşim karakteristiklerini elde etmek mümkündür. Üç boyutlu sürekli bir plağın ele alınabilmesi için, çok güçlü ve karmaşık bir elastik analiz gerekmektedir. Matematiksel zorluklar içerdiği için, böyle karmaşık bir yaklaşım yeterince pratik olmaz. Bu tür zorlukların üstesinden gelebilmek için, problem genellikle iki boyutlu bir probleme dönüştürülmektedir.

Bir plağın eğilme özellikleri büyük ölçüde, kalınlığı ile diğer boyutları arasındaki kıyaslamalara bağlıdır. Plaklar bu boyutsal özelliklerine ve deformasyon şekillerine göre değişik kaynaklarca farklı sınıflandırmalara tabii tutulmuşlardır. Örneğin Timoshenko ve Woinowsky [2] plakları, “kalın plaklar, küçük ve büyük sehimli ince

plaklar” olarak üçe ayırmışlardır. Szilard [3] plak kalınlığının, plak boyutlarına oranlarının değişimine göre, “Membranlar, ince plaklar, orta dereceli kalın plaklar ve kalın plaklar” olarak plakları dört farklı şekilde sınıflandırmıştır. Ventsel ve Krauthamme [4], “kalın plaklar, membranlar ve ince plaklar” şeklinde üçe ve ince plakları da kendi arasında “rijit plaklar ve bükülgen plaklar” olarak ikiye ayırmışlardır. Plak kalınlığının, plağın tipik boyutlarından birinin oranının derecesine (a/h) göre, plaklar aşağıdaki gibi kategorize edilebilir (Şekil 1.6).

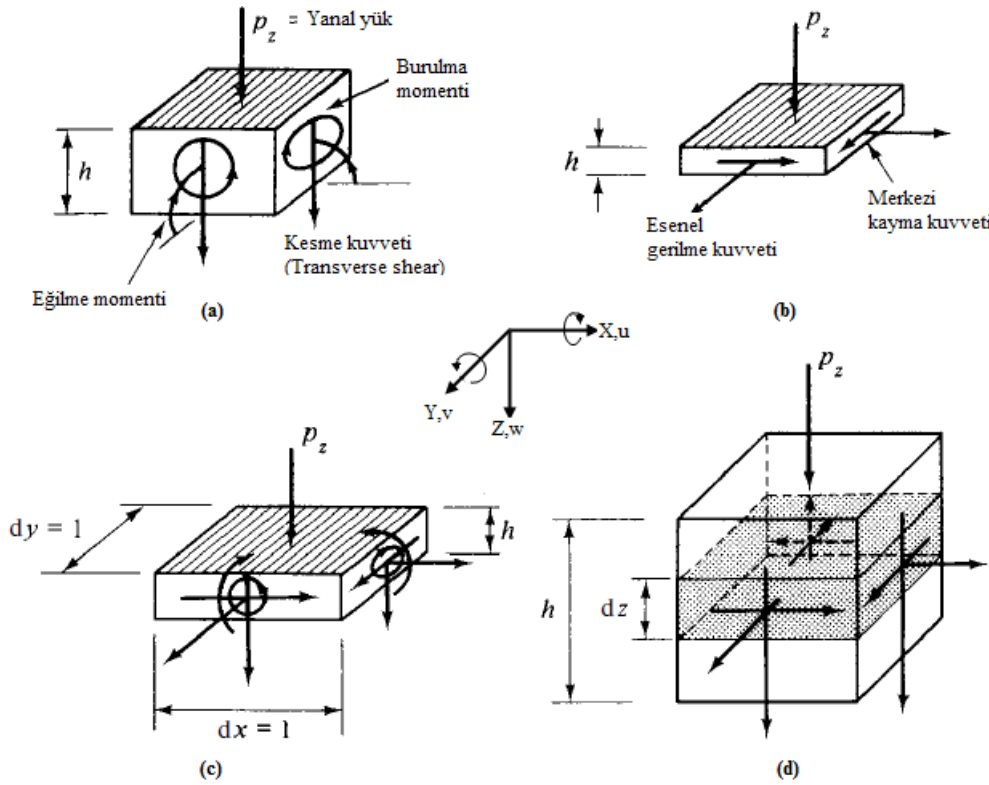
Kalın plaklar: Kalınlık ile genişlik oranının değişimi, yaklaşık olarak $a/h \leq 8 \dots 10$ olan plaklardır. Bu tür plaklar, katı cisimlerde olduğu gibi, gerilme, gerinim ve yer değiştirme bileşenlerine bağlı analizleri içerir (Şekil 1.6-d).

Membranlar: Plak genişliğinin kalınlığına oranı $a/h \geq 80 \dots 100$ aralığında olan, çok ince plak elemanlardır. Plak orta yüzeyi üzerinde hareket eden, aksel gerilme kuvvetleri ve kayma kuvvetleri etkisinde olan yükler taşırlar. Bu aksel gerilme ve kayma kuvvetlerine membran kuvvetleri de denilmektedir. Eğilme rijitlikleri mevcut değildir (Şekil 1.6-b).

İnce plaklar: Genişlik kalınlık oranları değişimleri $8 \dots 10 \leq a/h \leq 80 \dots 100$ olan, membranlar la kalın plaklar arasında kalan ve en geniş grubu temsil eden plaklardır. Plağın maksimum çökmesini ifade eden w ile h kalınlığının oranına (w/h) bağlı olarak, eğilme ve membran kuvvetleri farklılıklar gösterir. Bu yüzden (w/h) oranına bağlı olarak ince plaklarda kendi arasında, rijit plaklar ve bükülgen plaklar olarak ikiye ayrılır.

Rijit plaklar: Eğer $w/h \leq 0.2$ ise rijit plak olarak isimlendirilir. Küçük sehimli plaklar olarak ta isimlendirilirler. Eğilme rijitlikleri mevcuttur. Çoğunlukla eğilme ve burulma momentleri ve kesme kuvvetleri etkisi altındadırlar. Orta düzlem deformasyonları ve membran kuvvetleri ihmal edilirler. Pratik olarak mühendislikte, aksi belirtilmedikçe plak teriminden rijit plaklar tabiri anlaşılmaktadır. Rijit plaklar bazı önemli basitleştirmeler içermektedir. Bu tez çalışmasında da bu tür ince plaklar göz önüne alınmıştır (Şekil 1.6-a).

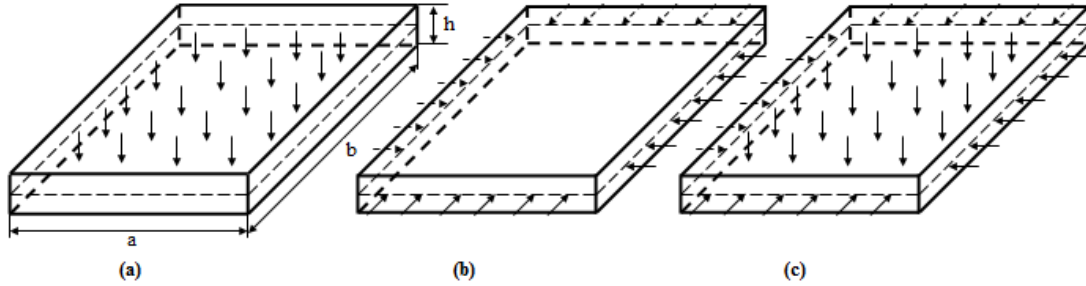
Bükülgen plaklar: Eğer sehimler $w/h \geq 0.3$ gibi belli bir düzeyden büyükse, bükülgen plaklardan söz etmek daha doğru olur. Bu plaklar, büyük sehimli plaklar olarak ta isimlendirilirler. Bu tür plaklarda orta düzlemin, yatay olarak ta yer değiştirmesi mümkün olmaktadır. Böyle plaklar, hem rijit plakların hem de membranların birleşimini ve karakteristiklerini sunarlar. Yani eğilme ve burulma momentleri, kesme kuvvetleri ve membran kuvvetleri (eksenel gerilme ve kayma kuvvetleri) etkisi altındadırlar (Şekil 1.6-c). Plak sehimleri, kalınlığına göre daha yüksek olduğu zaman, membran hareketi hâkim olur. Bu yüzden, $w/h > 5$ olduğu zaman bükülme gerilmeleri, membran gerilmelerine göre ihmal edilebilecek kadar küçük kalır.



Şekil 1.6 Plak çeşitleri a) Plak b) Membran c) Bükülgen plak d) Kalın plak [3]

Plak yapılar aynı zamanda, düzlemsel taşıyıcılar grubuna girmektedir. Düzlemsel taşıyıcılar, dış yüklerin etki biçimine göre plak, levha, derin kiriş, ön gerilmeli plak gibi çeşitli gruplara ayrılabilir (Şekil 1.7). Buna göre dış yükler, orta düzleme sadece dik etkiliyor ise “plak”, sadece orta düzlem içinde etkiliyor ise “levha (disk)” ve her iki şekilde de etkiliyor ise “ön gerilmeli” plak çalışması söz konusudur. Arıca, orta

yüzey düzlem değil de eğri bir yüzey ise, o zamanda kabuk çalışmasından söz edilmektedir.



Şekil 1.7 Düzlemsel taşıyıcılar a) Plak b) Levha c) Ön gerilmeli plak

İnce plakların matematiksel modelleri ise beş farklı gruba ayrılmaktadır. Bu modellerin ilk üçü elastik modeller olup, Kirchhoff modeli, Mindlin-Timoshenko modeli ve von Karman modelidir. Geniş aralıklı viskoelastik plak modeli ve termoelastik plak modelleri ise diğer iki modeldir [5]. Yine bu tez çalışması için, Kirchhoff modeli söz konusudur.

Yapısal mekaniğin gelişimi tamamen statik problemlerin araştırılmasıyla başlarken, plaklar üzerine yapılan ilk analitik ve deneysel çalışmalar, neredeyse tamamen serbest titreşimler üzerine yoğunlaşmıştır [3].

L.Navier, basit destekli dikdörtgen plakların belirli sınır değer problemlerinin çözümü için, Fourier tarafından tanıtılan çift trigonometrik serilerinin kullanımıyla, diferansiyel denklemi cebirsel ifadelerle dönüştüren kesin bir metot tanıttı. Ancak, Navier daha karmaşık plak problemlerinin çözümünde başarısız oldu [3,4,6]. Karşılıklı iki kenarından basit mesnetli diğer kenarları serbest dikdörtgen plakların çözümü Levy tarafından başarılı olarak çözüldü [4,6].

Gustav R. Kirchhoff'un ince plak teorisi üzerine önemli bir tezi Almanya'da yayınlandı. Kirchhoff bu tezde, şuan plak eğilme teorisinde Kirchhoff hipotezi olarak bilinen ve büyük kabul gören, iki temel varsayım üzerinde durdu. Kirchhoff'un plak teorisine diğer önemli katkısı, plakların frekans denklemini keşfidir [4]. Kirchhoff, büyük sehimli plaklar üzerine de yararlı çalışmalar yaptı [3].

Yirminci yüzyılın başlarında gemi inşa endüstrisinde, ahşap malzemelerle birlikte yapısal çelikler de kullanmaya başlayınca, plak teorilerinin gelişimi hızlandı. Rus bilimciler, matematiksel elastisite teorilerini kullanarak, plak teorilerine önemli katkılarda bulundular. En başta gelen bilimciler Krylov, Boobnov, Galerkin ve özellikle Timoshenko sayılabilir [4,7]. Timoshenko ve Woinowsky'ın "Theory of Plates and Shells" isimli kitabı [2] ve daha birçok çalışması, bilim insanlarının vazgeçilmez kaynakları arasında yerini korumaktadır.

II. Dünya savaşı yıllarında, modern uçak endüstrisinin gelişmesiyle, çeşitli plak problemlerinin daha ciddi ve hızlı çözümüne ihtiyaç duyulması, Wagner, Levy, Bleich, Federhofer gibi ünlü bilimcilerin doğmasına sebep oldu [3].

E.Reissner, kayma kuvvetlerinin sebep olduğu deformasyonları da hesaba katan bir plak teorisi geliştirdi [4]. Mindlin, kayma deformasyonlarına, dönme atalet momentlerini de ekleyerek, plak titreşim teorisi geliştirdi. Elastik plakların matematiksel titreşim teorilerini anlattığı kitabı [8], 1955 yılında yayınlandı. Mindlin plak titreşimleri ile ilgili ayrıntılı bilgi için, Liew'in [9] kitabına bakılabilir. Son yıllarda Reissner-Mindlin kalın plak teorileri, büyük ilgi görmektedir.

Günümüzde, plak çalışmalarına önemli katkı sağlayan araştırmacılardan biride, A.W.Leissa'dır. Plakların serbest titreşimlerinin mod biçimleri ve frekansları ile ilgili birçok faydalı bilgi ve yüzlerce literatür araştırmasını içeren kitabı, plak titreşimleri alanındaki araştırmacılar için vazgeçilmez kaynaklar arasındadır [10]. Yukarıdaki referanslardan başka, plak teorilerinin tarihi hakkında daha ayrıntılı bilgi için, Timoshenko [11], Soedel [12] ve Rao'nun [13] kitaplarına bakılabilir.

1.2. Plak Titreşimleri Üzerine Yapılan Güncel Çalışmalar

Plak teorilerinin gelişmesinin şu anki olduğu safha, yüksek güvenilirlikli, modern, hızlı bilgisayar teknolojilerinin gelişmesiyle, tamamen bilgisayar destekli sayısal metotlarla, daha karmaşık, değişik yükleme tipleri, çok çeşitli ve karmaşık sınır koşullu, çeşitli fiziksel etkiler gibi birçok etmenin hepsinin birden tanıtılıp çözülebilmesi aşamasıdır.

Bu tez çalışmasında ele alınan kare plakların serbest titreşimleriyle ilgili çalışmalar, yakın zamanda Leissa tarafından yapılmıştır [14]. Kenarlara destek olarak yerleştirilmiş kirişlerin, plak titreşim üzerine etkisi Elishakoff and Sternberg tarafından araştırıldı. Onların incelediği plak modeli karşılıklı iki zıt kenarından kiriş destekli, diğer karşılıklı iki kenarından ise basit mesnetliydi [15]. Elishakoff ve birkaç arkadaşı, aynı plağın basit mesnetli kenarlarına da kiriş yerleştirerek, tüm kenarlarından kiriş destekli plağın titreşimlerini incelediler [16].

Gorman'ın, çeşitli plak problemlerinin çözümü için, geliştirdiği süperpozisyon metoduyla ilgili birçok çalışması vardır. Örneğin, sadece bir kenarından tutturulmuş, diğer kenarlarından serbest dikdörtgen bir plağın serbest titreşimlerini, süperpozisyon metoduyla incelemiştir [17,18,19]. Singhal ve Gorman, rijit nokta destekli ve desteksiz, kısmi olarak ankastre dikdörtgen plakların serbest titreşimini aynı metodla incelediler [20]. Gorman kendi süperpozisyon metodunu doğrulamak için, nokta destekli kalın plakların serbest titreşimleri içinde kullandı [21]. Arkadaşı Singhal ile birlikte, sadece bir kenarından tutturulmuş ve süreksizlik özelliği gösteren dikdörtgen plakların titreşim analizini, yine süperpozisyon yöntemiyle incelediler. Süperpozisyon metodunu Galerkin metoduyla genişleterek, tüm kenarlarından serbest ve ankastre dikdörtgen plağın serbest titreşim analizi için kullandı [22]. Köşelerinden simetrik olarak kirişlerle destekli dikdörtgen plakların serbest titreşim analizini, ankastre ve basit mesnetli dikdörtgen plakların düzlem titreşimlerinin analitik çözümlerini yaptı [23,24,25]. Basit destekli dikdörtgen plakların serbest düzlem titreşimleri için, kesin çözümler elde etti [26]. Süperpozisyon metoduyla plak titreşim analizleri için gerekli bilgileri bir kitapta topladı [27].

Badel ve arkadaşları [28] Rayleigh-Ritz yaklaşımıyla klasik kenar şartlı plakların, Kobayshi ve meslektaşları [29] Ritz metoduyla nokta destekli dikdörtgen plakların, Gutierrez ve Laura [30] elastik destekli dikdörtgen plakların, Hyde ve diğerleri [31] Ritz metoduyla düzlem gerilme etkisi altındaki izotropik dikdörtgen plakların, düzlem titreşimleri ile ilgili çalışmalar yaptılar.

Vel ve Batra, basit destekli dikdörtgen plakların üç boyutlu serbest ve zorlanmış titreşimlerini, sınır şartlarını sağlayan uygun yer değiştirme fonksiyonları seçerek

incelediler [32]. Kenarlarının bir kısmında basit mesnetli, bir kısmında ankastre mesnetli dairesel ve dikdörtgen plakların titreşimleri, Vera ve meslektaşları yardımıyla, sınır şartlarının perturbasyonu uygulamasıyla incelenmiştir [33]. Basit destekli ve ara bölgelerden keyfi kolon destekli ince dikdörtgen plakların serbest titreşimlerinin kesin çözümünü, Zhou ve Ji birlikte yaptılar [34]. Üç farklı klasik sınır şartlı ince dikdörtgen plakların serbest titreşim analizinin kesin çözümlerinin, Bessel fonksiyonları ile de elde edilebileceğini Wu, Liu ve Chen birlikte gösterdiler [35]. Bahrami ve arkadaşları Kirchhoff plaklarının serbest titreşimlerini, dalga denklemleri yaklaşımıyla analitik olarak çözdüler [36]. Low ve arkadaşları, çeşitli yerlerinden kütle ekli, ankastre ve basit mesnetli dikdörtgen plakların titreşim analizini, hem deneysel hemde teorik olarak yapıp karşılaştırdılar [37]. Plak problemleri için kullanılan klasik yöntemlerin çoğunun, yeterli yaklaşıklıkta olmadığını belirten Lim ve arkadaşları, dikdörtgen Kirchhoff plaklarının serbest titreşimlerinin kesin çözümleri için yeni bir yaklaşım geliştirdiler [38].

Elastik temeller üzerine oturan plaklar üzerine de çeşitli araştırmalar yoğun şekilde devam etmektedir. Huang ve Thambiratnam [39], sonlu ızgara metodu ile elastik temel ve elastik destekler üzerinde oturan plakların analizini yaptılar. Hsu [40], üzerinde belirli sayıda kütle bulunan, elastik temel üzerinde oturan dikdörtgen plakların titreşim karakteristiklerini araştırdı. Civalek, elastik temel üzerine oturan plak problemleri için, detaylı bir literatür taraması yaptı [41].

Son yıllarda klasik olmayan sınır şartlı, noktasal kütlelerle, yaylarla yüklü ve elastik sınır şartlarına haiz plak titreşim problemleri üzerine yapılan çalışmalar, bir hayli artmaya başladığı gözlenmektedir. Kütleli ve çeşitli yay modifikasyonlu plak modelleri, birçok mühendislik yapılarında kullanılmaktadır [42]. Genel olarak noktasal kütleler, doğrusal ve burulma yayları gibi elemanlar taşıyan plaklara literatürde “constrained plak”, taşımayan plaklara ise “unconstrained plak” denmektedir. Unconstrained plaklarla ilgili çalışmalar literatürde sıklıkla mevcuttur ve çözümleri genellikle basittir. Constrained plak çalışmaları ise karmaşıklığından dolayı daha azdır [43]. Cheung ve Zhou, statik giriş fonksiyonlarını kullanarak, kenarlarından ve ara hatlarda elastik destekli anizotropik dikdörtgen plakların titreşimlerini, Rayleigh-Ritz metodunu da kullanarak incelediler [44]. Benzer bir

çalışmayı Huang ve Thambiratnam [45], sonlu ızgara yöntemini uygulayarak gerçekleştirdiler. Süperpozisyon metodu üzerine birçok çalışması bulunan Gorman, süperpozisyon metodunu elastik mesnetli plakların düzlem titreşimleri içinde uyguladı [46].

Son yıllarda plak problemi çözümlerinde, kiriş fonksiyonları ve modifikasyonlarının sıkça kullanıldığı görülmektedir. Zhou, uygun statik kiriş fonksiyon setleri tanımlayarak Rayleigh-Ritz metoduyla, klasik ve elastik sınır şartlı plakların doğal frekanslarını elde etti [47,48]. Lee ve adaşı tanımladıkları yeni bir kiriş fonksiyon setini, elastik nokta destekli plak titreşim problemi için yine Rayleigh-Ritz metoduyla birlikte kullandı [49]. Zhou ve Cheung daha önce kullandıkları benzer statik kiriş fonksiyonlarını bu kez anizotropik ince plaklar için kullandılar [50].

Li ve Daniels [51], kenarlarından doğrusal ve burulma yaylarıyla elastik olarak mesnetli ve üzerinde noktasal kütle ve yaylarla keyfi olarak yüklü plakların titreşimlerinin çözümü için, içinde yardımcı polinom barındıran, trigonometrik serilerden oluşan bir Fourier sinüs serisi yaklaşımı önerdiler. Li daha sonra [52], mevcut elastik sınırlı ve yüklü plak modelini, basit mesnetli kenarlarına da elastik yaylar yerleştirerek, tüm kenarları elastik olarak sınırlı plak modeline dönüştürdü ve Rayleigh-Ritz metoduyla çözümünü gösterdi. Du, Li ve diğer meslektaşları [53,54], polinomlu Fourier serili kendi çözüm metotlarını kullanarak, tüm kenarlarından elastik olarak sınırlandırılmış plakların, düzlem ve normal titreşimlerinin analitik çözümlerini elde ettiler. Aynı çözüm yöntemini geliştirerek, anizotropik plakların statik ve dinamik çözümleri ve uniform olmayan elastik sınırlı dikdörtgen plakların çözümleri içinde kullandılar [55,56]. Elastik sınırlı plak çalışmalarına devam eden Du, Li ve diğer arkadaşları, elastik olarak desteklenmiş plak modellerine, başka bir plağı belirli açılarla birleştirerek daha karmaşık ve zor bir model oluşturdular ve serbest titreşimlerini incelediler [57]. Aynı yazarlardan Zhang ve Li, kendi Fourier serisi metotlarını, elastik destekli plak modellerinden yayılan sesin incelenmesi için de kullanarak, verimli çalışmalarına devam etmektedirler [58]. Dal ve Morgül [59], polinomsal Fourier serilerini kullanarak, elastik destekli plakların statik çözümünü gerçekleştirdiler.

Zarubinskaya ve Horssen, sınırlarında elastik destekli plakların serbest titreşimleri [60] ve sınır sönümlü bir kirişin salınımları [61], daha sonrada Hijmissen ile birlikte Horssen yine ucunda kütle olan sınır sönümlü dikey kiriş titreşimleri [62] ile ilgili çalışmalar yaptılar.

1.3. Tezin Amacı ve Kapsamı

Literatür çalışmaları tarandığında, plak titreşimleriyle ilgili, uzun yıllardan beri yoğun şekilde çalışmaların ve araştırmaların yapıldığı ve halada aynı yoğunlukta devam ettiği gözlenmektedir. Buda plak titreşim problemlerinin, güncelliğini hala koruduğunu göstermektedir. Çünkü titreşim problemlerinin çözümleri, her şeyden önce çok güçlü diferansiyel denklem, elastisite teorisi, titreşim teorisi, sayısal ve analitik çözüm teknikleri, hatta yazılım vb. gibi bilgi ve beceri gerektirmektedir.

Bu tez çalışmasında, Li ve Daniels'in [51], karşılıklı iki kenarından basit mesnetli, diğer iki kenarı boyunca ise doğrusal ve burulma yaylarıyla desteklenmiş plak modeli göz önüne alınmıştır. Oluşturulan plak modelinin diferansiyel denkleminin çözümü için, Li ve Daniels'in çözüm yaklaşımı ele alınmıştır. Li ve Daniels'den farklı olarak, farklı sınır şartları, çeşitli terim sayıları, farklı doğrusal ve burulma yay değerleri için frekans parametreleri hesaplanmıştır. Elde edilen çözümler, ilgili referanslar ile karşılaştırılmış ve metodun doğruluğu görülmüştür. Literatürden farklı olarak, daha yüksek modlar için doğal frekanslar ve frekans parametreleri elde edilmiş ve bazı mod biçimleri gösterilmiştir. Literatürde benzeri olmayan ve ihtiyaç hissedilen sınır sönümlü plak için, serbest titreşim çözümleri yapılmıştır.

Elastik destekli ve sınır sönümlü plak modelinin hareketine ait diferansiyel denklem oluşturularak, sınır şartları belirlenmiştir. Fiziksel özellikleri, diferansiyel denklemleri ve sınır şartlarıyla birlikte mevcut plak problemi, başlangıç-sınır değer problemi olarak tanımlanabilir [63]. Bu sınır değer probleminin çözülebilmesi için plak yer değiştirme fonksiyonu için, uygun polinom, trigonometrik sinüs ifadeleri ve üstel fonksiyon içeren bir Fourier serisi yaklaşımı kullanılmıştır. Li ve Daniels'in [51] polinomsal çözüm fonksiyonu, uygun sönüm şartları göz önüne alınarak, bu çalışma için yeniden düzenlenmiştir. Diferansiyel denklem Galerkin metodu ile çözümlenerek,

frekans parametreleri, yay katsayıları, sönüm katsayıları ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, mevcut problemin çözülebilirliği gösterilmiş ve sönüm elemanları plak kenarlarında, kullanılarak plak titreşimleri üzerine etkisi incelenmiştir.

Yukarıda verilen literatür taraması, güncel bazı önemli çalışmaların özetlenmesinden ibarettir. Mevcut plak literatürü incelendiğinde; ortotropik, kompozit [64], sandviç [65], farklı kalınlıklı, delikli vb. plakların, farklı mesnet ve destek kombinasyonları ile doğrusal ve doğrusal olmayan titreşimleri üzerine yoğunlaşma olduğu görülmektedir. Zarubinskaya ve Horssen [63], dikdörtgen plaklarda sınır sönümü ile ilgili yaptıkları çalışmalarında, bu konu ile ilgili çalışmaların eksikliğine özellikle vurgulayarak belirtmişlerdir. Zarubinskaya ve Horssen; mevcut problemin doğrusal olmayan plak diferansiyel denklemini doğrusallaştırarak, değişkenlerin ayrıklaştırılması metoduyla çözmüş ve plak parametreleriyle sönüm oranları arasındaki ilişkileri, analitik olarak vermişlerdir. Ancak, sadece matematiksel çözüm yapmışlar, fiziksel ve plak titreşimleri açısından yeterli açıklayıcı sonuçlar ortaya koymamışlardır.

Yapılan bu çalışmada, Zarubinskaya ve Horssen'nin [63] makalelerinden farklı olarak; benzer bir plak modeli kullanılmakla birlikte, plağın diferansiyel denkleminin çözüm kabulü olarak, polinomsal Fourier sinüs serisi, çözüm metodu olarak ta Galerkin ayrıklaştırma metodu kullanılmıştır. Ayrıca, çeşitli mesnetli plakların doğal frekansları ve frekans parametreleri de hesaplanarak, mod şekilleri elde edilmiştir. Bundan başka, yay-sönüm katsayılarıyla plağın mod şekillerinin değişimi incelenmiş, kritik sönümler ve kritik sönümleme zamanları tahmin edilmeye çalışılmıştır. Sönümün plak kenarlarında kullanılabileceği gösterilmiştir.

Plak çalışmalarında, plak titreşimlerinin kontrolü de önemli bir yer tutmaktadır. Mevcut plak titreşimlerinin kontrolü, daha çok plak üzerine veya altına yerleştirilen kütle, yay ve sönüm elemanlarından oluşan farklı titreşim absorberleriyle [66,67], kompozit plak yöntemleriyle, bir katmanı sönüm özelliği yüksek malzeme ya da bir akışkan içeren sandviç plaklarla [68], aktif titreşim kontrolleriyle [69] yapılmaktadır. Başlangıçta bu çalışmanın hedefleri arasında bulunan, ER (Elektro-Rheological)

sıvılı [70] ve MR (Magneto-Rheological) sıvılı sandviç veya kompozit plakların, yarı-aktif titreşim kontrolü konusu da, çalışılması gereken alandır [71,72].

Yapılan bu çalışma ile pasif titreşim kontrolü için gerekli olan, yay ve sönüm değerleri tahmin edilebilecektir. Burada kontrol için etken eleman sönüm elemanlarıdır. Eğer plağın sınırlarındaki klasik viskoz sönüm elemanları yerine, kontrol edilebilirliği kolay ve ekonomik MR veya ER damper [73] gibi sönüm elemanları yerleştirilirse, plak titreşimleri yarı-aktif kontrol edilebilecektir. Titreşimlerin kontrol altında tutulmasıyla, çeşitli yüklere maruz plaklarda meydana gelebilecek hasar, çatlak, kırılma vb. deformasyonlar [74,75] azaltılarak, plak sistemlerinin daha stabil [76] ve uzun ömürlü olması sağlanacaktır.

Yukarıdaki kısımlarda; plakların tanıtımı, kullanım alanları, plak tipleri, plak problemlerinin çözüm yolları, konuyla yakından ilgili literatür çalışmaları, tezin kapsamı, amacı, çözüm metodu ve hedefi hakkında bilgiler verilmiştir.

Tezin İkinci bölümünde; ince plak teorisi (Kirchhoff plak teorisi) tanıtımı, elastisite teorisi denklemlerine dayanarak, ince plağın hareketine ait diferansiyel denklemin çıkartılması, plak titreşim teorisi hakkında bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölüm; kenarlarından doğrusal ve burulma yaylarıyla elastik destekli ve sınır sönümlü plak modelinin oluşturulması, sınır şartlarının belirlenmesi, sınır şartlarına bağlı çözüm fonksiyonunun elde edilmesi, plak diferansiyel denkleminin Galerkin metoduyla çözülerek frekans parametrelerinin ve mod biçimlerinin elde edilmesi aşamalarından oluşmaktadır. Dördüncü bölümde sayısal çözümler yapılmıştır. Çeşitli sönümlü ve sönümsüz sınır şartlı plak modelleri oluşturularak, bu modellere ait frekanslar ve frekans parametreleri ve mod biçimleri elde edilmiş ve bazıları referanslarla karşılaştırılmıştır. Yay ve sönüm katsayılarıyla mod şekilleri değişimi gösterilmiştir. Beşinci bölümde, elde edilen sonuçların değerlendirilmesi yapılmıştır.

BÖLÜM 2. KLASİK PLAK TEORİSİ

2.1. Giriş

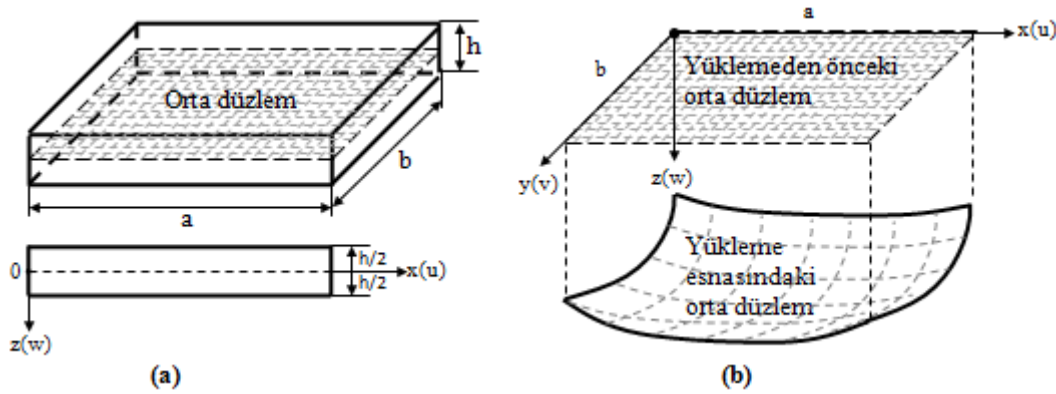
Klasik plak teorisi, elastisite teorisinin önemli bir özel uygulama alanıdır. Bilindiği gibi elastisite teorisi, elastik cisimlerde kuvvet, yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeler arasındaki ilişkileri inceler. Bunu yaparken incelediği cisimlerin doğrusal-elastik, homojen ve izotrop olduğunu varsayar. Elastik plak teorisi ise, özel olarak plak problemlerini ve matematiksel çözüm yollarını araştırır. Plak problemine giriş kısmında belirtildiği gibi yapı, gemi, uçak, uydu, makine, otomotiv, köprü, tıbbi cihazlar vb. gibi birçok mühendislik alanında plaklarla karşılaşmaktadır.

Bir plağın doğrusal bir davranış gösterebilmesi için, ince plağın titreşim genliği, plak kalınlığının $1/10$ 'u kadar veya daha az olması gerekmektedir [1]. Aksi takdirde doğrusal olmayan plak teorisini göz önünde bulundurmak gerekmektedir. İnce plak deyimi, plak kalınlığının genişliğine oranı gibi belirli oranlarla ifade edilse de, aslında göreceli bir kavramdır. Bunun için ince plak deyince, kayma deformasyonlarının yok sayılabileceği kadar ince, düzlem içi membran kuvvetlerinin (eksenel gerilme ve merkezi kayma kuvvetlerinin) yok sayılacağı kadar kalın plak algılanmaktadır [6].

Deformasyon analizleri için, kirişlere benzer olarak plaklarda da birçok teoriler vardır. Bu teoriler genel olarak “ince plak teorisi” ve “kalın plak teorisi” olarak iki önemli kategoriye ayrılmıştır. Bu tez çalışmasında, “klasik plak teorisi” veya “Kirchhoff plak teorisi” olarak ta isimlendirilen “ince plak teorisi” ele alınmıştır. Kirchhoff plak teorisi en eski plak teorisidir [77]. Adından da anlaşılacağı gibi plak eğilme teorisi tam olarak ilk kez Gustav R. Kirchhoff (1824-1887) tarafından geliştirilmiştir. Klasik plak teorisi, plak denkleminin elde edilmesinde, eksenel ve kayma deformasyonlarını ihmal ederek, sadece eğilme terimlerini kullanır. Ayrıca

orta yüzeyin normali, deformasyondan sonra da yüzeye dik kalır. Kalın plak teorisi ise, aksenal ve kayma deformasyonlarını da içerir. Kalın plak teorisi aynı zamanda “Reissner-Mindlin plak teorisi” veya “kayma deformasyon plak teorisi” olarak ta isimlendirilmektedir [78,79].

Bir plağın her iki yüzeyinden, plak kalınlığının yarısı ($\pm h/2$) kadar uzaktaki noktaların oluşturduğu yüzeye “orta düzlem” denir. Dış yüklere maruz bir plak deformasyona uğrar ve orta düzlem eğrisel bir hale gelir. Dış yükler kalkınca orta düzlem tekrar eski haline döner. Bir plak geometrisi ve bileşenleri Şekil 2.1’deki gibi verilmektedir. Çeşitli parametreler, değişik çalışmalarda değişik şekillerde gösterilebilmektedir.

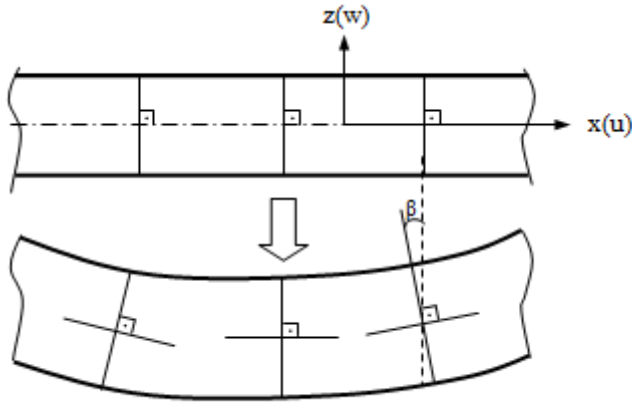


Şekil 2.1 Plak parametreleri, orta düzlemi ve deformasyonu

Kirchhoff plak teorisi, aşağıdaki varsayımlara dayanmaktadır.

- Plak malzemesi lineer-elastik (Hooke), homojen ve izotropiktir.
- Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri başlangıçta bir düzlemdir.
- Eğilme esnasında plak orta yüzeyi düz kalır.
- Plak kalınlığı, plağın diğer boyutlarına nazaran küçüktür.
- Orta düzleme dik σ_z normal gerilmesi, diğer gerilmelerle karşılaştırıldığında ihmal edilebilecek kadar küçüktür ($\sigma_z \cong 0$).
- Yükler, plak orta düzlemine dik olarak etkir.
- Plak orta düzleminin çökmesi plak kalınlığına göre küçüktür. Bu yüzden çökme yüzeyinin eğim açısı da çok küçük kalır ($\beta \cong 0$) (Şekil 2.2)

Deformasyondan önce plak orta yüzeyinin normali, deformasyondan sonra da düz ve dik kalır. Plak eleman boyu değişmez. Bu durum γ_{xz} ve γ_{yz} kayma zorlanmalarının ve ε_z normal zorlanmasının ihmal edilebileceğini ($\varepsilon_z \cong 0$) ifade eder. Bu varsayım Euler-Bernoulli kiriş hipotezinin plaklara uyarlanmasıdır (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Euler-Bernoulli kiriş hipotezinin gösterimi

2.2. Şekil Değiştirme - Yer Değiştirme Bağlıları

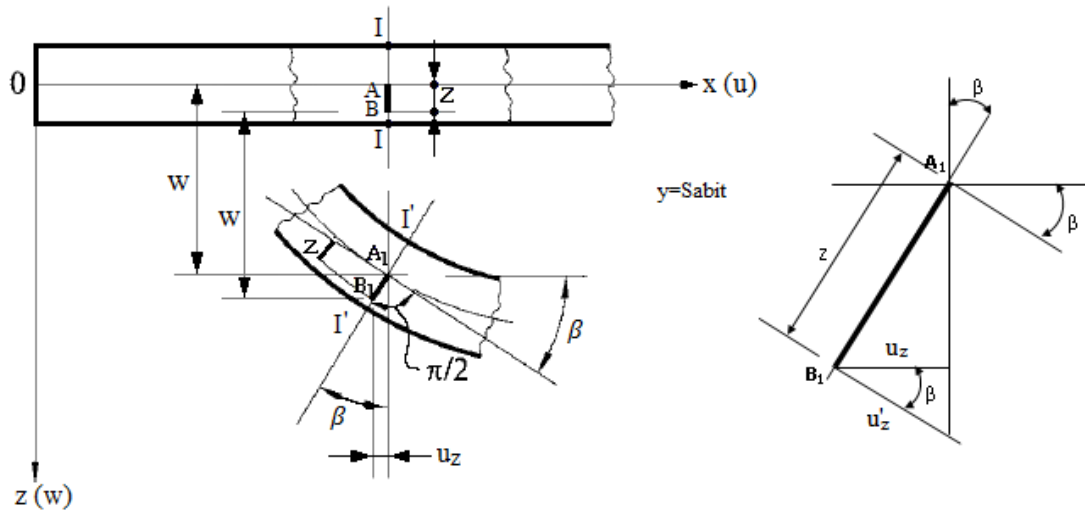
Burada yer değiştirme için, elastisite teorisindeki gerilme ve gerinim bileşenleri kullanılmıştır. x, y ve z yönlerinde hareket eden plak orta yüzeyindeki noktaların yer değiştirme bileşenleri sırasıyla u, v ve w olsun. Yer değiştirme vektörünün normal bileşeni olan w ve plak üzerine uygulanan yanal yayılı yük aşağı yönde pozitif alınmaktadır (Şekil 2.3).

Plığın x doğrultusundaki eğimi,

$$\operatorname{tg} \beta \cong \beta \cong \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1)$$

olur. Benzer şekilde Şekil 2.3'ten,

$$\operatorname{tg} \beta \cong \beta \cong \frac{u'_z}{z} \quad (2.2)$$



Şekil 2.3 Deformasyondan önce ve sonra plak elemanı

yazılır. Dolayısıyla (2.1) ve (2.2) denklemlerinden u'_z aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u'_z}{z} = \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow u'_z = z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$u_z = u'_z \cos \beta \quad (2.4)$$

$$\beta \ll 1 \Rightarrow \cos \beta \cong 1 \Rightarrow u_z = u'_z \quad (2.5)$$

u_z ters (-) yönde olduğu için aşağıdaki gibi düzenir.

$$u_z = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.6)$$

Aynı şekilde v_z de yazılır.

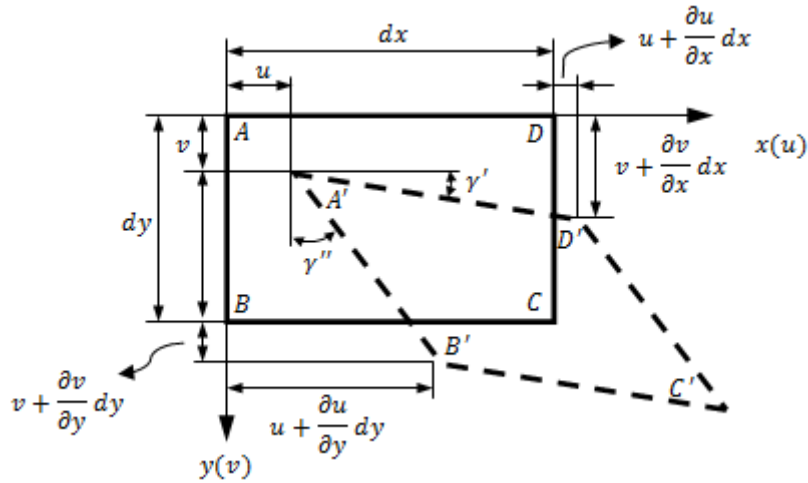
$$v_z = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.7)$$

Buna göre z koordinatı boyunca meydana gelen zorlanmalar aşağıdaki gibi olur.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} u_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.10)$$



Şekil 2.4 Kayma zorlanmasının gösterimi

Şekil 2.4'den açısal zorlanmalar (açısal değişimler) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\gamma' = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad ve \quad \gamma'' = \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma'' + \gamma' = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} u_z + \frac{\partial}{\partial x} v_z \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.13)$$

2.3. Gerilme - Deformasyon Bileşenleri Bağlıları

Elastisite teorisinden 3D bir eleman için gerilmeler ile zorlanmalar arasındaki bağıntıların,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.16)$$

olduğu bilinmektedir. Buradaki G kayma modülü olup denklem (2.17)'de verilmiştir. Plak orta yüzeyine dik σ_z normal gerilmesi ve ε_z normal zorlanması yaklaşık çok küçük olduğu için, yaklaşık olarak sıfır alınmaktadır ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_z = 0$). Buna göre (2.14), (2.15), ve (2.16) denklemleri, tekrar düzenlenerek gerilmeler çekilirse, gerilme-zorlanma denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$G = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad (2.17)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (2.18)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (2.19)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.20)$$

2.4. Gerilmelerle Deplasman Bileşenleri Arasındaki Bağlılıklar

Daha önce elde edilen $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve γ_{xy} zorlanma denklemleri $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gerilme denklemlerinde yerine konularak düzenlenirse,

$$\sigma_x = z \left\{ -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} \quad (2.21)$$

$$\sigma_y = z \left\{ -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} \quad (2.22)$$

$$\tau_{xy} = z \left\{ -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (2.23)$$

gerilme denklemleri elde edilir. Aşağıdaki kısaltmalar yapılarak tekrar düzenlenirse,

$$\chi_{xy} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.24)$$

$$\chi_{yx} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.25)$$

$$\chi = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.26)$$

$$\sigma_x = z \chi_{xy} \quad (2.27)$$

$$\sigma_y = z \chi_{yx} \quad (2.28)$$

$$\tau_{xy} = z \chi \quad (2.29)$$

denklemleri elde edilir. Görüldüğü gibi gerilmeler z 'e lineer bağlıdır. Buda kesit yüksekliğince gerilmelerin lineer olarak değiştiğini göstermektedir.

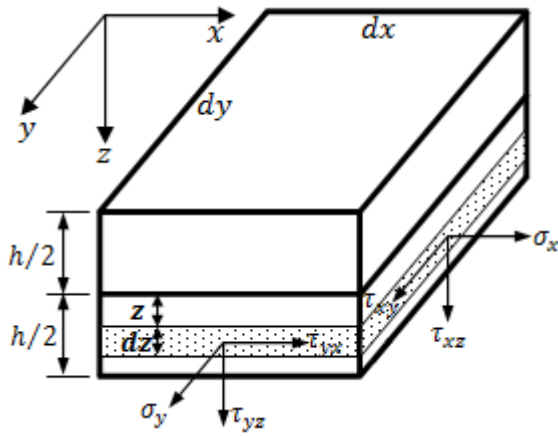
2.5. Gerilmelerin Bileşkesi Olarak Momentlerin Bulunması

Birim boya etki eden momentler M_x, M_y ve M_{xy} ile gösterilir. Şekil 2.5'te gösterilen dz yüksekliğindeki diferansiyel elemana etkiyen kuvvet;

$$F = \sigma_x dA \quad (2.30)$$

şeklindedir. Buradaki dA , aşağıdaki gibidir.

$$dA = dz \cdot dy \quad (2.31)$$



Şekil 2.5 Diferansiyel plak elemanına etkiyen gerilme bileşenleri

F Kuvvetinin tarafsız eksene göre momenti,

$$M_x = Fz \quad (2.32)$$

$$M_x = \sigma_x dAz \quad (2.33)$$

şeklindedir. Bu moment ifadesi, plak yüksekliği boyunca integre edilir ve dy ile çarpılırsa plak elemanı için moment ifadesi elde edilir.

$$dy \cdot M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dAz \quad (2.34)$$

$$dy \cdot M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \cdot dy \cdot z \quad (2.35)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \chi_{xy} z \cdot z \cdot dz \quad (2.36)$$

$$M_x = \chi_{xy} \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \quad (2.37)$$

$$M_x = \chi_{xy} \frac{h^3}{12} = \chi_{xy} I \quad (2.38)$$

Dikkat edilirse $h^3/12$, birim genişlik için plak atalet momentidir. Denklem (2.24), Denklem (2.38)'de yerine konular ve yukarıdaki işlemler M_y ve M_{xy} içinde yapılırsa, aşağıdaki şekle dönüşür.

$$M_x = -\frac{EI}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.39)$$

$$M_y = -\frac{EI}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.40)$$

$$M_{xy} = -\frac{EI}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.41)$$

Bu denklemlerdeki $EI/(1-\nu^2)$ ifadesi plak rijitliği olarak adlandırılır ve D ile gösterilir.

$$D = \frac{EI}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.42)$$

Moment bağıntıları tekrar düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

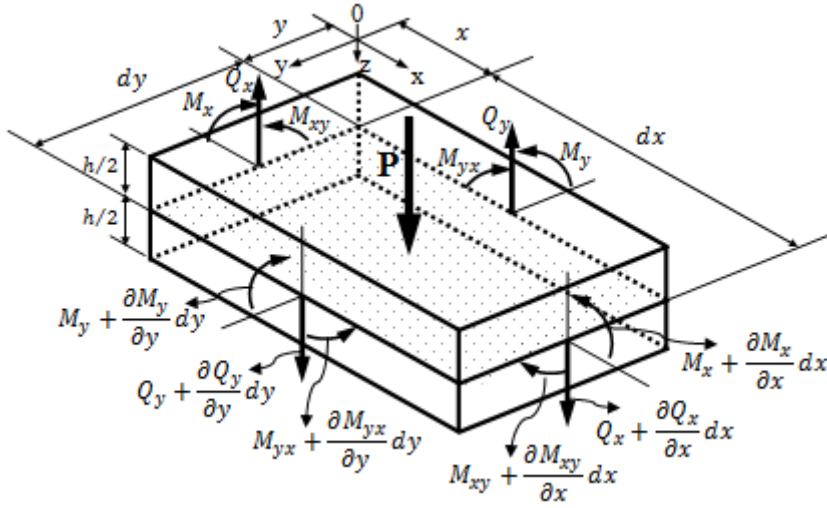
$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D(w''_{xx} + \nu w''_{yy}) \quad (2.43)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D(w''_{yy} + \nu w''_{xx}) \quad (2.44)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu)w''_{xy} \quad (2.45)$$

2.6. Diferansiyel Elemanın Dengesi ve Plak Diferansiyel Denklemi

Üst yüzeyine dikey yönde uygulanan $p(x,y)$ yayılı kuvvetine maruz bir plağın $dx \times dy$ diferansiyel elemanın dengesi göz önüne alınsın (Şekil 2.6). Gerilme bileşkeleri ve çiftlerinin orta düzleme uygulandığı varsayıldığı için $p(x,y)$ yayılı yükünün de orta düzleme etkidiği göz önüne alınmıştır. Plak elemanı diferansiyel boyutta yani çok küçük olduğu için, kuvvet ve moment bileşenlerinin de orta düzleme düzgülü yayılı olduğu göz önüne alınmalıdır. Basitleştirme için kuvvet ve moment bileşenleri Şekil 2.6'da, tek bir vektörle temsil edilmiştir.



Şekil 2.6 Plak elemanın dengesi

Şekil 2.6'daki plak elemanın dengesi için aşağıdaki denge denklemleri yazılabilir.

$$\sum M_x = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx dy - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy \frac{dx}{2} \quad (2.47)$$

$$-p dx dy \frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (2.48)$$

$$\sum M_y = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = Q_y \quad (2.50)$$

$$\sum P_z = 0 \quad (2.51)$$

$$p dx dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (2.53)$$

Moment denklemleri (2.43), (2.44) ve (2.45), denge denklemleri olan (2.48) ve (2.50) bağıntılarında yerlerine konularak düzenlenirse Q_x ve Q_y kayma kuvvetleri, yer değiştirmelere (w) bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{\partial}{\partial y} M_{xy} \quad (2.54)$$

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.55)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (2.56)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.57)$$

Bu Q_x ve Q_y bağıntıları, (2.53) denklemiyle birlikte aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{\partial}{\partial y} Q_y = -p \quad (2.58)$$

$$-D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) - D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -p \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (2.60)$$

Denklem (2.60), ince plakların eğilme analizi için, dış yüklerle yer değiştirmeler arasındaki ilişkiyi ifade eden, sabit katsayılı dördüncü dereceden doğrusal bir diferansiyel denklemdir [4]. Aşağıdaki (2.61) Laplas operatörünün (∇) karesi alınırsa,

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (2.61)$$

$$\nabla^4(\bullet) = \nabla^2(\nabla^2(\bullet)) = \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\bullet)}{\partial y^4} \quad (2.62)$$

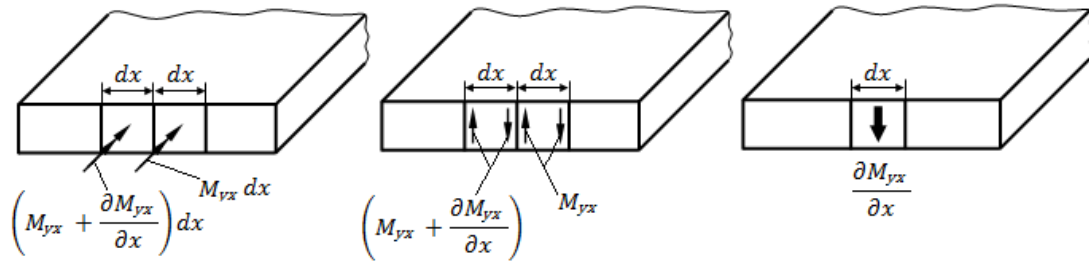
ifadesi elde edilir. Bu ifade biharmonik operatör veya Hamilton operatörü olarak adlandırılmaktadır. Plak diferansiyel denklemi (2.60) tekrar düzenlenecek olursa, ince plağın (2.63) diferansiyel denklemi, en sade şekliyle elde edilmiş olur.

$$D\nabla^4 w(x, y) = p(x, y) \quad (2.63)$$

2.7. Kirchhoff Plağının Kenar Kuvvetlerinin Elde Edilmesi

Bir plak elemanı ve orta yüzeyindeki eğilme ve burulma momentleri, Şekil 2.6'da verilmiştir.

Kenarlarda etkiyen burulma momentleri, kuvvet çiftleri olarak ifade edilir. Buna göre, birim boya etkiyen burulma momenti M_{xy} , dx boyuna etkiyen burulma momenti $M_{xy}dx$ dir. Aynı şekilde, dy boyuna etkiyen burulma momenti ise $M_{xy}dy$ olur (Şekil 2.7).



Şekil 2.7 Burulma momentlerinin kesme kuvveti şeklindeki ifadesi

Plak elemanının kenarındaki bu kuvvet çitlerinin toplamı yapılırsa,

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx \quad (2.64)$$

şeklinde plak elemanı kenarına etkiyen kuvvetler bulunur. Bu kuvvetler dx ve dy 'ye bölünürse, plak elemanının kenarının birim boyuna etkiyen kuvvetler (2.65)'deki gibi bulunur. Dolayısıyla, plak kenarındaki burulma momentleri yerine, birim boya etkiyen bu kuvvetler alınır.

$$Q_x^* = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y^* = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (2.65)$$

Bu kuvvetler Kirchhoff'un ek kuvvetleri olarak adlandırılmaktadır. Kirchhoff, üç tane olan iç kuvvetlerinin sayısını (eğilme ve burulma momentleri, kesme kuvvetleri), plak elemanı kenarlarındaki burulma momentlerini, bu eşdeğer kayma kuvvetlerine dönüştürerek, ikiye düşürmüştür [3].

Daha önce elde edilen (2.56) kesme kuvveti denklemine, (2.65) Kirchhoff ek kuvvetlerinin eklenmesiyle, plak elemanı kenarlarındaki toplam kenar kuvvetleri (kesme kuvvetleri), aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$V_x = Q_x + Q_x^* \quad (2.66)$$

$$V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.67)$$

$$V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.68)$$

$$V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.69)$$

$$V_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.70)$$

2.8. İnce Plakların Titreşim Teorisi

Kinematik denklemler (gerilme-gerinim denklemleri) elde edilirken, dış yüklerin sistemin dengesini bozmayacak şekilde hareketsiz olduğu kabul edilmiştir. Bu yüzden yavaşça uygulanan yüklerden dolayı oluşan gerilme ve deformasyonlar zamandan bağımsızdır. Bununla birlikte mühendislik pratiğinde, birçok makine elemanı ve yapılar, zamana bağlı dış dinamik kuvvetler veya yer değiştirmeler tarafından üretilen dinamik etkilere maruzdur. Bu dinamik etkilerde, sistemler üzerinde zamana bağlı deformasyonlara ve istenmeyen titreşimlere sebep olabilmektedir. Dinamik yükler hareketli araçlar, kuvvetli rüzgâr ve dalgalar, depremler, balanssız parçalar, uçuş yükleri, gürültü vb. gibi etmenlerden meydana gelir. Sürekli elastik sistemler olan plaklar, Newton yasalarına dayalı kısmi diferansiyel denklemlerle, matematiksel olarak veya virtüel işler prensibine dayalı integrasyonlar gibi metotlarla modellenabilmektedir

Sönüm etkileri, iç sürtünmeler, çevresel vb. birçok etmenlerden kaynaklanabilmektedir. İç sönüm etkisi teorik olarak bütün titreşim sistemlerinde mevcut olmasına rağmen, doğal frekanslar üzerine etkisi yoktur veya yok denecek kadar çok azdır. Dolayısıyla, etkisi az olduğu için, plak titreşim problemlerinde iç sönüm ihmal edilebilmektedir.

Plakların serbest titreşim biçimi, birçok değişik şekillerde meydana gelebilmektedir. Plakın serbest titreşim biçimlerinden birisi, belirli başlangıç şartlarına sahip plakın

üzerine uygulanan bir dış yükten kurtarılmasıdır. Ya da statik durumdaki plağa belli bir darbe (impuls) etkisi verilmesidir. Böylece başlangıç şartlarının etkisiyle plak serbest olarak hareket etmeye başlamaktadır. Serbest titreşim, plağın doğal karakteristiklerini ele alır ve bu doğal titreşimler plağın malzeme özellikleri ve geometrisine bağlı olarak farklı frekanslarda meydana gelir.

Plak hareketinin diğer bir titreşim durumu olan zorlanmış titreşim, plağa zamana bağlı bir dış kuvvetin uygulanması halidir. Zorlanmış titreşimler iki şekilde modellenebilir. Bunlar; plağa zamana bağlı periyodik bir kuvvet uygulandığı durumdaki harmonik cevap, diğeri plağa periyodik olmayan zamana bağlı bir kuvvet uygulandığı durumdaki geçici hal davranışı cevabıdır.

Sürekli elastik sistemler olan plakların titreşimlerini inceleyebilmek için, öncelikle plakların hareketine ait dinamik diferansiyel denkleminin, matematiksel formda elde edilmesi gerekmektedir. Plak elemanının (Bkz. Şekil 2.6) deplasmanı ile ilgili iç kuvvetler dengesi,

$$p(x, y, t) = -\rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = -\rho h \ddot{w} \quad (2.71)$$

şeklinde yazılır. Burada ρ , plak malzeme yoğunluğu, h ise plak kalınlığıdır. Denklem (2.71)'den görüldüğü gibi, plakta w yer değiştirmesi (sehimler) ve p yükü zamanla değişmektedir. Yani w ve p zamanın bir fonksiyonudur. Buda plakların dinamik analizinin zamana bağlı olduğunu ifade etmektedir. Bu durumda, plakların sönümsüz hali için, zorlanmış titreşim hareketinin (2.63) statik diferansiyel denklemi,

$$D\nabla^4 w(x, y, t) = p(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (2.72)$$

şeklinde dinamik bir diferansiyel denkleme dönüşmüş olur. Bu denklem düzenlenirse, ince plakların zorlanmış hareketine ait dinamik diferansiyel denklemi elde edilir.

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (2.73)$$

Basit destekli bir ince plak ele alınsın. Plak üzerindeki yükler, plak orta yüzeyini z doğrultusunda yer değiştirmeye zorlarlar. Eğer bu kuvvetler plağın belirli bir başlangıç anında aniden kaldırılırsa veya yüksüz bir plak, denge konumundan uzak belirli bir başlangıç konumundan sonra serbest bırakılırsa, plakta doğal (serbest) titreşimler meydana gelir. Buradan anlaşıldığı gibi, doğal titreşimler yükten bağımsız olup, elastik plağın tabii özelliklerindedir ve sadece plak geometrisi ve malzeme özelliklerinin fonksiyonudur. Bundan dolayı serbest titreşim durumunda, $p(x, y, t)$ zorlayıcı kuvveti veya yükü sıfır olur ve homojen olmayan zorlanmış dinamik diferansiyel denklemi,

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.74)$$

şeklinde homojen dinamik diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklem, kartezyen koordinatlarda, ince plakların serbest titreşimine ait sönümsüz, sabit katsayılı, homojen bir diferansiyel denklemdir. Bu denklem aynı zamanda, plağın sınır şartlarına da bağlıdır. Dolayısıyla aynı zamanda bir sınır değer problemidir. Bu diferansiyel denklemin çözülmesiyle, plağın doğal frekansları, mod biçimleri ve frekans parametreleri elde edilebilmektedir.

BÖLÜM 3. ELASTİK VE SÖNÜM MESNETLİ PLAK TİTREŞİMLERİ

3.1. Giriş

Plak literatürünün çoğunda ankastre, basit destekli veya serbest kenar gibi klasik sınır şartları çalışılmıştır. Leissa [10], dikdörtgen plaklar için, 21 farklı klasik sınır şartı çeşidinin olduğunu belirtmiştir. Ayrıca elastik destekli plak kombinasyonu ile birlikte bu çeşitliliğin 50'yi aştığı literatürde belirtilmektedir [54].

Bu bölümde, karşılıklı iki kenarı boyunca doğrusal ve burulma yayları ve sönüm elemanlarıyla mesnetli, diğer iki kenarından ise basit mesnetli, klasik olmayan sınır şartlı ince dikdörtgen plak probleminin, yardımcı polinomlu Fourier sinüs serileriyle çözümü incelenmiştir. Dolayısıyla klasik olmayan sınır şartlı, sınır sönüm problemi ortaya çıkmaktadır. Bu konuda Zarubinskaya ve Horssen [63] dışında benzer bir çalışmaya rastlanılamamıştır. Zarubinskaya ve Horssen çalışmalarında, doğrusal olmayan plak denklemini doğrusal hale dönüştürmüşler ve bazı kabullere dayanarak, diferansiyel denklemi analitik olarak çözmeye çalışmışlardır. Belirtilen çalışmada da, plaklarda sınır sönümü konusunda, literatürdeki boşluğa özellikle değinilmiştir.

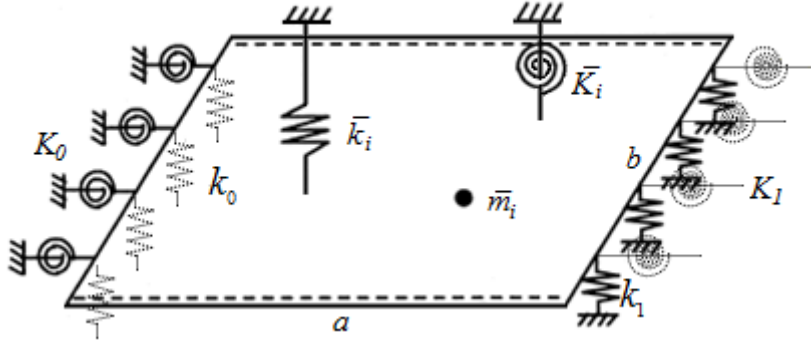
3.2. Karşılıklı İki Kenarı Elastik Mesnetli Plak Modelinin Oluşturulması

Titreşen bir plak eğilme, enine (boyuna) ve kayma olmak üzere üç tip dalga formu sergilemektedir. Bu üç tip dalgaformu gruplarından eğilme formu, düzlem dışı titreşim, enine ve kayma formu ise düzlem içi titreşim olarak adlandırılmaktadır. Plakların eğilme titreşimleri ile ilgili çalışmalar literatürde oldukça kayda değer miktarda olup, düzlem titreşimleriyle ilgili çalışmalar ise kısıtlıdır [53].

Çeşitli sınır şartlarına haiz dikdörtgen plakların eğilme titreşimleri, literatürde yaygın olarak çalışılmaktadır. Leissa tarafından bu konudaki çalışmalar kapsamlı bir şekilde incelenmiştir [54]. Farklı sınır şartlarına maruz plakların titreşim çalışmaları, büyük teknolojik öneminden dolayı literatürde çok dikkat çekici şekilde ele alınmaktadır. Basit destekli, ankastre veya serbest kenarlı gibi klasik sınır şartlı plaklarda büyük bir doğrulukta çözümler yapılabilmektedir. Böyle klasik sınır şartlı plaklarda, çok iyi bir model kurulduğu zaman bile gerçekte çok büyük matematik zorluklar doğmaktadır [33]. Karşılıklı kenarlarından en az bir çifti basit destekli olan dikdörtgen plakların, kesin çözümleri mevcutken, klasik olmayan daha fazla sınır şartı barındıran plaklarda ise, kesin çözümün olmadığı genel kanı olarak kabul edilmektedir. Bununla birlikte, farklı sınır şartları altındaki plak problemlerini çözmek için, çeşitli yaklaşık sayısal yöntemlerde ele alınmaktadır [54]. Bu yaklaşık metotlardan Ritz metodu ve Galerkin metodu plakların doğal frekanslarını elde etmek için kullanılan popüler metotlardandır [78].

Tez çalışmasında kullanılmak üzere, ihtiyaçlar doğrultusunda literatürden plak modeli araştırması yapılmıştır. Planlanan çalışmada kullanılacak plak modeli ile ilgili literatürde, özellikle D.J. Gorman ve W. L. Li'nin çalışmaları yakından incelenmiştir. Bu çalışmada kullanılacak en önemli referanslardan biride Li'nin [51], elastik kenar mesnetli dikdörtgen plakların çözüm için, polinom içeren Fourier serileri metodunu kullandığı çalışmasıdır. Fourier serileri, özellikle klasik sınır şartlı plak çözümlerinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Plak çözümlerinde, Fourier serilerini kullanan yöntemlerden en önemlisi de Navier metodudur. Ancak, Fourier serileri tek başına, klasik sınır şartlarından farklı sınır şartları için, potansiyel problemler yüzünden tam olarak yeterli gelmemektedir. Bu tür problemlerde belirli sınır şartlarını sağlamak için Fourier seri açılımları veya sinüzoidal fonksiyonlu kombinasyonlar içinde basit polinomlar kullanılmaya giriş çözümlerinde başlanmıştır. Ayrıca seri içinde polinom kullanılmasının başka bir amacı da, plaktaki süreksizlik veya başka bir ifadeyle tekil nokta problemlerinden kurtulmaktır. İnce plakların titreşim problemlerinde karşılaşılan tekil nokta problemleriyle ilgili, Leissa'nın öğrencisi Huang bir tez çalışması yapmıştır [80]. Li ve Daniels belirtilen çalışmalarında, girişlerde kullanılan polinomlu Fourier serilerini, plaklarda kullanarak çözümün doğruluğunu ve güvenilirliğini sayısal örneklerle göstermişlerdir.

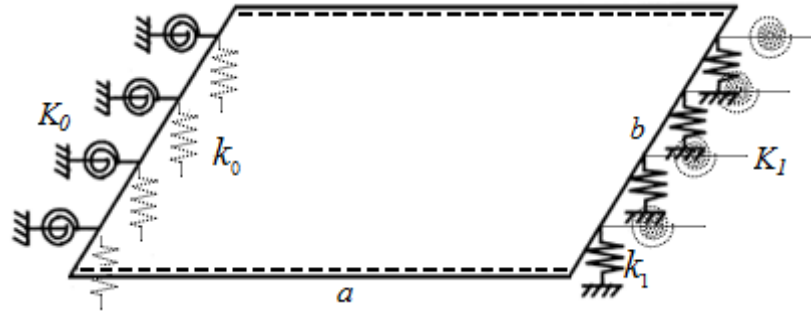
Li ve Daniels [51] birlikte yaptıkları çalışmalarında, karşılıklı iki kenarından elastik mesnetli, diğer iki kenarından basit mesnetli ve üzerinden yay ve kütlelerle keyfi yüklü plak modelini kullanmışlardır (Şekil 3.1). Ayrıca plak belirli sayıda doğrusal ve burulma yaylarıyla ve kütlelerle yüklenmiştir.



Şekil 3.1 Elastik destekli ve yüklü ince dikdörtgen plak modeli [51]

Yukarıdaki Şekil 3.1'den görüldüğü gibi, dikdörtgen plak, $y = 0, y = b$ kenarları boyunca basit destekli, $x = 0, x = a$ kenarları boyunca da elastik olarak desteklidir. Plak keyfi olarak yaylarla ve kütlelerle yüklenmiştir.

Bu çalışmada, bu plak modelinin üzerindeki kütle ve yükler kaldırılarak, yüksüz plak modeli göz önüne alınmıştır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 Elastik destekli ince dikdörtgen plak modeli

3.3. Elastik Mesnetli Plak Modelinin Diferansiyel Denklemi

Önceki bölümde, ince plakların hareketine ait diferansiyel denklem elde edilmişti. Bu denklem, Şekil 3.1'deki elastik kenar mesnetli ve yüklü plak modeli için tekrar düzenlenecek olursa, Denklem (3.1) elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left(D\nabla^4 + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{N_m} \bar{m}_i \delta(x - x'_i, y - y'_i) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{N_k} \bar{k}_i \delta(x - x_i, y - y_i) \right) w(x, y, t) \\
& \quad - \sum_{i=1}^{N_K} \bar{K}_i \frac{\partial w(\bar{x}_i, \bar{y}_i, t)}{\partial x} \frac{\partial \delta(x - \bar{x}_i, y - \bar{y}_i)}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada, $\delta(x, y)$ iki boyutlu dirac delta fonksiyonudur. Bu diferansiyel denklem için, aşağıdaki (3.2) çözüm kabulü yapılırsa ve (3.1) denklemi tekrar düzenlenirse, aşağıdaki hale dönüşür.

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{j\omega t} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
& \left(D\nabla^4 - \rho h \omega^2 + \sum_{i=1}^{N_m} \bar{m}_i \delta(x - x'_i, y - y'_i) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{N_k} \bar{k}_i \delta(x - x_i, y - y_i) \right) W(x, y) \\
& \quad - \sum_{i=1}^{N_K} \bar{K}_i \frac{\partial W(\bar{x}_i, \bar{y}_i)}{\partial x} \frac{\partial \delta(x - \bar{x}_i, y - \bar{y}_i)}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

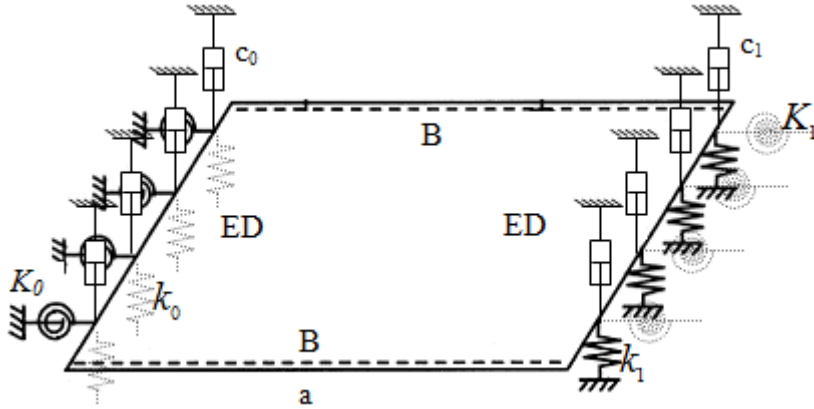
Eğer plağın yüksüz hali için, (3.3) denklemi yeniden düzenlenecek olursa denklem (3.4)'deki gibi olur.

$$D\nabla^4 W(x, y) - \rho h \omega^2 W(x, y) = 0 \tag{3.4}$$

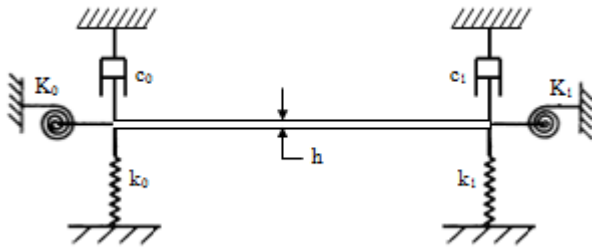
Burada $W(x, y)$, plağın z eksenini doğrultusunda yer değiştirmesini ifade eden yer değiştirme fonksiyonu, ω açısal frekans, D plak rijitliği, ρ yoğunluk, h plak kalınlığı, $\bar{k}_i(x_i, y_i)$ noktalarındaki doğrusal yay katsayıları, $\bar{K}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ noktalarındaki burulma yay katsayıları, $\bar{m}_i(x'_i, y'_i)$ noktasında bulunan kütle, N_k, N_K, N_m ise sırasıyla, plağa yüklenen doğrusal yaylar, burulma yayları ve kütlelerin sayısıdır.

3.4. Karşılıklı İki Kenarı Elastik ve Sönüm Mesnetli Plak Modeli

Sınır sönümlü plak modeli Şekil 3.3'deki gibi oluşturulmuştur. Şekil 3.4'te ise plak modelinin önden kesit görünüşü verilmiştir. Görüldüğü gibi hazırlanan plak modeli, Şekil 3.1'de görülen modelin sınırlarına sönüm eklenerek geliştirilmiş halidir. Ayrıca plak üzerindeki yay ve kütle yükleri basitleştirme açısından kaldırılmıştır. Sönüm katsayıları c_0 ve c_1 olan sönüm elemanları $x = 0, x = a$ kenarları boyunca sıklıkla yerleştirilmiş ve her bir kenar boyunca ki sönüm katsayıları eşdeğer büyüklüktedir. Bu çalışmada plağın kendi iç sönümü dikkate alınmamaktadır.



Şekil 3.3 İki kenarı elastik sönüm mesnetli plak modeli



Şekil 3.4 İki kenarı elastik ve sönüm mesnetli plak modelinin kesiti

Görüldüğü gibi plak karşılıklı iki kenarından basit mesnetli (Basit - B), diğer karşılıklı iki kenarından ise hem elastik hem sönüm elemanı mesnetlidir (Elastic-Damping - ED). Elastik elemanlar, doğrusal ve burulma yaylarından oluşmaktadır.

Sınır sönümlü plağın (Şekil 3.3) hareketine ait diferansiyel denklemi, daha önce ince plaklar için elde edilen (2.74) diferansiyel denklemi, Denklem (3.5) gibi olur.

$$D\nabla^4 w_{hd}(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w_{hd}(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Buradaki $w_{hd}(x, y, t)$, sönüm mesnetli homojen plağın düşey sehimlerini ifade eden yer değiştirme fonksiyonudur ve aynı zamanda (3.5) diferansiyel denklemini sağladığı kabul edilen çözüm fonksiyonudur.

Plağın $x = 0, x = a$ kenarları boyunca doğrusal yaylar V_x kesme kuvveti, burulma yayları ise M_x eğilme momentleri oluşturur. Dolayısıyla, Şekil 3.3'deki plak modeli için, elastik ve sönüm destekli genel sınır şartları aşağıdaki gibi yazılır.

$x = 0$ Kenarı boyunca;

$$k_0 w_{hd}(x, y, t) + c_0 \frac{\partial w_{hd}(x, y, t)}{\partial t} = V_x \quad (3.6)$$

$$K_0 \frac{\partial w_{hd}(x, y, t)}{\partial x} = -M_x \quad (3.7)$$

$x = a$ Kenarı boyunca;

$$k_1 w_{hd}(x, y, t) + c_1 \frac{\partial w_{hd}(x, y, t)}{\partial t} = -V_x \quad (3.8)$$

$$K_1 \frac{\partial w_{hd}(x, y, t)}{\partial x} = M_x \quad (3.9)$$

Buradaki M_x ve V_x , daha önce elde edilmişti. Mevcut $w_{hd}(x, y, t)$ çözüm fonksiyonu için M_x ve V_x aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w_{hd}(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{hd}(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (3.10)$$

$$V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w_{hd}(x, y, t)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_{hd}(x, y, t)}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (3.11)$$

3.5. Sınır Şartlarına Bağlı Çözüm Fonksiyonunun Elde Edilmesi

Plak diferansiyel denklemi sağladığı kabul edilen $w_{hd}(x, y, t)$ çözüm fonksiyonu (3.12)'deki gibi verilmiş olsun. Bu fonksiyondaki $W_{hd}(x, y)$, plağın x ve y koordinatlarına bağlı bir fonksiyondur.

$$w_{hd}(x, y, t) = W_{hd}(x, y)Be^{\lambda t} \quad (3.12)$$

Plak diferansiyel denklemi (3.5) ve plağın sınır şartlarını ifade eden (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemlerinin çözümü, Fourier serileri formunda aranmıştır.

Periyodu $2a$ olan, n türetimli (türevli) sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyon $(n - 1)$ türetiminde sürekli, n türetiminde ise, belirli noktalarda türevi olmadığı için süreksizdir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $[0, a]$ aralığında sürekli ve $f(0)$ ve $f(a)$ her ikisi de sifıra eşitse, Fourier sinüs serisi $2a$ periyodunda sürekli bir fonksiyondur ve x eksenini boyunca her yerde yakınsar. Ancak, $f(0)$ ve/veya $f(a)$ sifıra eşit olmadığı zaman, Fourier sinüs serisi $x = 0$ 'da ve/veya $x = a$ 'da hala sifıra yakınsayabilir. Böyle bir durumda Fourier serileri kısmen sürekli bir fonksiyon özelliği sunar. Bu yüzden Fourier serilerinin yakınsaması bazı durumlarda sorgulanabilir hale gelmekte ve süreksizlik problemleri ortaya çıkabilmektedir [51].

Bu tür süreksizlik problemlerinin aşılabilmesi için Li [81], Fourier serisi ile yardımcı bir polinomun süper pozisyonundan oluşan bir çözüm fonksiyonunu, kirişlerin titreşim analizi için uygulayarak kullanılabilirliğini gösterdi. Daha sonra Zhou [82], bu çalışmasından dolayı Li'yi takdir etti, ancak bazı tartışmaya açık önemli noktalar olduğunu belirterek, farklı çözüm önerilerinde ve yorumlarda bulundu. Bunun üzerine Li, Zhou'nun takıldığı önemli noktaları daha açık bir şekilde izah etti [83].

Li ve Daniels, Şekil 3.1'deki gibi elastik destekli plak çözümleri için, yardımcı bir polinom ve sinüslü terimler içeren bir Fourier serisi kombinasyonu yaklaşımını, Denklem (3.13)'deki gibi vermişlerdir [51].

$$W_{hd}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m (\sin \lambda_{am} x + p(x)) \sin \lambda_{bn} y \quad (3.13)$$

Burada λ_{am} ve λ_{bn} alttaki gibi tanımlanmıştır.

$$\lambda_{am} = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_{bn} = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.14)$$

Bu polinomsal çözüm fonksiyonu yaklaşımının, bu çalışmada kullanılan Şekil 3.3'deki plak modelinin ve bu modele ait (3.5) diferansiyel denkleminin çözümü için de kullanılabilceği aşıkardır. Buna göre, (3.13) çözüm fonksiyonu, Denklem (3.12)'deki, $w_{hd}(x, y, t)$ çözüm fonksiyonuyla birlikte aşağıdaki hali alır.

$$w_{hd}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m (\sin \lambda_{am} x + p(x)) \sin \lambda_{bn} y) B e^{\lambda t} \quad (3.15)$$

Plağın $x = 0, x = a$ kenarları için muhtemel süreksizlik problemleri, Denklem (3.13) sinüs seri açılımının yer değiştirme (türevsiz hali) ve ikinci türevlerinde ortaya çıkar. Çünkü sinüslü terimler $x = 0, a$ için sıfır değerini alır.

Eğer (3.13) Fourier serisi, kosinüslü terimler cinsinden ifade edilseydi, o zaman birinci ve üçüncü türevlerinde süreksizlik problemi muhtemel olurdu. Kosinüs seri açılımlı Fourier seri çözümlerini, Li ayrıca detaylı olarak çalışmıştır [81,84]. Ayrıca Wang ve arkadaşı Qiao'da, kiriş titreşimlerinde süreksizlik problemleriyle ilgili detaylı bir çalışma yapmışlardır [85]. Daha detaylı bilgi için belirtilen kaynaklara bakılabilir.

Plağın sınır şartlarına uygun olarak seçilebilecek en düşük dereceden $p(x)$ polinomu aşağıdaki gibidir.

$$p(x) = \frac{\alpha_0(a-x)}{a} + \frac{\alpha_1 x}{a} - \frac{\beta_0(2a^2 x - 3ax^2 + x^3)}{6a} + \frac{\beta_1(x^3 - a^2 x)}{6a} \quad (3.16)$$

Polinom (3.16), aşağıdaki (3.17) şeklinde vektörel formda yazılabilir.

$$p(x) = \zeta(x)^T \bar{\alpha}_d \quad (3.17)$$

$$\zeta(x) = \left\{ \frac{(a-x)}{a} \quad \frac{x}{a} \quad -\frac{(2a^2x - 3ax^2 + x^3)}{6a} \quad \frac{(x^3 - a^2x)}{6a} \right\}^T \quad (3.18)$$

$$\bar{\alpha}_d = \{\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \beta_0 \quad \beta_1\}^T \quad (3.19)$$

Denklem (3.13) çözüm fonksiyonu ve ikinci türevinin, $x = 0$ ve $x = a$ için sınır şartlarını sağladığı aşağıda görülmektedir.

$$W_{hd}(0, y) = \alpha_0 \sin \lambda_{bn} y \quad (3.20)$$

$$W_{hd}(a, y) = \alpha_1 \sin \lambda_{bn} y \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} W_{hd}(0, y) = \beta_0 \sin \lambda_{bn} y \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} W_{hd}(a, y) = \beta_1 \sin \lambda_{bn} y \quad (3.23)$$

Denklem (3.15) çözüm fonksiyonu ve (3.16) polinomunun, (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) sınır şartı denklemleriyle birlikte düzenlenmesiyle, sınır şartlarına bağlı özel bir çözüm fonksiyonu, aşağıdaki adımlar takip edilerek bulunur.

$$w_{hd}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left(\sin \lambda_{am} x + \frac{\alpha_0(a-x)}{a} + \frac{\alpha_1 x}{a} - \frac{\beta_0(2a^2x - 3ax^2 + x^3)}{6a} + \frac{\beta_1(x^3 - a^2x)}{6a} \right) \sin \lambda_{bn} y B e^{\lambda t} \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{k_0}{D} + \lambda \frac{c_0}{D} \right) \alpha_0 = - \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{am}^3 A_m - \frac{\beta_0}{a} + \frac{\beta_1}{a} \right. \quad (3.25)$$

$$\left. - (2 - \nu) \lambda_{bn}^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{am} A_m - \frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_1}{a} - \frac{\beta_0 a}{3} - \frac{\beta_1 a}{6} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_1}{D} + \lambda \frac{c_1}{D}\right) \alpha_1 = & \left\{ - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \lambda_{am}^3 A_m - \frac{\beta_0}{a} + \frac{\beta_1}{a} \right. \\ & \left. - (2 - \nu) \lambda_{bn}^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \lambda_{am} A_m - \frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\beta_0 a}{6} + \frac{\beta_1 a}{3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\frac{K_0}{D} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{am} A_m - \frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_1}{a} - \frac{\beta_0 a}{3} - \frac{\beta_1 a}{6} \right) = \beta_0 - \nu \lambda_{bn}^2 \alpha_0 \quad (3.27)$$

$$\frac{K_1}{D} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \lambda_{am} A_m - \frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\beta_0 a}{6} + \frac{\beta_1 a}{3} \right) = -\beta_1 + \nu \lambda_{bn}^2 \alpha_1 \quad (3.28)$$

Yukarıdaki (3.25), (3.26), (3.27) ve (3.28) denklemlerinden, $p(x)$ polinomunun (3.19) $\bar{\alpha}_d$ katsayılar denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{\alpha}_d = \sum_{m=1}^{\infty} H_{dn}^{-1} Q_m^n A_m \quad (3.29)$$

Buradaki H_{dn} ve Q_m^n aşağıdaki gibidir.

$$H_{dn} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{k_0 + \lambda c_0}{D} + \frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2}{a} & -\frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2}{a} & \frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2 a}{3} - \frac{1}{a} & \frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2 a}{6} + \frac{1}{a} \\ -\frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2}{a} & \frac{k_1 + \lambda c_1}{D} + \frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2}{a} & \frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2 a}{6} + \frac{1}{a} & \frac{(2 - \nu) \lambda_{bn}^2 a}{3} - \frac{1}{a} \\ \frac{K_0}{Da} - \nu \lambda_{bn}^2 & -\frac{K_0}{Da} & \frac{K_0 a}{3D} + 1 & \frac{K_0 a}{6D} \\ -\frac{K_1}{Da} & \frac{K_1}{Da} - \nu \lambda_{bn}^2 & \frac{K_1 a}{6D} & \frac{K_1 a}{3D} + 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$Q_m^n =$$

$$\left\{ \lambda_{am}^3 + (2 - \nu) \lambda_{bn}^2 \lambda_{am} \quad (-1)^{m+1} [\lambda_{am}^3 + (2 - \nu) \lambda_{bn}^2 \lambda_{am}] \quad \frac{K_0}{D} \lambda_{am} \quad (-1)^{m+1} \frac{K_1}{D} \lambda_{am} \right\}^T \quad (3.31)$$

Denklem (3.29) Denklem (3.17)'te, Denklem (3.17) ise Denklem (3.15)'te yerlerine konularak düzenlenirse, yeni hali aşağıdaki gibi olur.

$$w_{hd}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m (\sin \lambda_{am} x + \zeta(x)^T H_{dn}^{-1} Q_m^n) \sin \lambda_{bn} y B e^{\lambda t} \quad (3.32)$$

Bu denklem, y boyutunu içerecek şekilde de düzenlenecek olursa aşağıdaki hali alır.

$$w_{hd}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (\sin \lambda_{am} x + \zeta(x)^T H_{dn}^{-1} Q_m^n) \sin \lambda_{bn} y B e^{\lambda t} \quad (3.33)$$

Bu fonksiyon $x = 0, x = a$ kenarlarından elastik ve sönüm destekli Şekil 3.3'teki plağın her bir x, y noktasındaki yer değişimini ifade eden elastik yüzey denklemdir ve aynı zamanda bu plağın diferansiyel denkleminin çözüm fonksiyonudur. Bu denklem, plağın kenarlarındaki elastik yay ve sönüm katsayılarına bağlı ve farklı sınır şartlarını da içinde barındıran zamana bağlı bir denklemdir. Çözüm fonksiyonu içerisindeki H_{dn}^{-1} matrisi, (3.30) denkleminde görüldüğü gibi, sönüm ve yay katsayılarını da içermektedir.

3.6. Elastik ve Sönüm Mesnetli Plağın Galerkin Yöntemiyle Çözümü

Denklem (3.33) çözüm fonksiyonu, Denklem (3.12)'deki gibi tekrar yazılır.

$$w_{hd}(x, y, t) = W_{hd}(x, y) B e^{\lambda t} \quad (3.34)$$

Buradaki $W_{hd}(x, y)$ aşağıdaki gibidir.

$$W_{hd}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (\sin \lambda_{am} x + \zeta(x)^T H_{dn}^{-1} Q_m^n) \sin \lambda_{bn} y \quad (3.35)$$

Bu (3.35) denklemini aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$W_{hd}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \phi_{hd}(x, y) \quad (3.36)$$

$$\phi_{hd}(x, y) = (\sin \lambda_{am} x + \zeta(x)^T H_{dn}^{-1} Q_m^n) \sin \lambda_{bn} y \quad (3.37)$$

Bu $\phi_{hd}(x, y)$ fonksiyonu, işlem adımlarını görebilmek amacıyla aşağıdaki gibide düzenlenebilir.

$$\Phi_{hd}(x, y) = \left(\sin \lambda_{am'} x + \zeta(x)^T H_{dn'}^{-1} Q_{m'}^{n'} \right) \sin \lambda_{bn'} y \quad m', n' = 1, 2, 3, \dots \quad (3.38)$$

Şekil 3.3'deki sınır sönümlü plağın eğilme titreşimlerine ait diferansiyel denklem, Denklem (3.5)'deki gibi elde edilmişti. Bu diferansiyel denklemde, (3.34) çözüm fonksiyonu türevleriyle birlikte yerlerine yazılıp düzenlenirse,

$$D\nabla^4 W_{hd}(x, y) B e^{\lambda t} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} W_{hd}(x, y) B e^{\lambda t} = 0 \quad (3.39)$$

$$D\nabla^4 W_{hd}(x, y) + \rho h \lambda^2 W_{hd}(x, y) = 0 \quad (3.40)$$

Şeklinde x ve y 'ye bağlı, zamandan bağımsız bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklem, diferansiyel operatör şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathcal{L}(W_{hd}(x, y)) = D\nabla^4 W_{hd}(x, y) + \rho h \lambda^2 W_{hd}(x, y) \quad (3.41)$$

Buna göre sınır sönümlü mevcut plak elemanının diferansiyel denklemiyle, virtüel yer değiştirmesinin çarpımından oluşan virtüel iş ifadesi, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{L}(W_{hd}(x, y)) \delta(W_{hd}(x, y)) = 0 \quad (3.42)$$

Bu denklem tüm plak için aşağıdaki gibi olur.

$$\int_0^a \int_0^b \mathcal{L}(W_{hd}(x, y)) \delta(W_{hd}(x, y)) dy dx = 0 \quad (3.43)$$

$W_{hd}(x, y)$ yer değiştirme fonksiyonunun varyasyon ifadesi $\delta(W_{hd}(x, y))$, aşağıdaki gibi yerine yazılarak düzenlenir.

$$\int_0^a \int_0^b \mathcal{L}(W_{hd}(x, y)) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{hd}(x, y) \delta A_{mn} dy dx = 0 \quad (3.44)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta A_{mn} \int_0^a \int_0^b \mathcal{L}(W_{hd}(x, y)) \Phi_{hd}(x, y) dy dx = 0 \quad (3.45)$$

Buradaki δA_{mn} keyfidir ve sıfır değildir. Dolayısıyla, denklemin geri kalan kısmının aşağıda görüldüğü gibi sıfır olması gerekir.

$$\int_0^a \int_0^b \mathcal{L}(W_{hd}(x, y)) \Phi_{hd}(x, y) dy dx = 0 \quad (3.46)$$

Bu denklem açılır ve düzenlenirse aşağıdaki hale gelir.

$$\int_0^a \int_0^b [D \nabla^4 W_{hd}(x, y) + \rho h \lambda^2 W_{hd}(x, y)] \Phi_{hd}(x, y) dy dx = 0 \quad (3.47)$$

Bu (3.47) denklemi, birçok ara işlemler ve basitleştirmelerden sonra, en son aşağıdaki hale gelir.

$$\left\{ D \begin{pmatrix} \lambda_{am}^4 (\delta_{mm'} + S_{dmm'}^{n'}) \\ + \lambda_{bn}^2 \left(\lambda_{am}^2 (\delta_{mm'} + S_{dmm'}^{n'}) \right. \\ \left. - \hat{S}_{am'm}^n - \hat{Z}_{dmn, m'n'} \right) \\ + \lambda_{bn}^4 (\delta_{mm'} + S_{dmm'}^{n'} + S_{am'm}^n + Z_{dmn, m'n'}) \\ \left. + \lambda^2 \rho h (\delta_{mm'} + S_{dmm'}^{n'} + S_{am'm}^n + Z_{dmn, m'n'}) \right\} A_{mn} = 0 \quad (3.48)$$

Denklem (3.48)'deki bazı parametreler aşağıda verilmiştir.

$$\int_0^a \sin \lambda_{am} x \sin \lambda_{am'} x dx = \delta_{mm'} \frac{a}{2}, \quad \int_0^b \sin \lambda_{bn} y \sin \lambda_{bn'} y dy = \delta_{nn'} \frac{b}{2} \quad (3.49)$$

$$\delta_{mm'}, \delta_{nn'}: \text{Kronecker Delta} \begin{cases} 1, & m = m', & n = n' \\ 0, & m \neq m', & n \neq n' \end{cases} \quad (3.50)$$

$$P_m = \frac{2}{a} \int_0^a \zeta(x) \sin \lambda_{am} x dx = \frac{2}{a} \left\{ \frac{1}{\lambda_{am}}, \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_{am}}, \frac{-1}{\lambda_{am}^3}, \frac{(-1)^m}{\lambda_{am}^3} \right\}^T \quad (3.51)$$

$$P_{m'} = \frac{2}{a} \int_0^a \zeta(x) \sin \lambda_{am'} x dx = \frac{2}{a} \left\{ \frac{1}{\lambda_{am'}}, \frac{(-1)^{m'+1}}{\lambda_{am'}}, \frac{-1}{\lambda_{am'}^3}, \frac{(-1)^{m'}}{\lambda_{am'}^3} \right\}^T \quad (3.52)$$

$$\hat{P}_m = \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta(x) \right) \sin \lambda_{am} x dx = \frac{2}{a} \left\{ 0, 0, \frac{1}{\lambda_{am}}, \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_{am}} \right\}^T \quad (3.53)$$

$$\hat{P}_{m'} = \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta(x) \right) \sin \lambda_{am'} x dx = \frac{2}{a} \left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\lambda_{am'}} \quad \frac{(-1)^{m'+1}}{\lambda_{am'}} \right\}^T \quad (3.54)$$

$$S_{dmm'}^{n'} = P_m^T H_{dn'}^{-1} Q_{m'}^{n'}, \quad S_{dm'm}^n = P_m^T H_{dn}^{-1} Q_m^n, \quad \hat{S}_{dm'm}^n = \hat{P}_m^T H_{dn}^{-1} Q_m^n \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{2}{a} \int_0^a \zeta(x) \zeta(x)^T dx \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2a^2/45 & -7a^2/180 \\ 1/3 & 2/3 & -7a^2/180 & -2a^2/45 \\ -2a^2/45 & -7a^2/180 & 4a^4/945 & 31a^4/7560 \\ -7a^2/180 & -2a^2/45 & 31a^4/7560 & 4a^4/945 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{2}{a} \int_0^a \zeta(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta(x) \right)^T dx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2a^2/45 & -7a^2/180 \\ 0 & 0 & -7a^2/180 & -2a^2/45 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$Z_{dmn,m'n'} = (H_{dn}^{-1} Q_m^n)^T \mathbf{E} (H_{dn'}^{-1} Q_{m'}^{n'}) \quad \hat{Z}_{dmn,m'n'} = (H_{dn}^{-1} Q_m^n)^T \hat{\mathbf{E}} (H_{dn'}^{-1} Q_{m'}^{n'}) \quad (3.58)$$

Denklem (3.48) için, aşağıdaki basitleştirmeler yapılır ve düzenlenirse Denklem (3.62) elde edilir.

$$\delta S = \delta_{mm'} + S_{dmm'}^{n'} \quad (3.59)$$

$$SZ = S_{dm'm}^n + Z_{dmn,m'n'} \quad (3.60)$$

$$\widehat{SZ} = \hat{S}_{dm'm}^n + \hat{Z}_{dmn,m'n'} \quad (3.61)$$

$$\left\{ D \begin{pmatrix} \lambda_{am}^4 (\delta S) \\ + \lambda_{bn}^2 \begin{pmatrix} \lambda_{am}^2 (\delta S) \\ - \widehat{SZ} \end{pmatrix} \\ + \lambda_{bn}^4 (\delta S + SZ) \\ + \lambda^2 \rho h (\delta S + SZ) \end{pmatrix} \right\} A_{mn} = 0 \quad (3.62)$$

Denklem (3.62) içinde aşağıdaki düzenlemeler yapılır.

$$\mathbf{K} = D \begin{pmatrix} \lambda_{am}^4(\delta S) \\ +\lambda_{bn}^2 \begin{pmatrix} \lambda_{am}^2(\delta S) \\ -\widehat{SZ} \end{pmatrix} \\ +\lambda_{bn}^4(\delta S + SZ) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{M} = \rho h(\delta S + SZ) \quad (3.64)$$

Buradan Denklem (3.65)'e ulaşılır.

$$[\mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M}]\{A_{mn}\} = 0 \quad (3.65)$$

Bu Denklem (3.65) aslında bir özdeğer-özvektör problemini ifade etmektedir. Bu denklemdeki \mathbf{K} , rijitlik matrisine eşdeğer bir matrisi ifade etmektedir. Ancak, sınır şartları sönüm katsayılarını da içerdiği için \mathbf{K} matrisi, plak kenarlarındaki sönüm elemanı parametrelerini de kapsamaktadır. Dolayısıyla tam olarak rijitlik matrisi olarak ifade etmek yerine, eşdeğer rijitlik matrisi olarak isimlendirmek daha doğru bir yaklaşımdır. \mathbf{M} matrisi ise, eşdeğer kütle matrisi olarak ifade edilir. A_{mn} ise, özvektörler olup Fourier katsayılarını ifade eden sabitlerden oluşmaktadır.

Denklem (3.65)'in sonucunun sıfır olması, A_{mn} dışında kalan parametrelerin, Denklem (3.66)'da görüldüğü gibi sıfıra eşit olmasını gerektirir.

$$[\mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (3.66)$$

Yapılan işlemler esnasında, sınır sönümsüz plak modeli için (Bkz. Şekil 3.2) Denklem (3.66)'nın sol tarafının, $m \times n$ boyutunda simetrik bir matris olduğu ve bu simetrik matrisin öz değerlerinin de, sanal bir sayı olduğu görülmüştür.

Sınır sönümlü bir plak modeli için (Bkz. Şekil 3.3), Denklem (3.66)'nın sol tarafının bazı durumlarda $m \times n$ boyutunda, λ terimleri içeren diyagonal bir matris olarak elde edildiği görülmüştür. Diyagonal bir matris durumunda, (3.65) denklemi aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \lambda \dots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \lambda \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \{A_{mn}\} = 0 \quad (3.67)$$

$$[\lambda]\{A_{mn}\} = 0 \quad (3.68)$$

Buradaki $[\lambda]$, yukarıda belirtildiği gibi $(m \times n)$ boyutunda diyagonal bir matris olup, özdeğerler matrisini ifade etmektedir. $\{A_{mn}\}$ ise özvektörleri ifade eden sütun vektörleridir. Burada $[\lambda]$ matrisinin diyagonal bir matris olması, $\{A_{mn}\}$ özvektörlerinin, hesaplamaya gerek olmaksızın birim vektör olduğunu gösterir. Buradan da, (3.68) denkleminin aşağıdaki gibi yazılabileceği açıktır.

$$[\lambda] = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

Bu denklemdaki $[\lambda]$ matrisinin diyagonal bir matris olması, determinantının bir polinom olmasını gerektirir. Dolayısıyla, (3.69) denkleminin çözümü, $[\lambda]$ matrisinin determinantından ortaya çıkan polinomun köklerinin bulunmasından ibarettir. Elde edilen bu λ_i kökleri, kendi içerisinde sistemin doğal frekanslarını da kapsamaktadır. Başka bir ifadeyle, kenarlarında sönüm elemanı olmayan bir plak sistemi için elde edilen λ_i kökleri, o sistemin doğal frekansının j sanal sayısı kadar katı ($j\omega$) çıkmaktadır. Kenarlarında sönüm elemanı olan sönümlü bir plak için λ_i kökleri, karmaşık ve eşlenik bir sayı çıkmaktadır. Sönüm elemanı olduğu içinde, negatif bir karmaşık sayı çıkmasını gerektirmektedir.

3.7. Sönüm Mesnetli Plakın Serbest Titreşimleri İçin Genel Çözüm

Elde edilen λ köklerinin doğruluğu, Fourier serisi şeklindeki Denklem (3.70) çözüm fonksiyonunun (m, n) terim sayısına bağlıdır. Bu (m, n) terim sayısı, yeterli (M, N) sayısında alınırsa, çözümler çok daha yaklaşık olacaktır.

$$w_{hd}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (\sin \lambda_{am} x + \zeta(x)^T H_{dn}^{-1} Q_m^n) \sin \lambda_{bn} y B e^{\lambda t} \quad (3.70)$$

Bu çözüm fonksiyonu, aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$w_{hd}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \phi_{hd}(x, y) B e^{\lambda t} \quad (3.71)$$

Denklem (3.66) ortogonal ve (3.69) polinomsal köşegen matrisinin çözümünden, farklı sınır şartı parametrelerine göre, değişik sayılarda λ_i kökleri elde edilebilmektedir.

Sönümsüz bir sistem için, Denklem (3.72)'deki gibi sanal λ_i kökleri elde edilmektedir. Buradan da o sisteme ait doğal frekanslar (f) ve Denklem (3.73) vasıtasıyla da frekans parametreleri (Ω) elde edilebilmektedir.

$$\lambda_i = j\omega_i, \quad f_i = \omega_i/2\pi \quad (3.72)$$

$$\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h/D} \quad (3.73)$$

Sönümsüz bir plak sisteminin çözümünden elde edilen λ_i köklerine ait özvektörleri ifade eden ilgili A_{mn} Fourier katsayıları Denklem (3.35)'de yerlerine konularak düzenlenir ve normalize edilirse, ilgili biçimleri de elde edilmiş olur.

Sönümlü bir plak modeli için λ_i kökleri karmaşık, reel, hepsi birbirinden farklı, bazıları eşit bazıları farklı vb. gibi çok farklı şekillerde elde edilebilmektedir. Ancak, burada önemli olan nokta, elde edilen tüm λ_i değerlerinin negatif olarak elde edilmesidir. Bilindiği gibi sistemin enerji denkleminin zamana göre birinci türevi negatif ise, sistemde sönüm meydana gelmektedir [63]. Bu çalışmada da enerji denkleminin benzer olarak, (3.71) çözüm fonksiyonu mevcuttur. Aynı teoremin bu çözüm fonksiyonu içinde geçerli olacağı açıktır. Dolayısıyla, λ_i köklerinin negatif çıkması, elastik ve sönüm destekli plak sisteminin enerjisinin, zamanla sifıra ulaşacağını ve plağın titreşimlerinin yok olacağını açık şekilde göstermektedir.

Elde edilen birbirinden farklı iki λ_i köküyle birlikte, (3.71) çözüm fonksiyonu aşağıdaki hali alır.

$$w_{hd}(x, y, t) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{hd}(x, y, \lambda_1) \right) B_1 e^{\lambda_1 t} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{hd}(x, y, \lambda_2) \right) B_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.74)$$

Yukarıda, $C_1 = A_{mn}B_1$ ve $C_2 = A_{mn}B_2$ düzenlemesi yapılırsa, (3.74) denklemi aşağıdaki hale gelir.

$$w_{hd}(x, y, t) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_1) \right) C_1 e^{\lambda_1 t} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_2) \right) C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.75)$$

Yukarıdaki λ_i kökleri $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ şeklinde karmaşık sayılardan oluşuyorsa, Denklem (3.75) aşağıdaki gibi olur.

$$w_{hd}(x, y, t) = e^{\alpha t} (\Theta \cos \beta t + \Psi \sin \beta t) \quad (3.76)$$

Buradaki Θ ve Ψ aşağıda verilmiştir.

$$\Theta = C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_1) + C_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_2) \quad (3.77)$$

$$\Psi = iC_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_1) - iC_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_2) \quad (3.78)$$

Birbirine eşit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reel iki kökü için $w_{hd}(x, y, t)$ aşağıdaki gibi olur.

$$w_{hd}(x, y, t) = e^{\lambda t} \left[C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda) + C_2 t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda) \right] \quad (3.79)$$

Bu denklemde bilinmeyen C_1 ve C_2 katsayılarının bulunabilmesi, başlangıç şartlarına bağlıdır. Gerçekte iki farklı λ_i kökü mevcut olduğunda, C_1 ve C_2 katsayılarının bulunması için sadece yer değiştirme başlangıç şartı yeterli gelmektedir. Ancak, daha fazla kök sayıları için tek başlangıç şartı yeterli olmayabileceği görülmüştür. Burada, $t = 0$ zamanı için verilen yer değiştirme ve hız başlangıç şartı aşağıdaki gibidir.

$$w_{hd}(x, y, 0) = w_{hd0}(x, y) \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} w_{hd}(x, y, 0) = \dot{w}_{hd0}(x, y) \quad (3.81)$$

Bu (3.80) ve (3.81) başlangıç şartları, (3.75) denklemine yerlerine konularak düzenlenirse, (3.82) ve (3.83) denklemlerine ulaşılır.

$$w_{hd0}(x, y) = C_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_1) \right) + C_2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_2) \right) \quad (3.82)$$

$$\dot{w}_{hd0}(x, y) = \lambda_1 C_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_1) \right) + \lambda_2 C_2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{hd}(x, y, \lambda_2) \right) \quad (3.83)$$

Denklem (3.82)'deki $w_{hd0}(x, y)$ yer değiştirme fonksiyonu ve Denklem (3.83)'deki $\dot{w}_{hd0}(x, y)$ hız fonksiyonu, Fourier serisine açılırsa C_1 ve C_2 bilinmeyen katsayıları elde edilir [13]. Bunun için, Denklem (3.82)'nin her iki tarafı $\phi_{hd}(x, y, \lambda_1)$ ile ve Denklem (3.83)'ün her iki tarafı $\phi_{hd}(x, y, \lambda_2)$ ile çarpılarak, plak alanı boyunca integre edilirse aşağıdaki iki lineer denklem sistemine ulaşılır.

$$\begin{aligned} C_1(1 + 2S_{\lambda_1} + Z_{\lambda_1}) + C_2(1 + S_{\lambda_1} + S_{\lambda_2} + Z_{\lambda_1, \lambda_2}) \\ = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w_{hd0}(x, y) \phi_{hd}(x, y, \lambda_1) dy dx \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 C_1(1 + S_{\lambda_2} + S_{\lambda_1} + Z_{\lambda_1, \lambda_2}) + \lambda_2 C_2(1 + 2S_{\lambda_2} + Z_{\lambda_2}) \\ = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \dot{w}_{hd0}(x, y) \phi_{hd}(x, y, \lambda_2) dy dx \end{aligned} \quad (3.85)$$

Yukarıdaki (3.84) ve (3.85) lineer denklem sisteminin çözümleriyle C_1 ve C_2 bilinmeyen katsayıları elde edilmiş olur. Ayrıca bu denklemlerdeki daha önce verilmeyenler aşağıda verilmiştir.

$$S_{\lambda_1} = P_m^T H_{dn\lambda_1}^{-1} Q_m^n, \quad S_{\lambda_2} = P_m^T H_{dn\lambda_2}^{-1} Q_m^n \quad (3.86)$$

$$Z_{\lambda_1} = H_{dn\lambda_1}^{-1} Q_m^n \Xi H_{dn\lambda_1}^{-1} Q_m^n \quad Z_{\lambda_2} = H_{dn\lambda_2}^{-1} Q_m^n \Xi H_{dn\lambda_2}^{-1} Q_m^n \quad (3.87)$$

$$Z_{\lambda_1, \lambda_2} = H_{dn\lambda_1}^{-1} Q_m^n \Xi H_{dn\lambda_2}^{-1} Q_m^n \quad (3.88)$$

Böylece bulunan C_1 ve C_2 katsayıları (3.74), (3.75), (3.76), (3.79) denklemlerinde yerlerine konulursa, Şekil 3.3'teki karşılıklı kenarlarından elastik ve sönüm destekli ince plağın serbest titreşimi elde edilmiş olur. Bu sonuçlara göre sınır sönümlü plağın çözümleri için, en genel hal Denklem (3.89)'daki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
w_{hd}(x, y, t) = & B_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{hd}(x, y, \lambda_1) \right) e^{\lambda_1 t} \\
& + B_2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{hd}(x, y, \lambda_2) \right) e^{\lambda_2 t} \\
& \vdots \\
& + B_{r-1} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{hd}(x, y, \lambda_{(r-1)}) \right) e^{\lambda_{(r-1)} t} \\
& + B_r \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{hd}(x, y, \lambda_r) \right) e^{\lambda_r t}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Bazı durumlarda, plağın serbest titreşim çözümleri, aşağıdaki gibi karmaşık sayı olarak elde edilmektedir.

$$\vec{W} = \alpha + \beta j \tag{3.90}$$

Bu denklemin aşağıdaki şekilde de ifade edilebileceği bilinmektedir.

$$w_{hd}(x, y, t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\tan^{-1}(\beta/\alpha)) \tag{3.91}$$

Böylece plağın serbest titreşimleri reel sayılarla da ifade edilmiş olur.

3.8. Normalize İşlemi

Çözüm fonksiyonunun öklid uzunluğu l_2 normunda Denklem (3.92)'deki gibi yazılabilir. Eğer Denklem (3.92), çözüm fonksiyonuna oranlanırsa, normalize edilmiş değerler, Denklem (3.93)'den elde edilmiş olacaktır.

$$\|W_{hd}(x, y)\|_2 = \sqrt{\int_0^a \int_0^b [W_{hd}(x, y)]^2 dx dy} \tag{3.92}$$

$$W_{hd_nor}(x, y) = \frac{W_{hd}(x, y)}{\|W_{hd}(x, y)\|} \tag{3.93}$$

BÖLÜM 4. SAYISAL ÇÖZÜMLER

4.1. Giriş

Yapılan tüm hesap ve işlemlerde, aynı değerlere sahip axb boyutunda, Tablo 4.1’de verilen değerlere sahip bir kare plak kullanılmıştır (Tablo 4.1). Plagın $y=0$, $y=b$ kenarları tüm hesaplarda basit mesnetlidir. Diğer kenarlar boyunca doğrusal, burulma yayları ve sönüm elemanları yerleştirilmiştir. Plaga her hangi bir dış kuvvet uygulanmamıştır. Doğrusal yay katsayılarının birimleri N/m^2 , burulma yay katsayılarının birimleri, $Nm/rad.m$ [10] ve sönüm katsayılarının birimleri Ns/m^2 alınmıştır. Daha sonraki kısımlarda burulma yay katsayısı birimi, kısaltma göz önünde bulundurularak N olarak kullanılmıştır.

Tablo 4.1 Hesaplamalarda kullanılan plak değerleri

ρ [kg/m^3]	E [N/m^2]	ν	h [m]	$a=b$ [m]
2700	$7 \cdot 10^{10}$	0.33	10^{-3}	1

Elastik yayların ve sönüm elemanlarının katsayılarına 0 ile ∞ arasında değerler verilerek, basit, serbest, ankastre, gibi sınır şartlarına yaklaşım sağlanabilir. Örneğin, tüm katsayılar sıfıra yakın çok küçük bir sayıya eşitlenirse serbest kenarlı, çok büyük bir sayıya eşitlenirse ankastre, orta büyüklükte katsayılar girilirse elastik ve sönüm mesnetli vb. gibi farklı sınır şartlarına eşdeğer bir plak elde edilmiş olur.

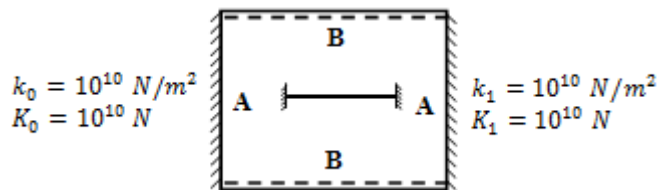
Galerkin hesaplamasının kaçınıcı parametreye kadar hesaplanacağını gösteren m ve n parametreleri, M ve N gibi belirli bir değere kadar sürdürülerek Denklem (3.65) çözülür. Galerkin metodu sonsuz terime kadar uygulandığında büyük doğrulukta çözüme yaklaşılmaktadır. Ancak, bazı durumlarda çok küçük terim sayılarında bile çok yaklaşık değerler elde edilebilmektedir. Örneğin, M ve N terimleri 5 alındığı takdirde bile, yüksek doğrulukta çözüm elde edildiği görülmüştür.

Tüm işlemlerde $a/b=1$ boyut oranı için hesaplamalar yapılmıştır. Denklem (3.65) özdeğer-özvektör problemi çözülerek plağın doğal frekansları, sönümlü kök değerleri ve A_{mn} öz vektörleri, Denklem (3.73) kullanılarak frekans parametreleri, başlangıç şartları vasıtasıyla, Denklem (3.89)'daki B katsayıları elde edilmiştir. Sönümsüz plak modeli için mod biçimleri, Denklem (3.35) ile elde edilmiştir. Sönümlü plağın serbest titreşim hareketi ise, Denklem (3.89) genel çözümüyle elde edilmektedir.

4.2. Elastik Mesnetli Sönümsüz Plak Modelinin Titreşimleri

4.2.1. Ankastre-Basit-Ankastre-Basit (ABAB) plak

Denklem (3.65) özdeğer-özvektör problemi öncelikle, $x = 0, x = a$ kenarlarından ankastre, $y = 0, y = b$ kenarlarından basit mesnetli kare plak için çözülmüştür. Mevcut elastik ve sönüm mesnetli plağı, ABAB kenar mesnetli plak haline dönüştürmek gerekmektedir. Ankastre bir kenar elde edebilmek için, $x = 0, x = a$ kenarlarındaki k_i ve K_i yaylarının rijitliklerinin çok yüksek ve sönüm katsayılarının sıfır seçilmesi gerekmektedir. Bu durumda, plak kenarlarının hem yer değiştirme hem de dönmesi engellenmiş olacağı için, eşdeğer ABAB kenar mesnetli bir plak elde edilmiş olacaktır. Buradan hareketle yay katsayıları $k_i = 10^{10} N/m^2$, $K_i = 10^{10} N$ ve sönüm katsayıları $c_i = 0 Ns/m$ seçilmiştir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 ABAB plak ve sınır parametreleri

Denklem (3.33) çözüm fonksiyonundaki m, n terim sayısı, $M = N = 5$ 'e kadar sürdürülmesiyle ve Denklem (3.73) kullanılarak elde edilen ilk 9 frekans parametresi, küçükten büyüğe doğru Tablo 4.2'de verilmiştir. Daha yüksek frekans parametrelerinin küçükten büyüğe sıralanışı ise ve Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.2 ABAB plak için ilk 9 frekans parametreleri

Çözüm	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Li*[51]	28.9514	54.7498	69.3275	94.6142	102.239	129.099			
Leissa**[10]	28.9	54.8	69.2	94.6	102.2	129.1	140.2	154.8	170.3
Chakraverty***[86]	28.950	54.873	69.327	94.703	103.71				
Low****[37]	28.97	54.77	69.40	94.71					
Bu Çalışma ($M=N=5$)	28.9514	54.7498	69.3275	94.6141	102.2393	129.0988	140.3310	154.7851	170.3963

*Tablo 1

**Tablo 4.5

***Tablo 9.3

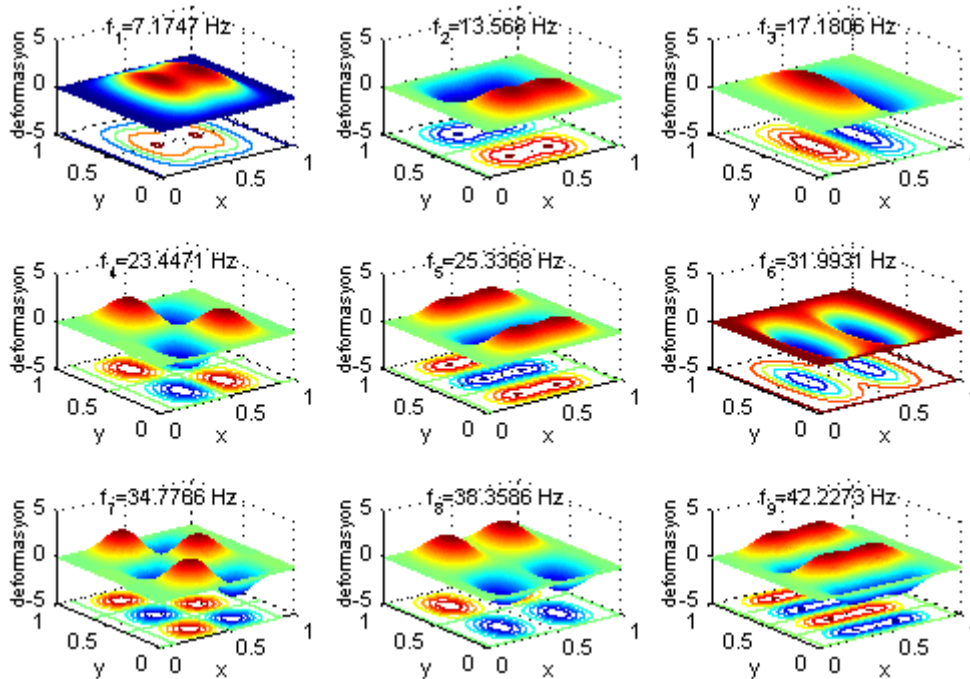
****Tablo 3

Tablo 4.3 ABAB plak için yüksek frekans parametreleri

Çözüm	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
Leissa [10]	199.9	206.6	208.6	234.5	258.5	265.2	279.5	293.8	307.4
Bu Çalışma ($M=N=5$)	199.8933	206.9853	209.1775	234.9769	258.6975	265.4425	279.7738	294.2418	308.9650

*Tablo 4.5

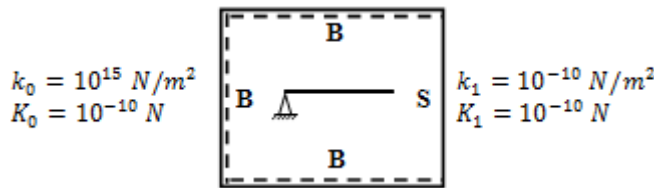
Elde edilen A_{mn} özvektörlerinin, Denklem (3.35) çözüm fonksiyonu ile birlikte mod biçimleri elde edilir. ABAB plak için, bazı mod biçimleri Şekil 4.2'de görülmektedir. Şekil 4.2 terim sayısı $M = N = 5$ alınarak elde edilmiştir. Bu şekiller, ilgili frekans parametrelerine karşılık gelen frekanslardaki, ilk 9 mod biçimini göstermektedir.



Şekil 4.2 ABAB plak için mod biçimleri

4.2.2. Basit-Basit-Serbest-Basit (BBSB) plak

Diğer örnek, $y = 0, y = b, x = 0$ kenarlarından basit destekli ve $x = a$ kenarından ise serbest olma halidir. Mevcut modelin yay ve sönüm katsayılarının, BBSB mesnet durumunu sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Plakın $x = 0$ kenarının basit mesnetli olabilmesi için, bu kenardaki doğrusal yay katsayısının sonsuz (∞) olması, ya da yayın tamamen sadece rijit bir destek gibi davranmasını sağlayacak kadar yüksek seçilmesi gerekir ($k_0 = 10^{15} N/m^2$). Basit kenar şartının oluşabilmesi için, burulma yaylarının iptal edilmesi, katsayılarının sıfıra çok yakın girilmesi gerekir ($K_0 = 10^{-10} N$). Aynı zamanda $c_0 = 0 Ns/m$ olur. Diğer $x = a$ kenarının serbest kenar olabilmesi için, bu kenardaki tüm katsayılarında $k_1 = 10^{-10} N/m^2$, $K_1 = 10^{-10} N$, $c_1 = 10^{-10} Ns/m$ alınması gerekir (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 BBSB plak ve sınır parametreleri

İki kenarından basit mesnetli, bir kenarından ankastre, diğer kenarından ise yine serbest (BBSB) plak için frekans parametreleri Tablo 4.4'te verilmiştir.

Tablo 4.4 BBSB plak için frekans parametreleri

Çözüm	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Li* (1)	11,6859	27,7971	41,2308	59,2435	62,3701	90,5177	-	-	-
Leissa** [10]	11,68	27,76	41,20	59,07	61,86	90,29	-	-	-
Leissa*** [14]	11.6845	27.7563	41.1967	59.0655	61.8606	90.2941	94.4837	108.9185	115.6857
Chakraverty**** [86]	11,684	27,757	41,220	59,360	62,461	-	-	-	-
Bu Çalışma ($M=N=5$)	11.5939	27.6491	41.0743	59.0137	62.2380	90.3261	95.2263	109.2074	118.7563
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	147.1261	152.5538	159.6860	179.1079	202.4613	205.9804	218.2195	236.3281	249.2684

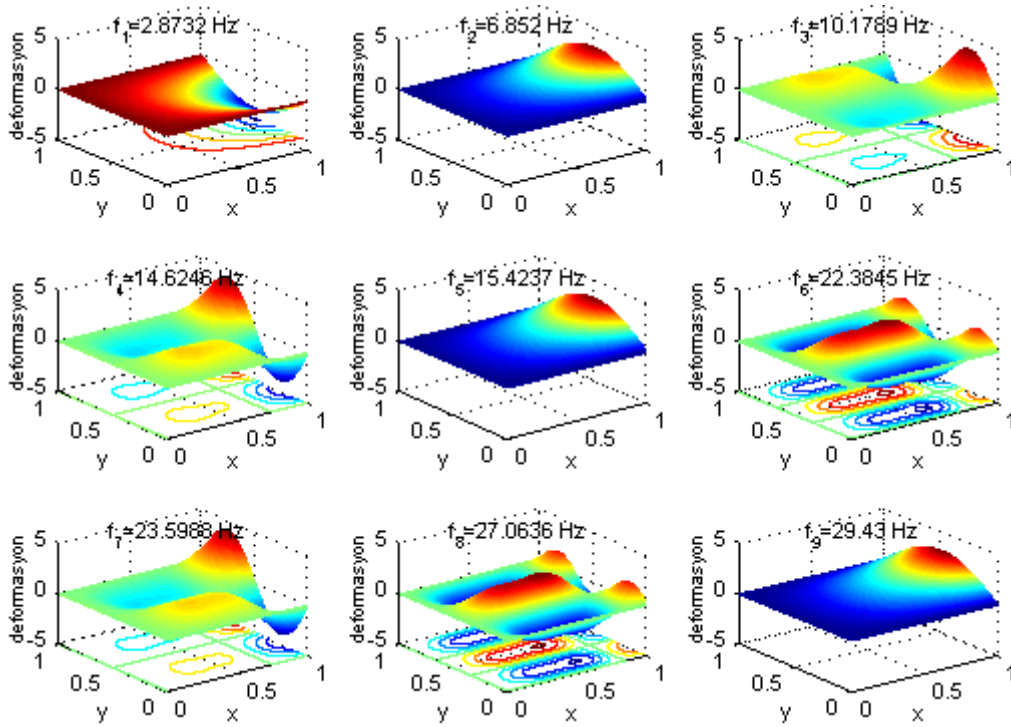
*Tablo 2

**Tablo 4.16

***Tablo A5

****Tablo 9.3

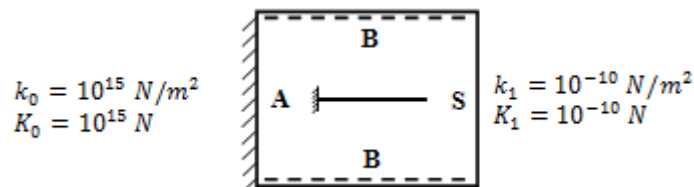
Doğal frekanslara karşılık gelen A_{mn} özvektörlerinin, yine Denklem (3.35) çözüm fonksiyonu ile birlikte kullanılmasıyla elde edilen mod biçimleri ise Şekil 4.4'te görülmektedir.



Şekil 4.4 BBSB plak için mod biçimleri

4.2.3. Ankastr-Basit-Serbest-Basit (ABSB) plak

Ankastr kenar için, plağın $x = 0$ kenarındaki yayların katsayılarının, doğrusal yer değiştirmeyi ve dönmeyi engelleyecek şekilde çok yüksek seçilmesi gerekir. Bu nedenle yay katsayıları $k_0 = 10^{15} N/m^2$, $K_0 = 10^{15} N$ alınmıştır. Diğer $x = a$ kenarının serbest olabilmesi için de, bu kenardaki tüm katsayılar sifıra yakın alınmıştır (Şekil 4.5). Yapılan hesaplamalarla elde edilen frekans parametreleri Tablo 4.5'te verilmiştir. ABSB sınır şartlı plağının mod biçimleri, BBSB plağın mod biçimlerine benzemektedir.



Şekil 4.5 ABSB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.5 ABSB plak için frekans parametreleri

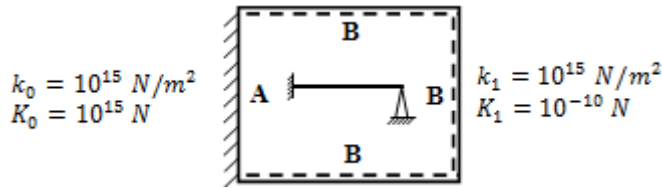
Çözüm	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Leissa * [14]	12.6874	33.0651	41.7019	63.0148	72.3976	90.6114	103.1617	111.8964	131.4287
Chakraverty ** [86]	12.687	33.067	41.714	63.260	73.870				
Bu Çalışma (M=N=5)	12.5727	32.9877	41.5605	63.0328	73.0661	90.6218	104.1733	112.3585	135.5273
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	154.4638	159.8727	167.5826	181.7537	219.3276	224.2745	232.8551	249.3822	263.6629

*Tablo A4

**Tablo 9.4

4.2.4. Ankastre-Basit-Basit-Basit (ABBB) plak

Eğer plağın $x = 0$ kenarındaki yay katsayıları $k_0 = N/m^2$, $K_0 = 10^{15} N$ gibi büyük bir değer, $x = a$ kenarındaki burulma yay katsayıları $K_1 = 10^{-10} N$ ve doğrusal yay katsayıları $k_1 = 10^{15} N/m^2$ gibi büyük bir değer alınırsa, ABBB plak elde edilecektir (Şekil 4.6). Bu plak için frekans parametreleri Tablo 4.6'de verilmiştir.



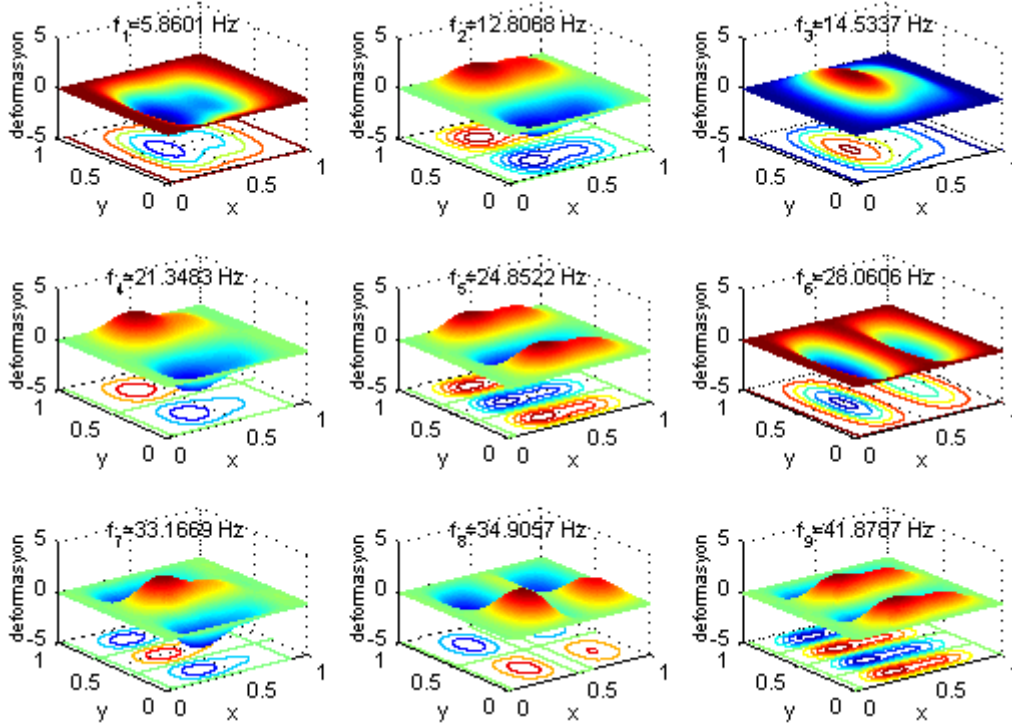
Şekil 4.6 ABBB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.6 ABBB plak için frekans parametreleri

Çözüm	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Low * [37]	23.65	51.69	58.68	86.19					
Leissa ** [14]	23.6463	51.6743	58.6464	86.1345	100.2698	113.2281	133.7910	140.8456	168.9585
Chakraverty *** [86]	23.646	51.813	58.650	86.252	101.80				
Bu Çalışma (M=N=5)	23.647	51.678	58.647	86.145	100.28	113.23	133.84	140.85	168.99
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	187,55	188,17	201,83	215,34	255,62	257,6	262,54	283,83	289,94

*Tablo 3 **Tablo A3

***Tablo 9.2

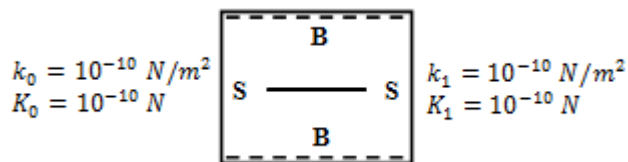


Şekil 4.7 ABBB plak için mod biçimleri

ABBB plağının ilk 9 mod şekli, doğal frekanslarıyla birlikte Şekil 4.7’de verilmiştir. Sınır şartları simetrik olmadığı için, mod şekillerinin de simetrik olmadığı görülmektedir.

4.2.5. Serbest-Basit-Serbest-Basit (SBSB) plak

Mevcut plak modelinin yay katsayılarının sıfıra yakın ayarlanmasıyla, karşılıklı iki kenarından basit mesnetli, diğer iki kenarından ise serbest kenarlı, SBSB sınır şartlı plak modeli elde edilebilir (Şekil 4.8). Bu plak modeli için elde edilen frekans parametreleri Tablo 4.7’de verilmiştir. Mod biçimleri de Şekil 4.9’da görülmektedir.



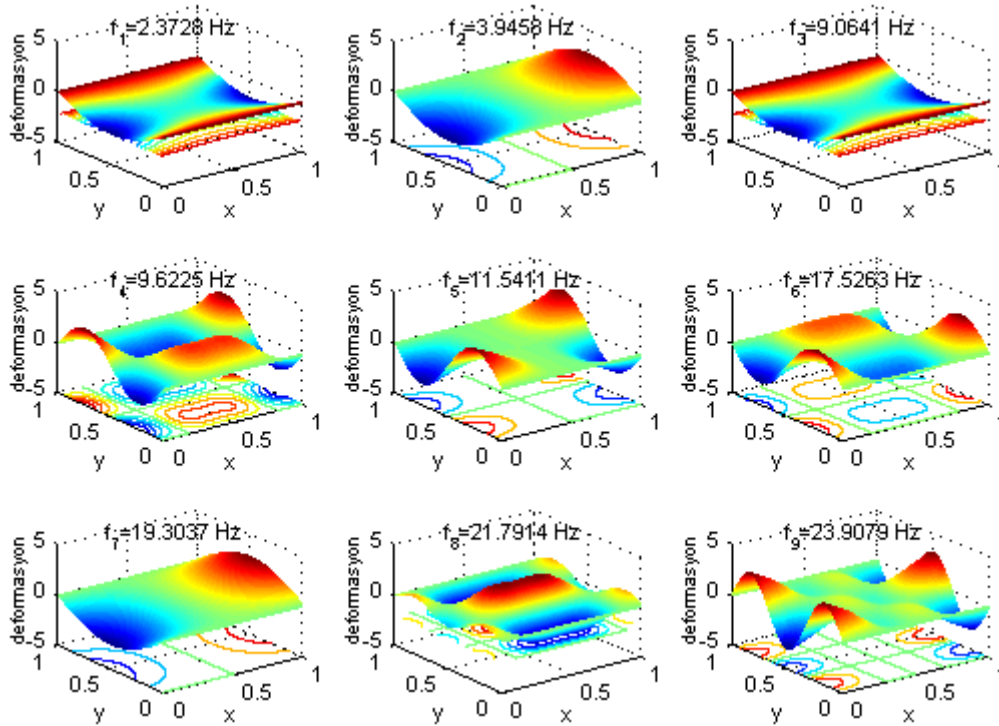
Şekil 4.8 SBSB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.7 SBSB plak için frekans parametreleri

Çözüm	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Chakraverty* [86]	9.6317	16.135	37.180	39.134	47.280				
Leissa** [14]	9.6314	16.1348	36.7256	38.9450	46.7381	70.7401	75.2834	87.9867	96.0405
Bu Çalışma (M=N=5)	9.5747	15.9224	36.5756	38.8290	46.5710	70.7225	77.8945	87.9330	96.4728
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	115.5606	122.7366	140.2779	157.0781	166.7683	171.9904	178.3536	193.9771	236.5332

*Tablo 9.3

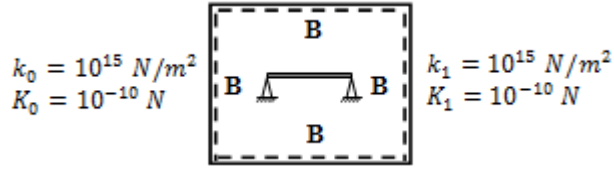
**Tablo A6



Şekil 4.9 SBSB plak için mod biçimleri

4.2.6. Basit-Basit-Basit-Basit (BBBB) plak

Elastik mesnetli plağın yay katsayıları uygun şekilde değiştirilerek, $x = 0$ ve $x = a$ kenarlarının da basit kenarlı olması sağlanır. Bunun için, her iki kenardaki burulma yay katsayıları sıfır ($K_{0,1} = 10^{-10} N$), doğrusal yay katsayıları da $k_{0,1} = 10^{15} N/m^2$ gibi büyük bir sayı verilerek, BBBB sınır şartlı bir plak elde edilmiştir (Şekil 4.10). Elde edilen frekans parametreleri Tablo 4.8'de verilmiştir. Tablo 4.8, bazı eşit frekans parametreleri içermektedir. Bu frekanslar, plak modelinin ve sınır şartlarının simetrik olduğu durumlarda ortaya çıkmaktadır. BBBB plağının ilgili frekanslardaki simetrik mod biçimleri Şekil 4.11'de görülmektedir.



Şekil 4.10 BBBB plak ve sınır parametreleri

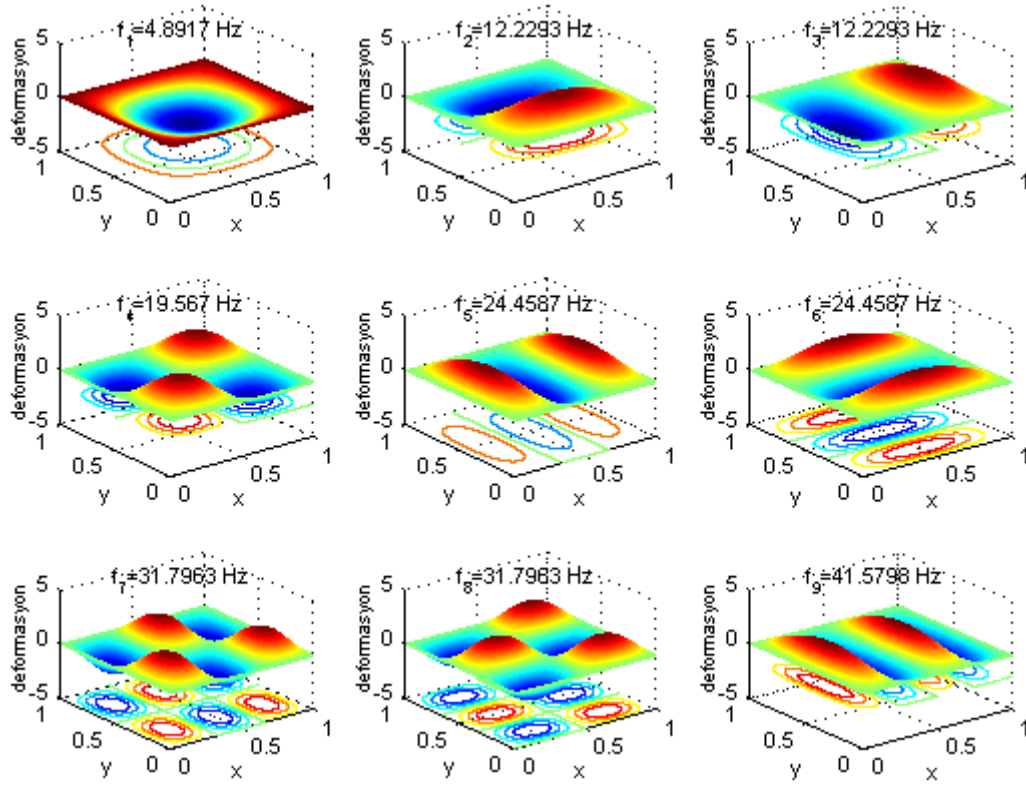
Tablo 4.8 BBBB plak için frekans parametreleri

Çözüm	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Low* [37]	19.74	49.35	49.35	78.96					
Chakraverty** [86]	19.739	49.348	49.348	79.400	100.17				
Leissa*** [14]	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3049	128.3049	167.7833
Bu Çalışma ($M=N=5$)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3049	128.3049	167.7833
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	167.7833	177.6529	197.3921	197.3921	246.7401	246.7401	256.6097	256.6097	286.2185

*Tablo 3

**Tablo 9.5

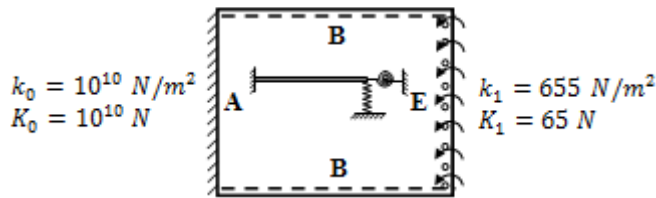
***Tablo A1



Şekil 4.11 BBBB plak için simetrik mod biçimleri

4.2.7. Ankastre-Basit-Elastik-Basit (ABEB) plak

ABEB sınır şartlı plak, $x = 0$ kenarından ankastre, $x = a$ kenarından hem doğrusal hem burulma yaylarıyla destekli, diğer kenarlardan ise basit mesnetlidir. Bundan sonraki kısımlarda, hem burulma hem de doğrusal yaylarla destekli kenarlar için kısaca “elastik (E)” ifadesi kullanılacaktır. Yukarıda belirtildiği gibi $x = a$ kenarı için $k_0 = K_0 = \infty$, $c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ alınarak ankastre kenar, $x = a$ kenarı içinse, referansla karşılaştırmak amacıyla $k_1 = 655 \text{ N/m}^2$, $K_1 = 65 \text{ N}$, $c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ alınarak, keyfi elastik mesnetli kenar elde edilmiştir. Hesaplama hatalarından ve tekil nokta oluşumlarından kaçınmak için, ∞ yerine 10^{10} girilmiştir. Burada, elastik kenar parametrelerinin, çok farklı kombinasyonlarda seçilebileceği açıktır (Şekil 4.12).



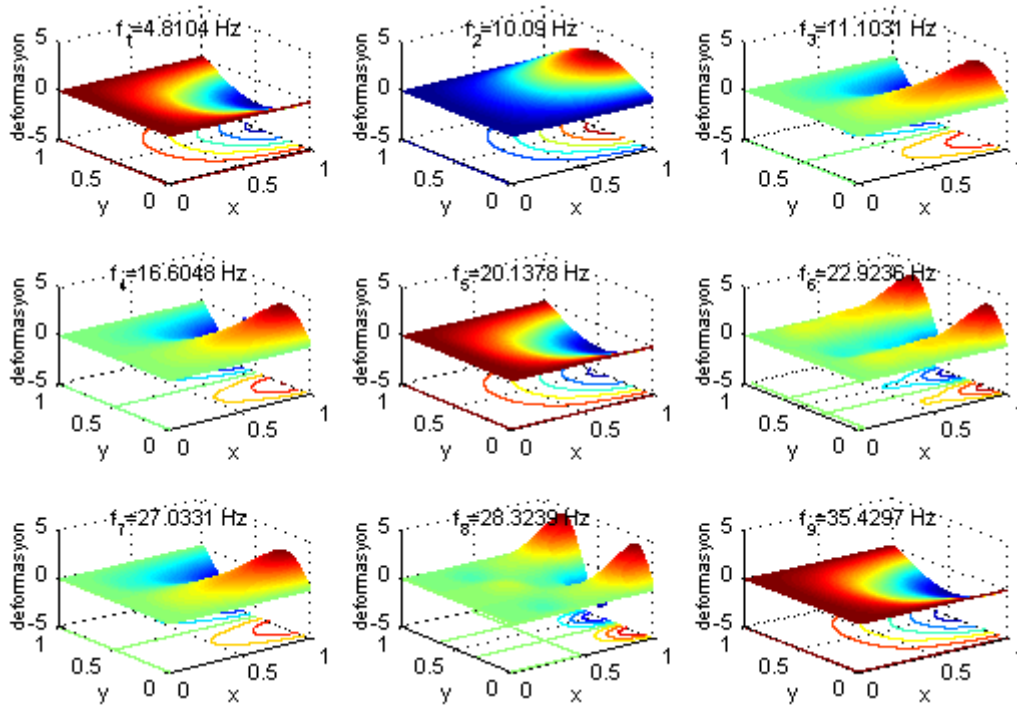
Şekil 4.12 ABEB plak ve sınır parametreleri

ABEB sınır şartlı plak için verilen katsayılarla göre elde edilen frekans parametreleri, Tablo 4.9’de görülmektedir. Mod biçimleri ise Şekil 4.13’te görülmektedir. Li’nin (1) katsayılar için kullandığı değerler yaklaşık olarak verilmesine rağmen, elde edilen sonuçlar referansla uyumaktadır.

Tablo 4.9 ABEB plak için frekans parametreleri

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Li* [51]	19,4025	40,7803	44,8252	67,1697	81,6234	92,5912			
Bu Çalışma ($M=N=6$)	19.4111	40.7153	44.8035	67.0040	81.2604	92.5018	109.0842	114.2931	142.9664
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	156.8770	160.8456	171.5604	182.2824	219.8723	225.0411	227.0201	249.4736	256.3570

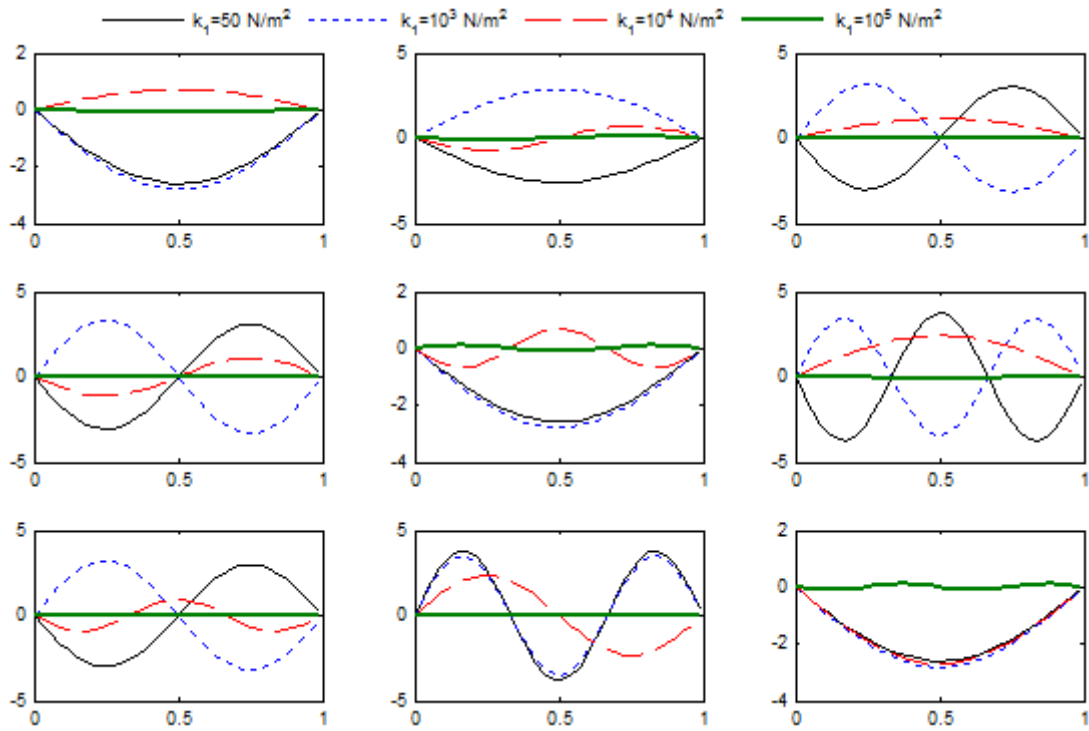
*Tablo 5



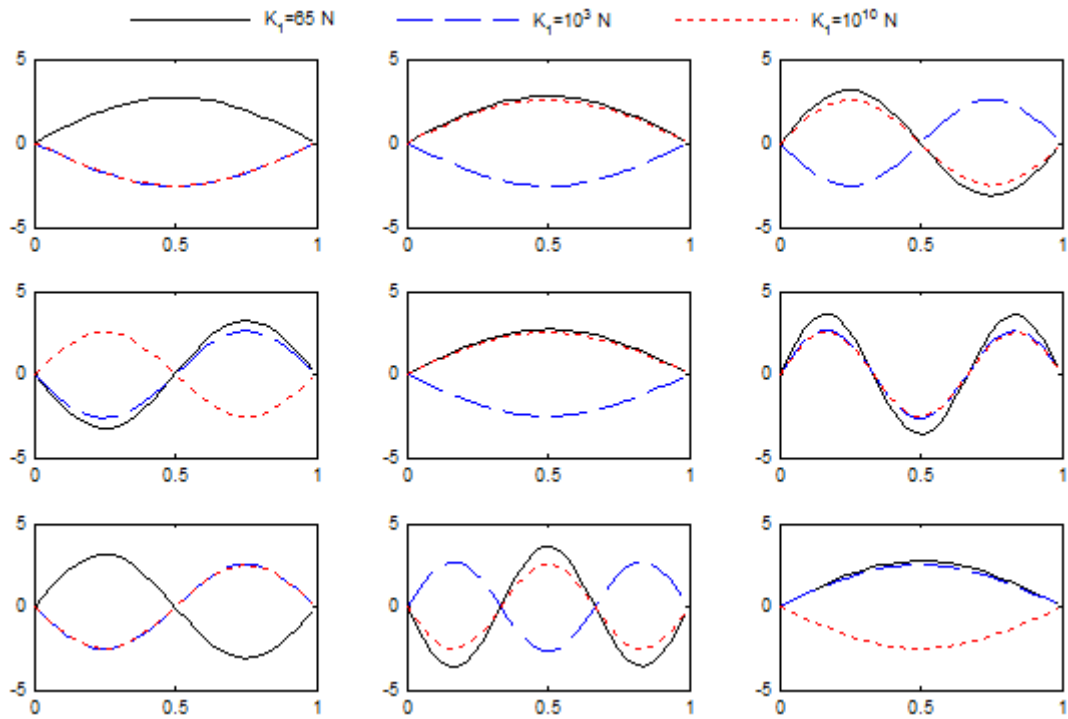
Şekil 4.13 ABEB plak için mod biçimleri

ABEB sınır şartlı plağın $x = a$ kenarının, farklı doğrusal yay katsayıları için ilk 9 mod şeklinin değişimi Şekil 4.14'de görülmektedir. Sabit burulma yay katsayısı ($K_1 = 65 N$) için, doğrusal yay katsayıları büyüdükçe yer değiştirmeler önemli oranda azalmaktadır. Tüm eğrilerin düğüm noktaları üzerinden geçtiği söylenemez. Çünkü önemli oranda mod değişimleri gözlenmektedir. Dolayısıyla doğrusal yay katsayılarının değişimi, hem yer değiştirmeye hem de mod şekillerinin değişimine neden olmaktadır.

ABEB plağın $x = a$ kenarının, farklı burulma yay katsayıları için ilk 9 mod şeklinin değişimi Şekil 4.15'de görülmektedir. Farklı yay katsayıları için doğal frekanslar değişeceğinden, ilgili mod şekilleri de değişebilmektedir. Buna göre küçük burulma yay katsayıları için ($K_1 = 65 N$), daha büyük yer değiştirmeler meydana gelmekte, burulma yay katsayısı büyüdükçe yer değiştirme azalmaktadır. Fakat bu azalma miktarı çok küçüktür. Tüm eğriler plak üzerinde yer değiştirmenin sıfır olduğu, düğüm noktaları (çizgileri) üzerinden geçmektedir.



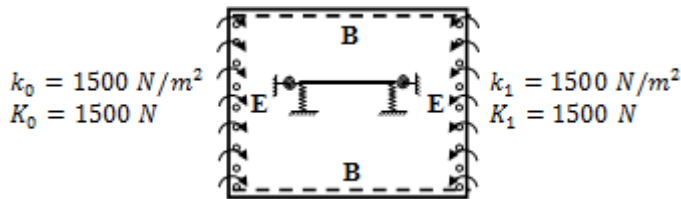
Şekil 4.14 ABEB plağın $x=a$ kenarının doğrusal yay katsayılarına göre değişimi



Şekil 4.15 ABEB plağın $x=a$ kenarının burulma yay katsayılarına göre değişimi

4.2.8. Elastik-Basit-Elastik-Basit (EBEB) plak

İki kenarı elastik olarak destekli, diğer iki kenarının da basit mesnetli olması durumunda, plağın $x = 0, x = a$ kenarları boyunca yerleşen doğrusal ve burulma yay katsayıları, isteğe bağlı olarak değiştirilebilir. Burada, basitlik ve simetriklik açısından, her iki kenardaki tüm yay değerleri $k_{1,2} = K_{1,2}$ eşit alınmıştır (Şekil 4.16).

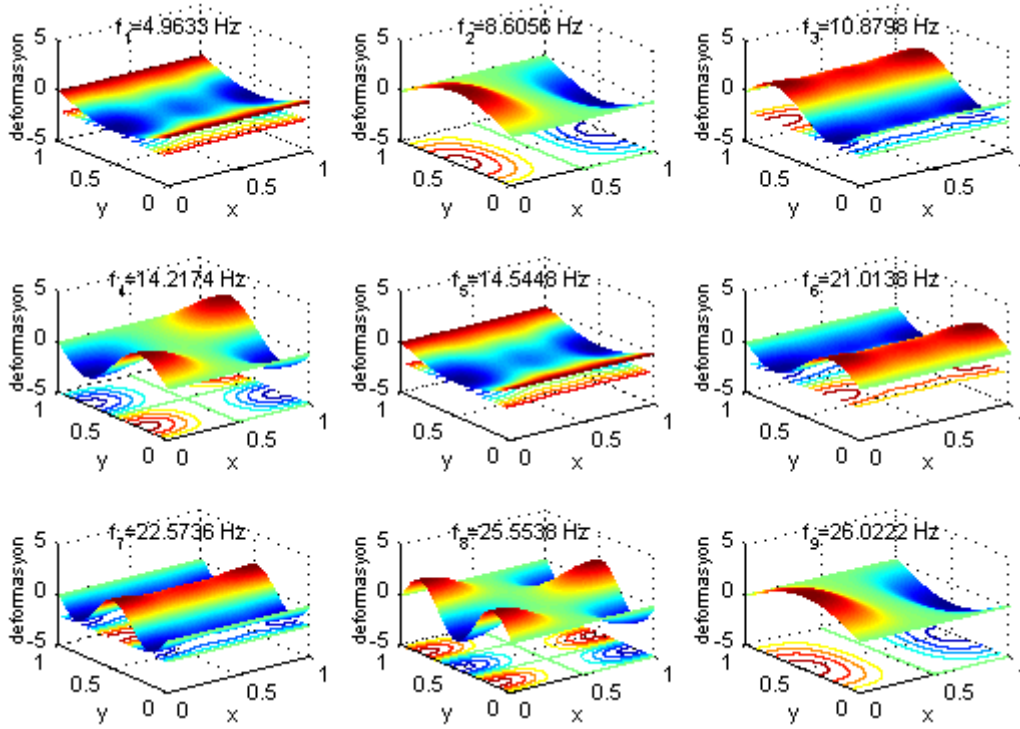


Şekil 4.16 EBEB plak ve sınır parametreleri

İki tarafı elastik mesnetli bu plak modelinin, yukarıdaki katsayılara göre elde edilen doğal frekanslar ve frekans parametreleri, Tablo 4.10'da verilmiştir. İlk 9 mod biçimleri de Şekil 4.17'de görülmektedir. Sınır şartları karşılıklı simetrik olduğu için, mod şekilleri de simetriktir.

Tablo 4.10 EBEB plak için mod frekansları ve frekans parametreleri

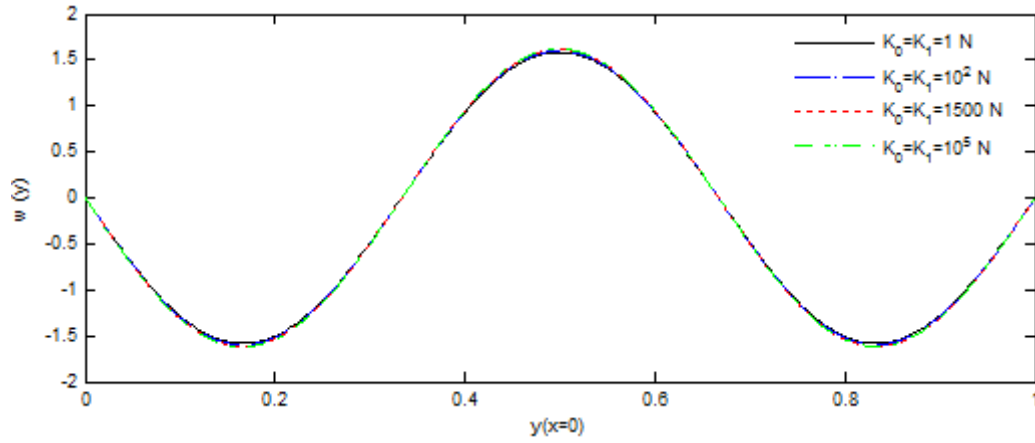
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
f_i [Hz] ($M=N=5$)	4.9633	8.6056	10.8799	14.2174	14.5448	21.0138	22.5736	25.5537	26.0222
	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
	32.6751	33.0628	39.4663	42.2592	43.0232	45.0403	49.4789	50.2404	61.3647
Ω_i ($M=N=5$)	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
	20.0281	34.7255	43.9026	57.3704	58.6914	84.7951	91.0895	103.1148	105.0052
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	131.8510	133.4156	159.2548	170.5250	173.6077	181.7473	199.6579	202.7307	247.6197



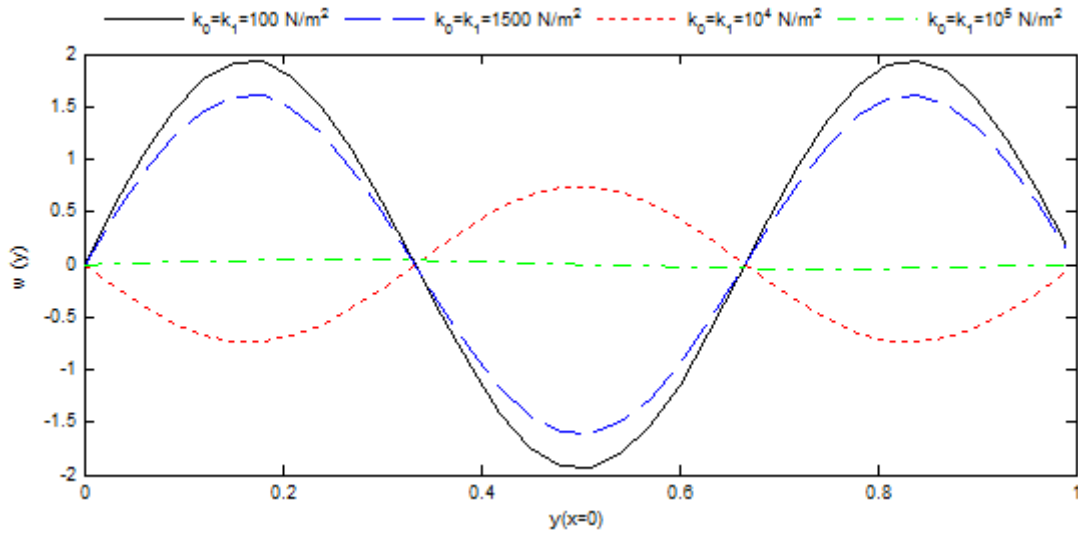
Şekil 4.17 EBEB plak için mod biçimleri

Aynı EBEB plağının $x = 0$ kenarının, $k_0 = k_1 = 1500 \text{ N/m}^2$ sabit doğrusal yay katsayısına karşılık, farklı burulma yay katsayıları için, 3. mod şeklinin değişimi Şekil 4.18’de gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, sabit doğrusal yay katsayısına karşılık, en küçük ve en büyük burulma yay katsayıları arasında kalan değerler için, deplasman farkı çok azdır. Burulma yaylarının deplasman üzerinde önemli bir katkısının olmadığı, bu şekilde de görülmektedir.

Sabit burulma yay katsayısı ($K_0 = K_1 = 1500 \text{ N}$) için, farklı doğrusal yay katsayıları için $x = 0$ kenarının 3. mod şeklinin değişimi gösterilmiştir (Şekil 4.19). Şekilden görüldüğü gibi, doğrusal yay katsayısı büyüdükçe deplasmanlar azalmaktadır. Doğrusal yay katsayısıyla, deplasmanlar ters orantılıdır. Burulma yay katsayısındaki gibi, yay katsayısı değiştikçe mod şekilleri değişebilmektedir.



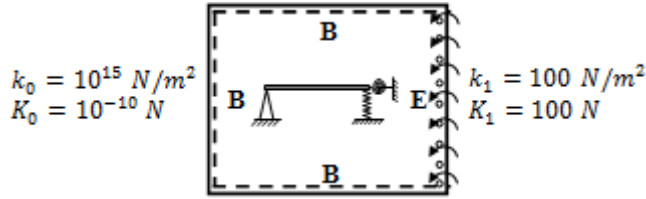
Şekil 4.18 EBEB plağın $x=0$ kenarının 3. modunun burulma yay katsayılarına göre değişimi



Şekil 4.19 EBEB plağın $x=0$ kenarının 3. modunun doğrusal yay katsayılarına göre değişimi

4.2.9. Basit-Basit-Elastik-Basit (BBEB) plak

Plağın $x = 0$ kenarındaki yay katsayıları $k_0 = 10^{15} \text{ N/m}^2$, $K_0 = 0 \text{ N}$ ve $x = a$ kenarındaki yay katsayıları keyfi alınarak BBEB plak modeli oluşturulmuştur (Şekil 4.20). BBEB plak için, Şekil 4.20'de verilen değerlere göre elde edilen elde edilen mod frekansları ve frekans parametreleri, Tablo 4.11'da verilmiştir. BBEB plağının mod biçimleri, ABEB sınır şartlı plağın mod biçimlerine benzediği için gösterilmemiştir.



Şekil 4.20 BBEB plak ve sınır parametreleri

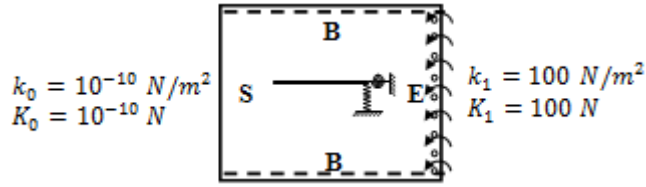
Tablo 4.11 BBEB plak için doğal frekans ve frekans parametreleri

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
f_i [Hz]	3,3261	7,8477	10,432	15,146	17,173	22,573	24,612	27,354	31,648
(M=N=5)	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
	36,952	39,185	39,666	44,5	51,683	52,343	54,225	59,937	61,744
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
Ω_i	13,421	31,667	42,096	61,117	69,297	91,087	99,313	110,38	127,71
(M=N=5)	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	149,11	158,12	160,06	179,57	208,55	211,22	218,81	241,86	249,15

4.2.10. Serbest-Basit-Elastik-Basit (SBEB) plak

Plâğın $x = 0$ kenarındaki bütün katsayılar $k_0 = 10^{-10} \text{ N/m}^2$, $K_0 = 10^{10} \text{ N}$ verilerek serbest kenar elde edilmiştir. Diğer $x = a$ kenarındaki yay katsayıları ise yine keyfi alınarak SBEB sınır şartlı plak modelinin oluşumu sağlanmıştır (Şekil 4.21). SBEB plâğının Şekil 4.21'deki değerler için elde edilen, frekans değerleri ve frekans parametreleri aşağıda verilmiştir (Tablo 4.12).

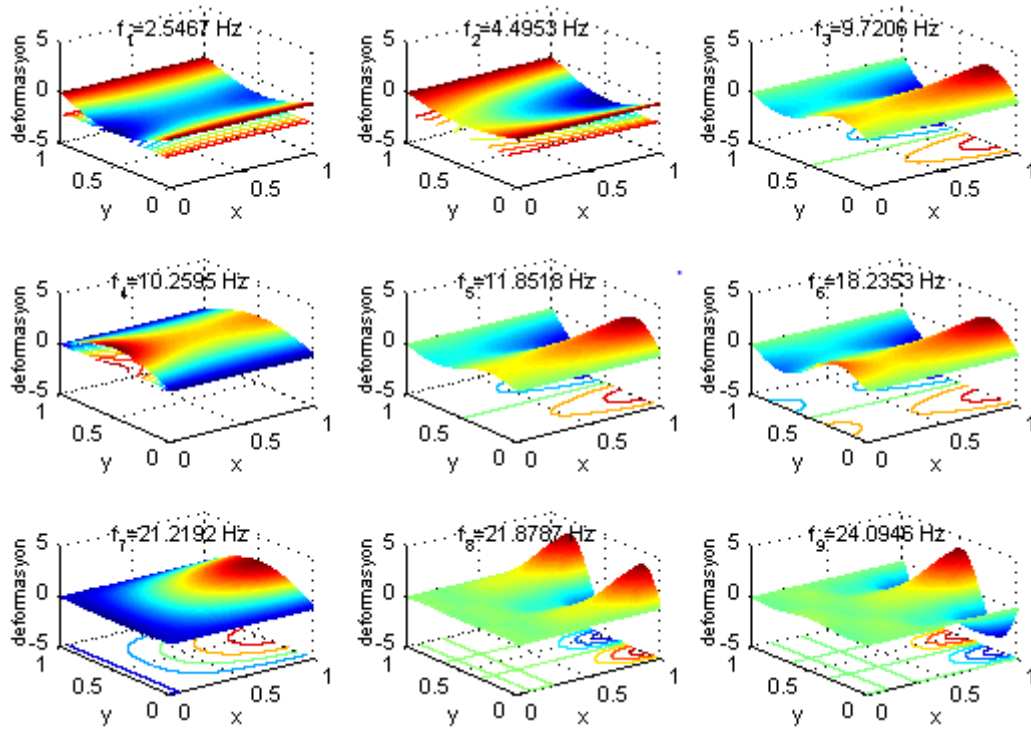
Mod biçimleri de Şekil 4.22'de gösterilmiştir. Bu plâğı mod biçimlerine dikkat edilirse, ilginç olarak frekans yükseldikçe serbest kenar elastik destekli kenara göre daha az deformasyona uğramakta ve yer değiştirmesi azalmaktadır. Serbest olduğu halde destek varmış veya hafif tutulmuş gibi davranış göstermektedir. Düğüm çizgilerinin serbest kenara çok yakın olması da bu durumu doğrulamaktadır. Ancak elastik kenardaki yay parametreleri artırılırsa serbest kenardaki yer değiştirmelerde artış olacağı açıktır. Belli bir değere kadar olan yayların, plâğın serbest kenarlarını fazla etkilemediği söylenebilir.



Şekil 4.21 SBEB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.12 SBEB plak için doğal frekans ve frekans parametreleri

f_i [Hz] (M=N=5)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
	2,5467	4,4953	9,7206	10,2595	11,8518	18,2353	21,2192	21,8787	24,0946
Ω_i (M=N=5)	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
	10,2763	18,1395	39,2245	41,3994	47,8247	73,5834	85,6242	88,2852	97,2269
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	119,9196	124,4645	150,4877	157,3357	166,9619	173,7574	185,1889	194,8446	240,1661

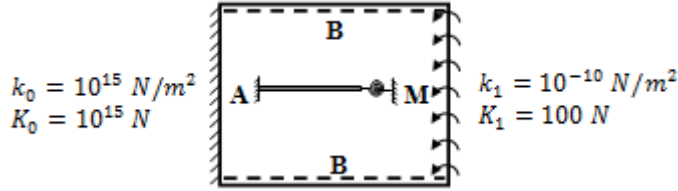


Şekil 4.22 SBEB plak için mod biçimleri

4.2.11. Ankastr-Basit-Burulma Yayı-Basit (ABMB) plak

Plâğın $x = 0$ kenarındaki yay katsayıları maksimum alınarak ankastre kenar elde edilmiştir. Diğer $x = a$ kenarının sadece dönme etkisinde kalabilmesi için, bu

kenardaki doğrusal yay katsayıları sıfır alınmıştır. Burulma yay katsayıları keyfi verilmiştir (Şekil 4.23).

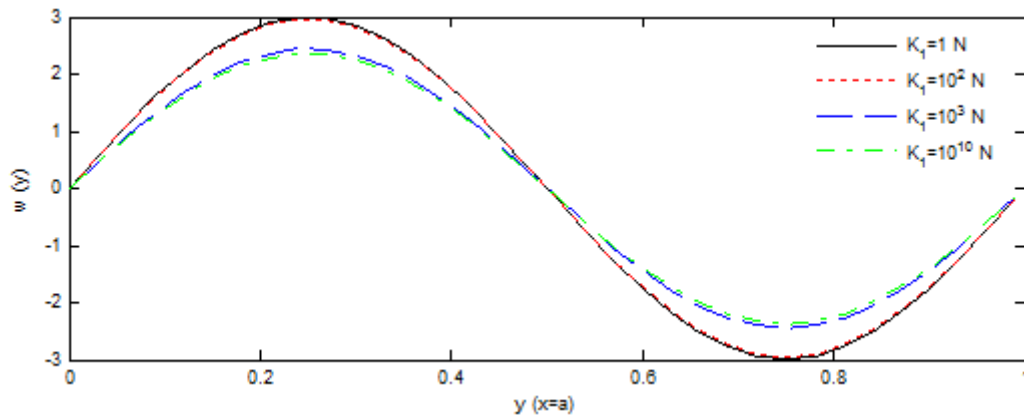


Şekil 4.23 ABMB plak ve sınır parametreleri

ABMB plağının $k_1 = 10^{-10} \text{ N/m}^2$, $K_1 = 100 \text{ N}$ için doğal frekans ve frekans parametreleri Tablo 4.13’de verilmiştir. Mod biçimleri ABEB destekli plağın mod biçimlerine benzediği için gösterilmemiştir. Plağın $x = a$ kenarının, burulma yay katsayılarının çeşitli değerleri için, 2. mod şeklinin değişimi Şekil 4.24’de görülmektedir. ABMB plak için, burulma yay katsayılarının artmasıyla genlikler çok az değişmektedir.

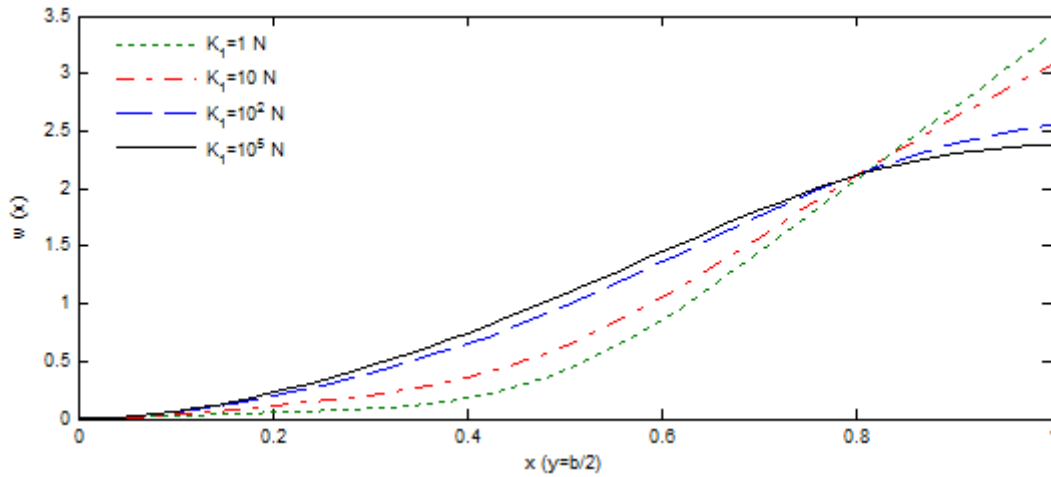
Tablo 4.13 ABMB plak için frekans ve frekans parametreleri

f_i [Hz] ($M=N=5$)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
	3.3374	9.2506	10.4764	16.1639	19.9598	22.6112	26.9147	28.1209	35.8307
	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
	38.8118	39.6937	42.9445	45.1272	54.9931	55.7447	59.7496	61.7601	66.6221
Ω_i ($M=N=5$)	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
	13.4670	37.3281	42.2746	65.2250	80.5419	91.2409	108.6066	113.4740	144.5846
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	156.6135	160.1724	173.2908	182.0975	221.9096	224.9417	241.1022	249.2144	268.8337



Şekil 4.24 ABMB plağın $x=a$ kenarının 2. modunun burulma yay katsayılarına göre değişimi

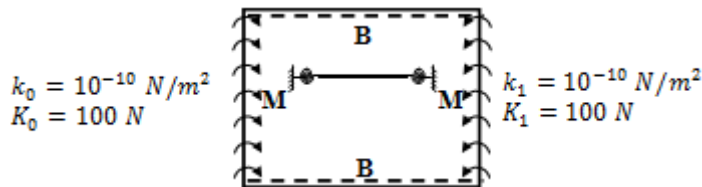
Burulma yay katsayılarının plak kenarlarındaki etkisinin de incelenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, plağın $y = b/2$ orta çizgisinin 1-2 ara mod biçiminin burulma yay katsayılarına göre değişimi Şekil 4.25’de görülmektedir. Bu şekilde plağın $x = a$ kenarının eğim açısı, burulma yay katsayısı arttıkça beklendiği gibi azalmaktadır. Burulma yay katsayısı arttıkça $x = a$ kenarı, ankastre kenara dönüşmektedir.



Şekil 4.25 ABMB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 1-2 mod şeklinin burulma yaylarına göre değişimi

4.2.12. Burulma Yayı-Basit- Burulma Yayı -Basit (MBMB) plak

Plağın $x = 0, x = a$ kenarlarının sadece dönme etkisinde olabilmesi için, doğrusal yay katsayıları sıfır ($k_0 = k_1 = 10^{10} N/m^2$), burulma yay katsayıları keyfi ($K_0 = K_1 = 100 N$) alınmıştır (Şekil 4.26). Bu katsayılar için elde edilen doğal frekans ve frekans parametreleri Tablo 4.14’te verilmiştir. MBMB plağının mod biçimleri, EBEB plağının mod biçimlerine benzemektedir.

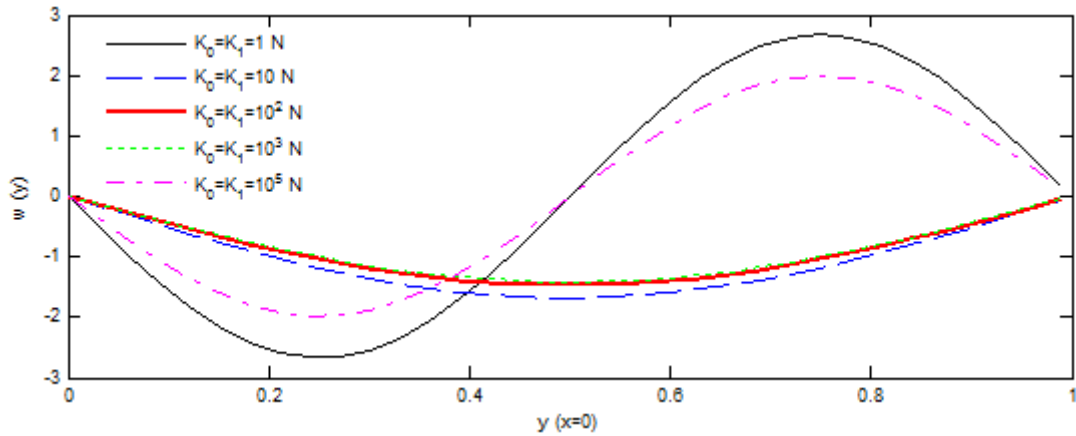
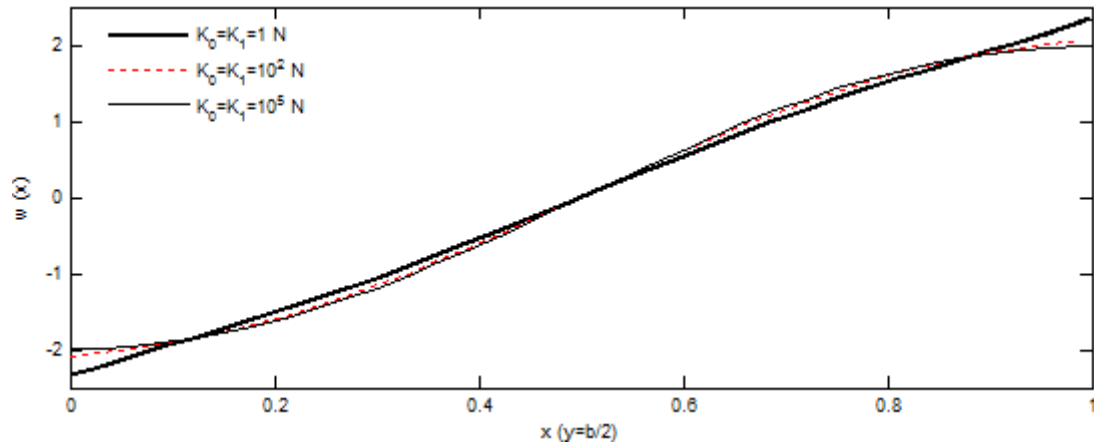


Şekil 4.26 MBMB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.14 MBMB plak için doğal frekans ve frekans parametreleri

f_i [Hz] ($M=N=5$)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
	2.4318	4.6741	9.7347	11.3705	11.9996	18.8504	21.9206	23.0654	24.1966
	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
	30.7640	31.1723	39.0149	39.6592	41.3769	43.4659	47.4536	48.4132	60.3076
Ω_i ($M=N=5$)	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
	9.8128	18.8612	39.2815	45.8824	48.4212	76.0655	88.4542	93.0737	97.6386
	Ω_{10}	Ω_{11}	Ω_{12}	Ω_{13}	Ω_{14}	Ω_{15}	Ω_{16}	Ω_{17}	Ω_{18}
	124.1393	125.7868	157.4335	160.0332	166.9647	175.3942	191.4854	195.3574	243.3541

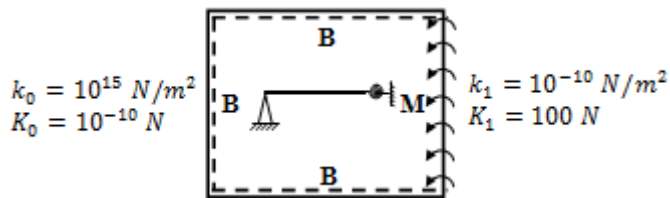
Plagın $x = 0$ kenarının 2. mod şeklinin, plak burulma yay katsayılarına göre değişimi, de Şekil 4.27’de verilmiştir. Burulma yay katsayılarının mod biçimleri üzerinde etkisi, belirgin şekilde görülmektedir. Burulma yay katsayılarının değerleri $10, 10^2, 10^3$ olduğunda, plak kenarı 1. modda iken, 1 ve 10^5 olunca 2. Modadır. Yine genliklerle burulma katsayıları arasında, bir orantı olmadığı görülmektedir.

Şekil 4.27 MBMB plâgın $x=0$ kenarının burulma yay katsayılarına göre 2. mod değişimiŞekil 4.28 MBMB plâgın $y=b/2$ orta çizgisinin 1-2 mod şeklinin burulma yaylarına göre değişimi

MBMB plağının, $y = b/2$ orta çizgisinin 1-2 ara mod biçiminin, burulma yay katsayılarına göre değişimi, Şekil 4.25'de görülmektedir. Burulma yay katsayısı arttıkça, $x = 0$ ve $x = a$ plak kenarlarının eğiminin azaldığı görülmektedir.

4.2.13. Basit-Basit- Burulma Yayı -Basit (BBMB) plak

Plak $x = 0$ kenarındaki, burulma yay katsayıları sıfır, doğrusal yay katsayıları maksimum ($k_0 = 10^{15} N/m^2$), $x = a$ kenarındaki doğrusal yay katsayısı $k_1 = 10^{-10} N/m^2$ ve burulma yay katsayısı keyfi alınarak BBMB sınır şartlı plak modeli elde edilmiştir (Şekil 4.29). Plağın $x = a$ kenarındaki, farklı burulma yay katsayıları için elde edilen frekans parametreleri $M = N = 5$ için aşağıdaki tabloda verilmiştir (Tablo 4.15). Bu tabloya göre, burulma yay katsayılarının frekans parametrelerini, dolayısıyla plak modelinin doğal frekanslarını çok az etkilediği söylenebilir. BBMB plağın mod şekilleri, ABEB ve ABMB plağın mod şekillerine çok benzediği için gösterilmemiştir. Tablodan burulma yay katsayılarının değişimi, frekans parametrelerini az etkilediği görülmektedir.



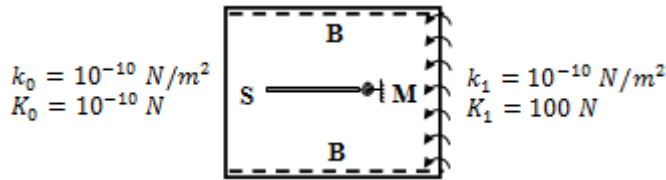
Şekil 4.29 BBMB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.15 BBMB plak için burulma yay katsayılarına göre frekans parametreleri

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
$K_1 = 1 N$	11.6241	27.7884	41.0936	59.0661	62.4569	90.3388	95.3291	109.2289	118.9958
$K_1 = 10 N$	11.8153	28.7414	41.2369	59.4612	64.0678	90.4391	96.1228	109.4012	120.8370
$K_1 = 10^2 N$	12.1959	31.0587	41.6827	60.8076	68.9862	90.8782	99.0963	110.2022	127.5106
$K_1 = 10^3 N$	12.3200	31.9531	41.9099	61.5640	71.3384	91.2264	100.9614	110.8949	131.3956
$K_1 = 10^4 N$	12.3352	32.0680	41.9421	61.6753	71.6604	91.2867	101.2476	111.0201	131.9670
$K_1 = 10^5 N$	12.3368	32.0799	41.9455	61.6869	71.6938	91.2931	101.2777	111.0336	132.0268

4.2.14. Serbest-Basit- Burulma Yay-Basit (SBMB) plak

Plak $x = 0$ kenarındaki tüm destekler kaldırılarak, $x = a$ kenarındaki doğrusal yay katsayısı, $k_1 = 10^{-10} N/m^2$ ve burulma yay katsayısı keyfi alınarak oluşturulan SBMB sınır şartlı plak modeli Şekil 4.30'da görülmektedir. Plagın $x = a$ kenarındaki, farklı burulma yay katsayıları için elde edilen frekans parametreleri, $M = N = 5$ için aşağıdaki tabloda verilmiştir (Tablo 4.16). Yine bu tablodan da burulma yay katsayılarının değişiminin frekans parametrelerini az etkilediği görülmektedir.



Şekil 4.30 SBMB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.16 SBMB plak için burulma yay katsayılarına göre frekans parametreleri

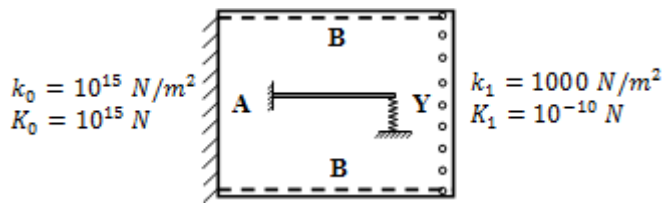
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
$K_1 = 1 N$	9.5806	15.9838	36.7401	38.8360	46.5977	70.7955	78.1236	87.9391	96.4855
$K_1 = 10 N$	9.6164	16.3838	37.8969	38.8884	46.7978	71.3527	79.8349	87.9876	96.5824
$K_1 = 10^2 N$	9.6807	17.2327	39.0422	40.9409	47.4522	73.3284	85.3460	88.1940	97.0258
$K_1 = 10^3 N$	9.7000	17.5239	39.1158	42.2006	47.8037	74.4884	88.1353	88.3516	97.3992
$K_1 = 10^4 N$	9.7023	17.5601	39.1260	42.3656	47.8546	74.6617	88.3783	88.5245	97.4657
$K_1 = 10^5 N$	9.7026	17.5639	39.1270	42.3826	47.8599	74.6798	88.3812	88.5650	97.4728

SBMB plagın mod şekilleri, SBEB plagın mod şekillerine çok benzediği için gösterilmemiştir. SBEB plakta olduğu gibi, SBMB plakta da serbest kenardaki yer değiştirmeler diğer burulma yayı destekli kenara göre daha azdır.

4.2.15. Ankastre-Basit-Doğrusal Yay-Basit (ABYB) plak

Plagın $x = 0$ kenarı ankastre olacak şekilde katsayılar düzenlenmiştir. Diğer $x = a$ kenarındaki burulma yay katsayıları sıfır alınarak dönme etkisi kaldırılmış ve dolayısıyla sadece doğrusal yayların etkisinde bırakılmıştır. Bir kenarı ankastre, diğer kenarı sadece doğrusal yayla destekli ABYB plagı Şekil 4.31'de görülmektedir. Bu

plağın çeşitli doğrusal yay katsayılarına göre hesaplanarak elde edilen ilk dokuz frekans parametresi $M = N = 5$ için Tablo 4.17’de verilmiştir. Dikkatle incelendiğinde, doğrusal yay katsayılarının değişimi, burulma yay katsayılarının değişiminden daha fazla frekans parametrelerini etkilemektedir. Doğrusal yay katsayısıyla frekans parametresinin doğru orantılı olduğu görülmektedir. Yay katsayısının $k_1 = 1000 \text{ N/m}^2$ olduğu durum için, ilk dokuz frekanstaki mod biçimleri ise Şekil 4.32’de görülmektedir. Mod biçimleri için terim sayısı $M = N = 3$ alınmıştır.

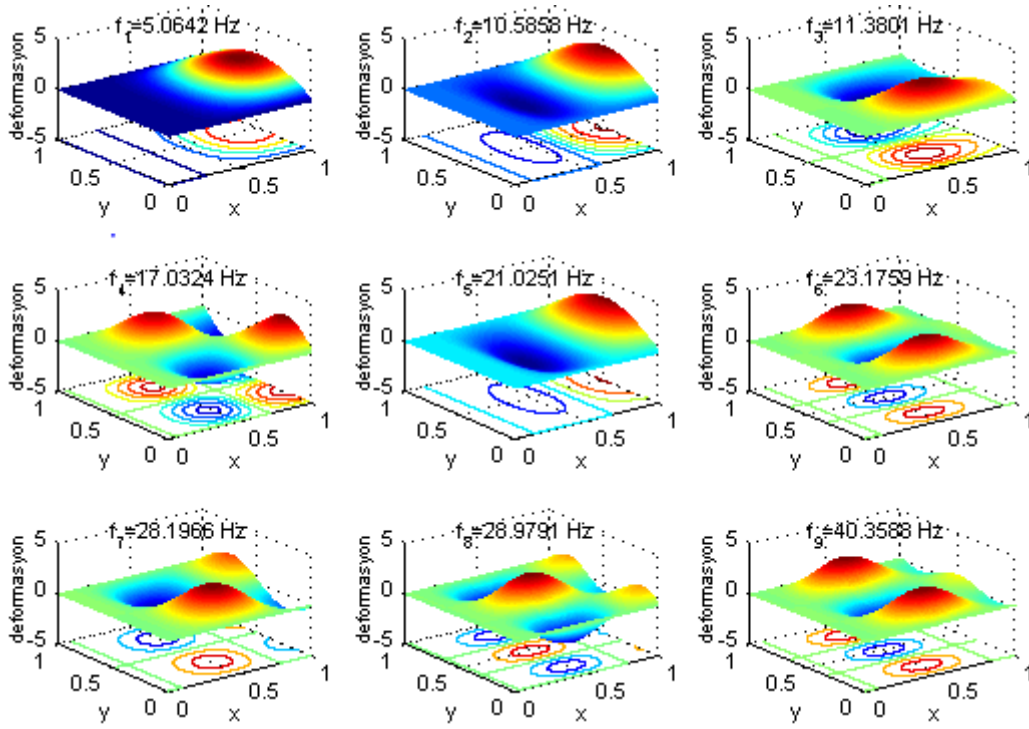


Şekil 4.31 ABYB plak ve sınır parametreleri

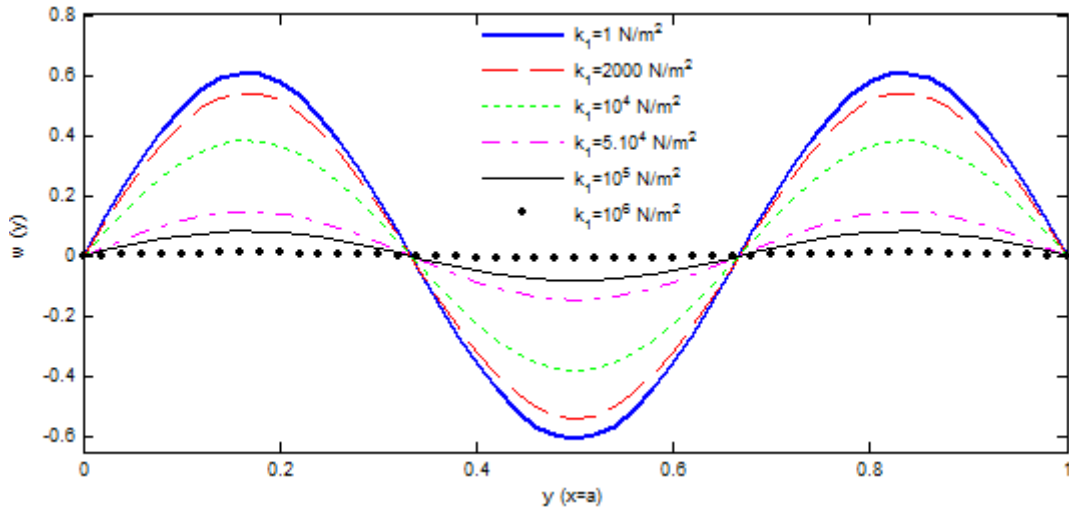
Tablo 4.17 ABYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
$k_1 = 1 \text{ N}$	12.5944	32.9971	41.5666	63.0373	73.0707	90.6247	104.1760	112.3612	135.5303
$k_1 = 10 \text{ N}$	12.7868	33.0817	41.6237	63.0775	73.1125	90.6513	104.2043	112.3821	135.5562
$k_1 = 10^2 \text{ N}$	14.4346	33.9430	42.1705	63.4804	73.5361	90.9105	104.4884	112.5910	135.8166
$k_1 = 10^3 \text{ N}$	20.4255	42.0314	45.8231	67.4614	78.1871	93.0229	107.4275	114.6670	138.5543
$k_1 = 10^4 \text{ N}$	23.2749	50.6904	56.1884	81.5237	98.4261	103.7017	126.3087	127.5450	163.4689
$k_1 = 10^5 \text{ N}$	23.6092	51.5761	58.4087	85.6754	100.0808	112.3490	132.9788	139.4776	168.6494

Plağın $x = a$ kenarının, plak yay katsayılarının çeşitli değerler almasıyla, mod biçiminin değişimi Şekil 4.33’de görülmektedir. Buradan doğrusal yay katsayılarının genliklerle orantılı olduğu görülebilmektedir. Büyük doğrusal yay katsayıları için $x = a$ kenarının yer değiştirmesinin sıfıra yaklaştığı, dolayısıyla basit mesnetli kenara dönüştüğü görülmektedir.

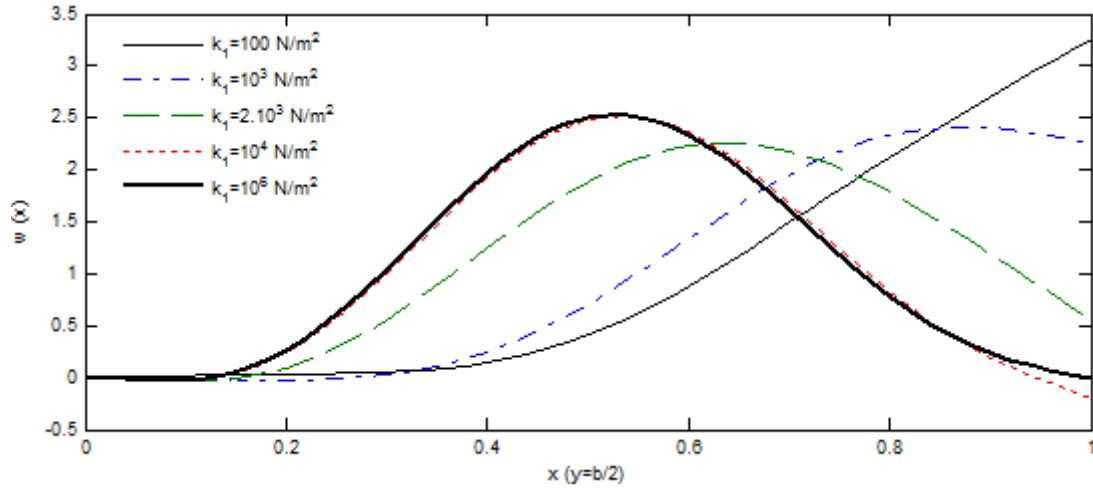


Şekil 4.32 ABYB plak için mod biçimleri



Şekil 4.33 ABYB plağın $x=a$ kenarının yay katsayılarına göre değişimi

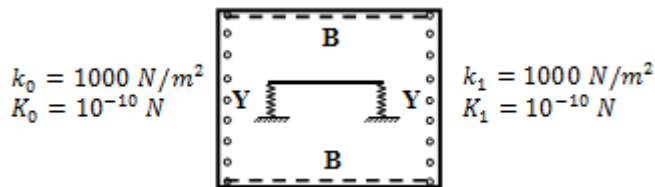
Doğrusal yay katsayılarının, kenarlardaki etkisini daha iyi görebilmek amacıyla, farklı katsayılara göre $y = b/2$ orta çizgisinin mod biçiminin değişimi Şekil 4.34'te gösterilmiştir. Doğrusal yay katsayıları arttıkça, plağın $x = a$ kenarının genliği azalmakta, büyük sayılar için ($k_1 = 10^6 \text{ N/m}^2$) basit mesnede dönüştüğü, doğrulanmaktadır. Büyük katsayılar için ABYB sınır şartlı plak ABBB sınır şartlı plağa dönüşmektedir.



Şekil 4.34 ABYB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 1. modunun yay katsayılarına göre değişimi

4.2.16. Doğrusal Yay-Basit-Doğrusal Yay-Basit (YBYB) plak

Burada plağın her iki $x = 0, a$ kenarlarındaki dönme etkisi oluşturan burulma yayları kaldırılmış ve sadece doğrusal yayların etkisinde kalması sağlanmıştır. Buna göre burulma yay $K_{0,1} = 10^{-10} N$, doğrusal yaylar keyfi olarak ($k_{0,1} = 1000 N/m^2$) alınmıştır (Şekil 4.35).

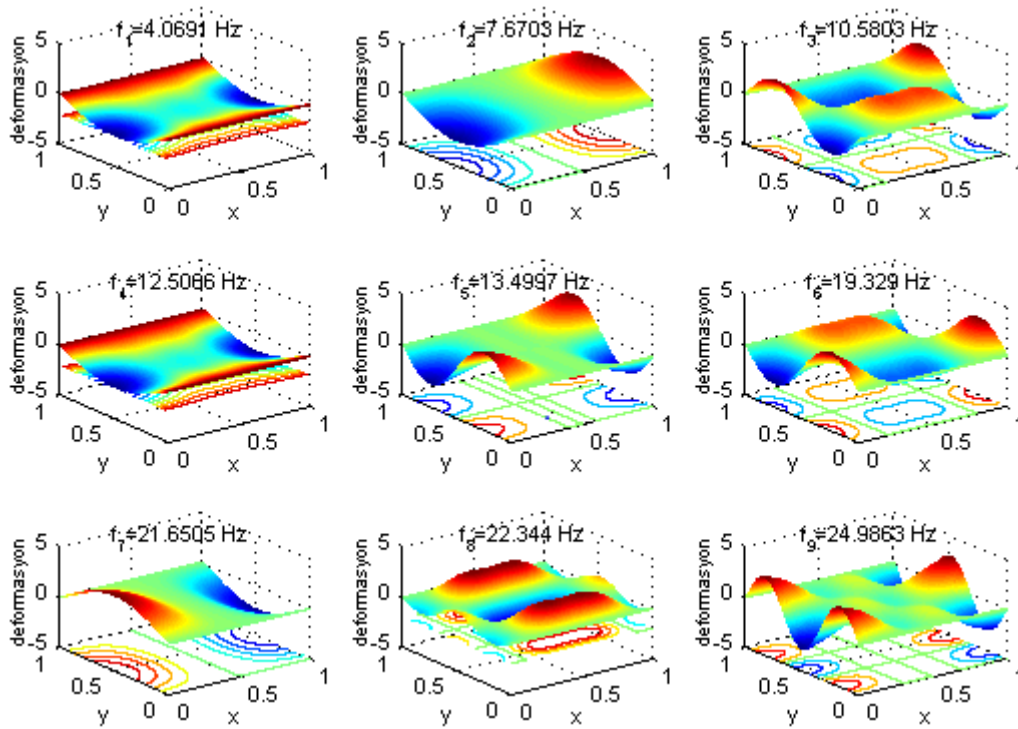


Şekil 4.35 YBYB plak ve sınır parametreleri

Farklı yay katsayılarına göre ve terim sayısı $M = N = 3$ iken, YBYB plağının frekans parametreleri hesaplanmıştır (Tablo 4.18). Doğrusal yaylarla, frekans parametrelerinin orantılı olduğu bu tabloda da görülmektedir. Yay katsayısının $k_{0,1} = 1000 N/m^2$ ve $M = N = 5$ alındığında elde edilen mod şekilleri, Şekil 4.36'da gösterilmiştir.

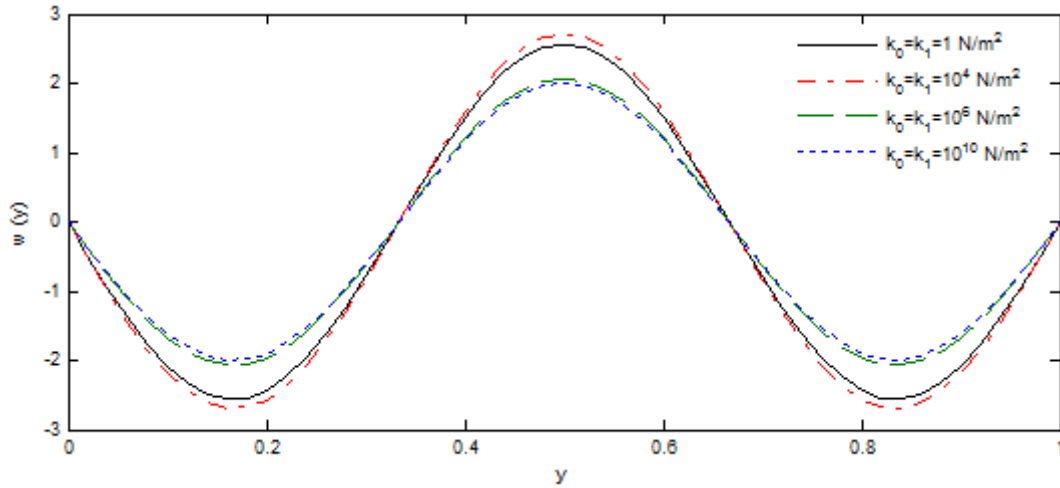
Tablo 4.18 YBYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri

	$k_{0,1} = 1 \text{ N}$	$k_{0,1} = 10 \text{ N}$	$k_{0,1} = 10^2 \text{ N}$	$k_{0,1} = 10^3 \text{ N}$	$k_{0,1} = 10^4 \text{ N}$	$k_{0,1} 10^5 \text{ N}$
Ω_1	9,5966	9,7723	11,243	16,422	19,299	19,694
Ω_2	16,096	16,358	18,719	31,371	46,199	49,021
Ω_3	37,3	37,449	38,934	42,747	47,981	49,199
Ω_4	38,915	38,965	39,448	51,892	72,549	78,236
Ω_5	47,635	47,726	48,615	55,543	86,359	97,385
Ω_6	72,707	72,779	73,497	80,316	96,053	98,375
Ω_7	88,399	88,422	88,645	90,495	110,14	126,14
Ω_8	99,541	99,581	99,98	103,49	117,89	126,92
Ω_9	126,53	126,57	126,95	130,64	152,95	174,04



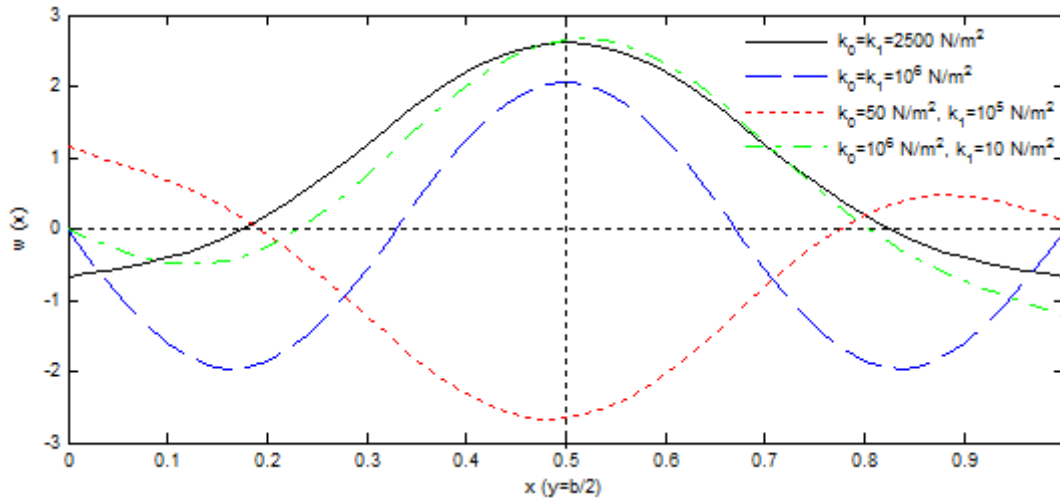
Şekil 4.36 YBYB plak için mod biçimleri

Plagın $x = a/2$ orta çizgisinin, $y = 0, b$ boyunca plak doğrusal yay katsayılarının çeşitli değerler almasıyla ve $M = N = 3$ iken, 3. mod biçiminin değişimi Şekil 4.37’de görülmektedir. Bu şekilde her iki kenardaki yay katsayıları eşit alınmıştır. Görüldüğü gibi yay değerleri büyüdükçe plak ortası boyunca genlikler azalmaktadır. Çok küçük katsayılar için ($k_{0,1} = 1 \text{ N/m}^2$) serbest kenarlı plak gibi hareket etmekte ve genlikler artmaktadır.



Şekil 4.37 YBYB plağın $x=a/2$ orta çizgisinin 3. modunun yay katsayılarına göre değişimi

YBYB plağının, $y = b/2$ orta çizgisinin, farklı doğrusal yay katsayıları ve $M = N = 3$ için, üçüncü modun değişimi Şekil 4.38'de görülmektedir. Bu şekilden de, yay katsayısı arttıkça kenarların yer değiştirmesinin azaldığı ve basit mesnede dönüştüğü görülebilmektedir. Kenarlardaki yay katsayılarının farklı olması durumunda, mod tepelerinin yay katsayısı düşük olan kenara doğru kaydığı görülmektedir.

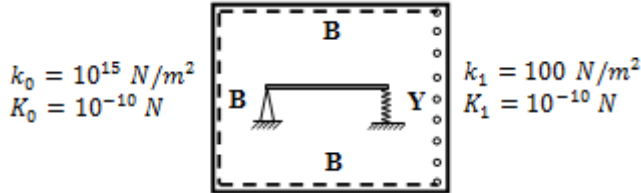


Şekil 4.38 YBYB plağın $y=b/2$ orta çizgisinin 3. modunun doğrusal yay katsayılarına göre değişimi

4.2.17. Basit-Basit-Doğrusal Yay-Basit (BBYB) plak

Karşılıklı her iki kenardaki burulma yayları kaldırılarak, $k_0 = 10^{15} \text{ N/m}^2$ ve k_1 keyfi alınarak BBYB sınır şartlı plak modelinin oluşumu sağlanmıştır (Şekil 4.39). Plağın $x = a$ kenarındaki doğrusal yay katsayılarının farklı değerleri ve $M = N = 3$

durumunda frekans parametreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir (Tablo 4.19). Yine doğrusal yay katsayılarının frekans parametrelerini önemli oranda etkilediği görülmektedir. BBYB plağının mod şekilleri, ABYB plağının mod şekillerine benzemektedir.



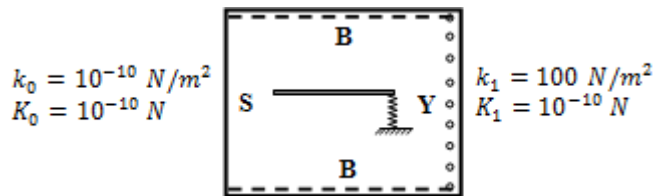
Şekil 4.39 BBYB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.19 BBYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
$k_1 = 1 \text{ N}$	11,624	27,935	41,272	59,856	65,565	91,151	99,767	110,95	152,74
$k_1 = 10 \text{ N}$	11,798	28,033	41,323	59,897	65,621	91,173	99,797	110,97	152,76
$k_1 = 10^2 \text{ N}$	13,245	29,023	41,814	60,304	66,183	91,386	100,11	111,17	152,92
$k_1 = 10^3 \text{ N}$	17,748	37,242	44,919	64,141	71,907	93,08	103,13	113,07	154,5
$k_1 = 10^4 \text{ N}$	19,514	47,676	48,624	75,44	92,079	97,233	118,71	122,35	165,05
$k_1 = 10^5 \text{ N}$	19,716	49,183	49,273	78,593	98,035	98,533	127,21	127,6	175,84

4.2.18. Serbest-Basit-Doğrusal Yay-Basit (SBYB) plak

Plağın $x = 0$ kenarındaki tüm destekler kaldırılarak, $x = a$ kenarına ise keyfi katsayılı bir doğrusal yay eklenerek SBYB plak modeli oluşturulmuştur (Şekil 4.40). Plağın $x = a$ kenarındaki doğrusal yay katsayılarının farklı değerleri ve $M = N = 3$ için frekans parametreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir (Tablo 4.20).

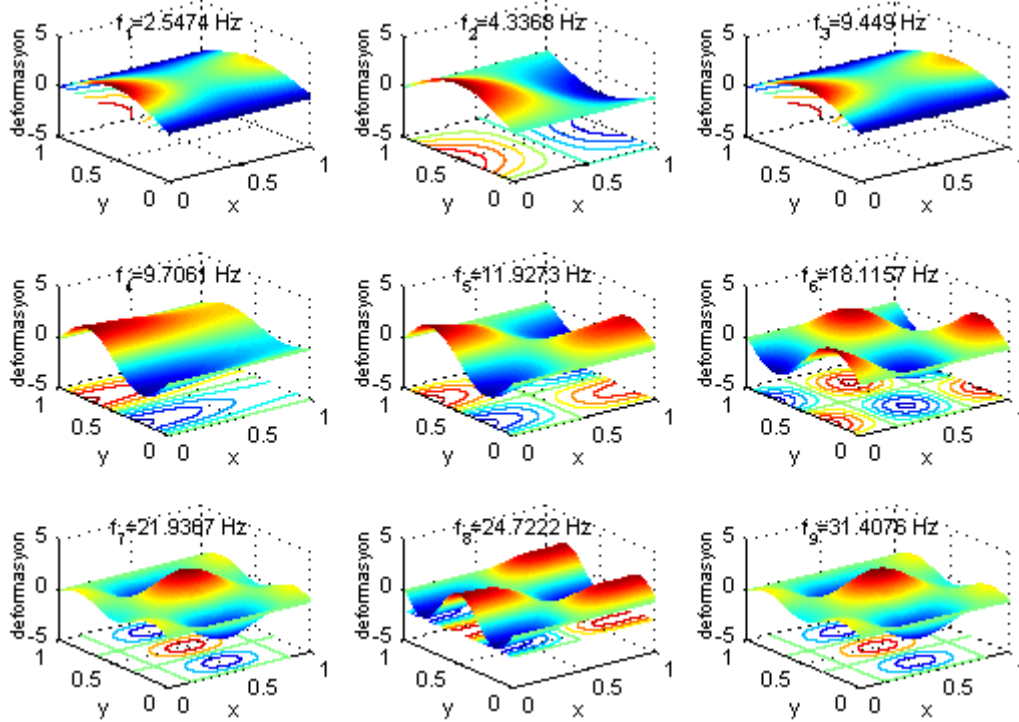


Şekil 4.40 SBYB plak ve sınır parametreleri

Tablo 4.20 SBYB plak için doğrusal yay katsayılarına göre frekans parametreleri

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8	Ω_9
$k_1 = 1 \text{ N}$	9,5866	16,082	37,292	38,912	47,63	72,703	88,398	99,539	126,53
$k_1 = 10 \text{ N}$	9,6726	16,214	37,366	38,937	47,676	72,739	88,41	99,559	126,54
$k_1 = 10^2 \text{ N}$	10,279	17,5	38,129	39,166	48,129	73,101	88,519	99,759	126,74
$k_1 = 10^3 \text{ N}$	11,32	23,89	40,275	45,672	51,829	76,698	89,308	101,58	128,62
$k_1 = 10^4 \text{ N}$	11,574	27,464	41,128	58,376	61,918	90,754	92,336	108,02	140,65
$k_1 = 10^5 \text{ N}$	11,601	27,879	41,252	59,698	65,208	91,109	98,964	110,62	151,11

SBYB plağının $k_1 = 100 \text{ N/m}^2$ için mod şekilleri, SBEB sınır şartlı plağın mod şekillerinden farklılık göstermektedir (Şekil 4.41). SBEB plağında serbest kenardaki yer değiştirmeler, elastik kenara göre daha az iken, SBYB plağında serbest kenardaki yer değiştirmeler de artış olmuştur. Yay katsayısı daha da artırılırsa, serbest kenar daha fazla hareket edecektir.

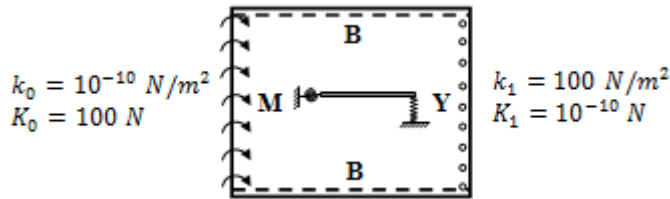


Şekil 4.41 SBYB plak için mod biçimleri

4.2.19. Burulma Yayı-Basit-Doğrusal Yay-Basit (MBYB) plak

Plağın $x = 0$ kenarındaki doğrusal yay katsayıları sıfır ($k_0 = 10^{-10} \text{ N/m}^2$), $x = a$ kenarındaki burulma yay katsayıları sıfır ($K_1 = 10^{-10} \text{ N}$) ve diğer yay katsayıları keyfi alınarak MBYB sınır şartlı plak modeli elde edilmiştir (Şekil 4.42). Şekil

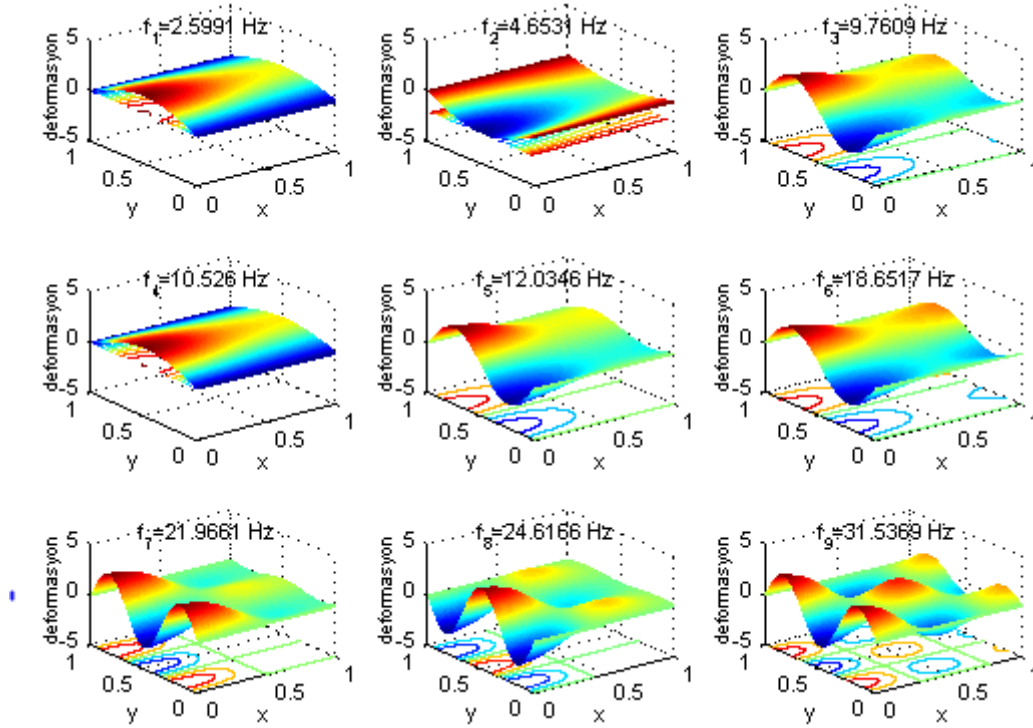
4.42'deki katsayılar için elde edilen mod biçimleri Şekil 4.43'de görülmektedir. Doğrusal ve burulma yaylarının frekans parametreleri üzerindeki etkisi Tablo 4.21'den çok daha açık şekilde görülmektedir. Burulma yay katsayıları sabit ve doğrusal yay katsayıları artarken frekans parametreleri önemli artış göstermekte, sabit doğrusal yay katsayısına karşılık burulma yay katsayıları artarken frekans parametreleri çok az değişmektedir.



Şekil 4.42 MBYB plak ve sınır parametreleri

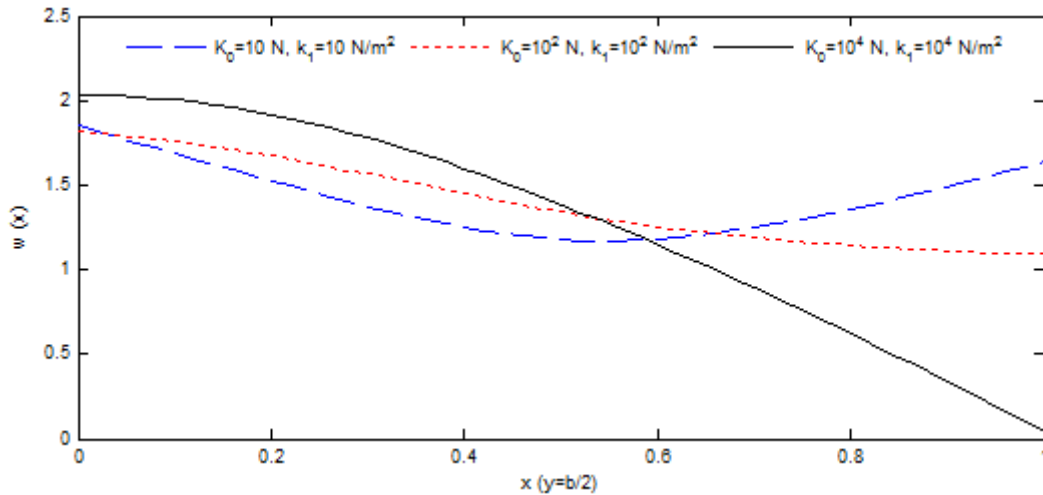
Tablo 4.21 MBYB plak için yay katsayılarına göre frekans parametreleri

$k[N/m^2]$ $K[N]$	$K_0 = 10^2$ $k_1 = 10$	$K_0 = 10^2$ $k_1 = 10^2$	$K_0 = 10^2$ $k_1 = 10^3$	$K_0 = 10^3$ $k_1 = 10$	$K_0 = 10^3$ $k_1 = 10^2$	$K_0 = 10^3$ $k_1 = 10^3$	$K_0 = 10^4$ $k_1 = 10$	$K_0 = 10^4$ $k_1 = 10^2$	$K_0 = 10^4$ $k_1 = 10^3$
Ω_1	9,7898	10,488	11,806	9,8115	10,528	11,906	9,8141	10,532	11,918
Ω_2	17,471	18,776	25,907	17,756	19,069	26,396	17,792	19,106	26,457
Ω_3	39,142	39,387	40,593	39,238	39,492	40,745	39,253	39,508	40,768
Ω_4	41,752	42,475	49,698	43,091	43,812	51,012	43,27	43,991	51,19
Ω_5	48,11	48,562	52,327	48,327	48,778	52,578	48,361	48,812	52,617
Ω_6	74,906	75,264	78,792	76,161	76,516	80,008	76,37	76,725	80,211
Ω_7	88,533	88,638	89,386	88,767	88,87	89,594	88,834	88,936	89,658
Ω_8	99,13	99,333	101,18	98,844	99,051	100,93	98,804	99,011	100,9
Ω_9	127,07	127,26	129,1	128,07	128,25	130,03	128,36	128,54	130,3



Şekil 4.43 MBYB plak için mod biçimleri

Plagın $y = b/2$ orta çizgisinin yay katsayılarına göre 1.mod değişimi Şekil 4.44’de verilmiştir. Burulma yayının dönme, doğrusal yayların ise yer değiştirme üzerine etkili olduğu mod biçimlerinden anlaşılmaktadır. Bu şekil burulma ve doğrusal yay katsayılarının plak kenarlarına etkisini açık bir şekilde ifade etmektedir. Yay katsayıları arttıkça burulma yaylarının olduğu $x = 0$ kenarının dönmesi azalmakta, $x = a$ kenarının ise yer değiştirmesi azalarak basit mesnetli kenara dönüşmektedir.



Şekil 4.44 MBYB plagın $y=b/2$ orta çizgisinin 1.modunun yay katsayılarına göre değişimi

4.3. Elastik ve Sönüm Mesnetli Plak Modelinin Serbest Titreşimleri

Denklem (3.65)'in sönümlü bir sistem için elde edilen, polinom matrisinin köklerinin bulunmasıyla, çözüm fonksiyonunun istenen (M, N) terim sayısı için λ_i kökleri elde edilir. Elde edilen bu λ_i kökleri, Denklem (3.89) genel çözüm fonksiyonunda yerlerine konularak ve daha önce belirtildiği gibi başlangıç şartlarıyla birlikte düzenlenerek $C_1, C_2 \dots C_r$ katsayıları bulunursa, genel çözüme ulaşılmış olur.

Bazı farklı mesnetli plaklarda, çeşitli yay ve sönüm katsayıları için elde edilen λ_i kökleri tablolarda verilmiştir. Ayrıca plağın çeşitli noktalarının zamanla titreşimi ve mod değişimleri verilmiştir. Hepsinde terim sayısı $M=N=I$ alınmıştır. Bunun için bu λ_i kökleri yaklaşık değerlerdir. Şüphesiz, terim sayısının arttırılmasıyla daha yaklaşık sonuçlar elde edileceği bilinmektedir. Ancak, terim sayısının yükseltilmesi, bilgisayarın işlem zamanını oldukça arttırmaktadır. Ayrıca, yukarıda frekans parametrelerinin ve mod biçimlerinin elde edilmesinde, yüksek terim sayıları seçilerek metodun doğruluğu görülmüştür. Burada asıl önemli olan plak kenarlarındaki sönüm elemanlarının, plağın titreşim enerjisini zamanla azaltması olduğundan, $M=N=I$ terim sayısı olarak yeterli görülmüştür.

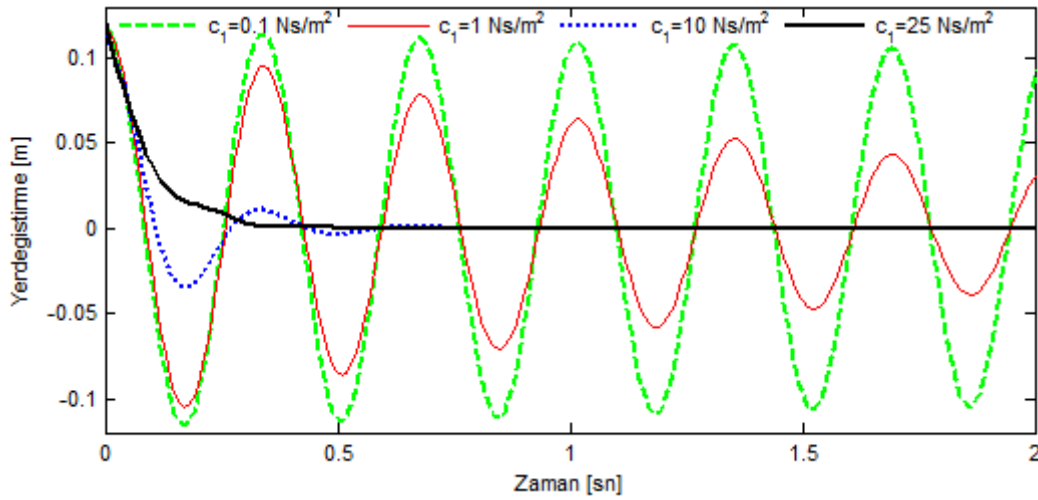
4.3.1. Basit-Basit-Sönüm (Damping)-Basit (BBDB) plak

Karşılıklı kenarlarından, $x = 0$ kenarından basit mesnetli, diğer $x = a$ kenarından sadece sönüm destekli BBDB sınır şartlı plağın, çeşitli yay ve sönüm katsayıları için elde edilen λ_i kök değerleri Tablo 4.22'de verilmiştir. Görüldüğü gibi $M=N=I$ terim için, eşlenik 4 karmaşık kök elde edilmiştir.

Tablo 4.22 BBDB plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

BBDB	$k_0 = 10^{15} \text{ N/m}^2, K_0 = 10^{-10} \text{ N}, k_1 = 10^{-10} \text{ N/m}^2, K_1 = 10^{-10} \text{ N}$			
	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 25 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$	- 4345.9 \mp 2653.9i	- 434 \mp 265.56i	- 36.458 \mp 27.586i	- 11.9 \mp 3.0023i
$\lambda_{3,4}$	- 0.058795 \mp 18.586i	- 0.58874 \mp 18.592i	- 7.0014 \mp 19.481i	- 5.5106 \mp 30.26i

Tablo 4.22’teki yay katsayılarıyla birlikte, bu BBDB plağının orta noktasının $(a/2, b/2)$, plağın $x = a$ kenarındaki c_1 sönüm katsayısının çeşitli değerleri için, titreşimlerinin zamanla değişimi Şekil 4.45’te görülmektedir. Şekilden görüldüğü gibi, sönüm oranları arttıkça plak orta noktasının titreşimi daha kısa zamanda sönümlenmektedir. Örneğin sönüm oranı $c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$ iken, sönümleme zamanı yaklaşık olarak $t_s \cong 4 - 5$ saniye iken, $c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$ olunca sönümleme zamanı 1 saniyenin altına düşmüştür. Ayrıca, $c_1 = 25 \text{ Ns/m}^2$ olunca titreşim tamamen ortadan kalkmaktadır. Buda, Tablo 4.22’deki yay katsayılarına sahip BBDB plağının kritik sönümünün yaklaşık olarak $c_1 \cong c_{kritik} \cong 15 - 20 \text{ Ns/m}^2$ olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.45 BBDB plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi

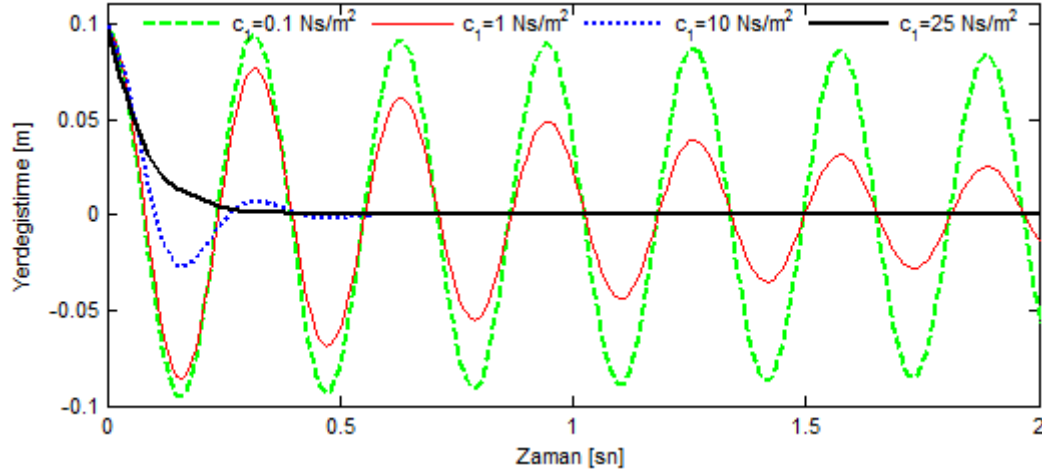
4.3.2. Ankastre-Basit-Sönüm-Basit (ABDB) plak

ABDB plağı için, çeşitli sınır değerlerine göre hesaplanan 4 adet karmaşık λ_i kökü, Tablo 4.23’de görülmektedir. Sabit yay katsayılarına karşılık, plak kenarlarındaki sönüm katsayıları sırasıyla $c_1 = 0.1, 1, 10, 25 \text{ Ns/m}^2$ alınmıştır.

ABDB plağının $(a/2, b/2)$ orta noktasının zamanla titreşimi ise, Şekil 4.46’da verilmiştir. Bu şekilden yine sönüm oranı arttıkça, titreşimin daha hızlı sönümlendiği görülmektedir. $c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$ olduğu zaman sönümleme zamanı yaklaşık 0.5 saniyedir. Kritik sönümün, BBDB plağında olduğu gibi $c_1 \cong c_{kritik} \cong 15 - 20 \text{ Ns/m}^2$ civarı olduğu söylenebilir.

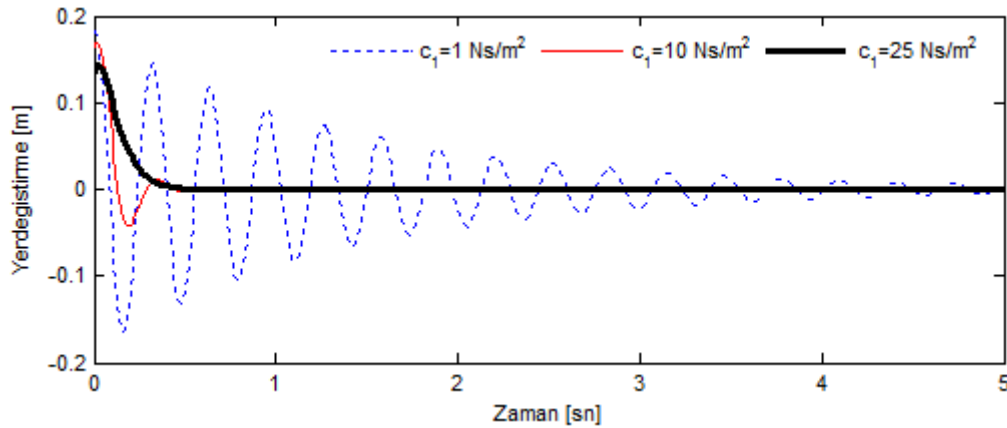
Tablo 4.23 ABDB plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

ABDB	$k_0 = 10^{15} \text{ N/m}^2, K_0 = 10^{15} \text{ N}, k_1 = 10^{-10} \text{ N/m}^2, K_1 = 10^{-10} \text{ N}$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 25 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$		$-5327.8 \mp 3617.9i$	$-532.08 \mp 362.07i$	$-44.867 \mp 38.941i$	$-13.356 \mp 3.0932i$
$\lambda_{3,4}$		$-0.071051 \mp 19.98i$	$-0.71145 \mp 19.981i$	$-8.4121 \mp 19.959i$	$-7.979 \mp 36.648i$

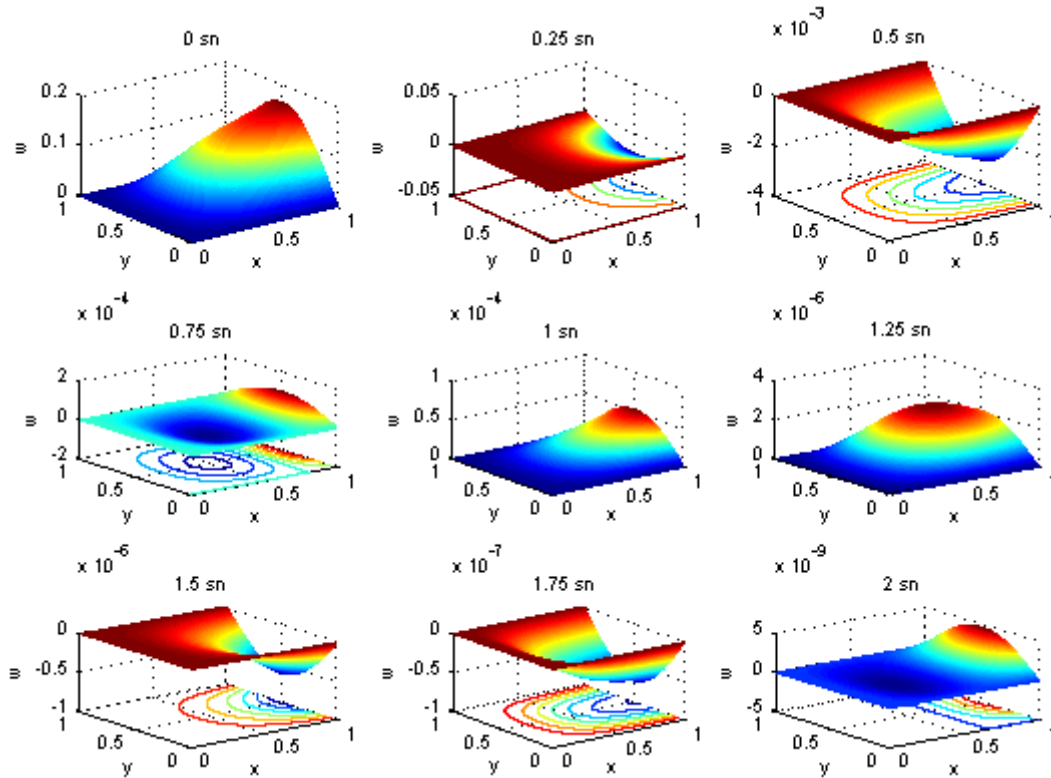


Şekil 4.46 ABDB plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi

Şekil 4.47, ABDB plağın orta noktasına verilen başlangıç yer değiştirmesi için, $x = a$ kenar orta noktasının çeşitli sönüm oranlarına göre titreşimini göstermektedir. Görüldüğü gibi, plak orta noktasına verilen başlangıç yer değiştirmesi için, başlangıç anında plak kenarlarının yer değiştirmesi, sönüm oranlarına göre değişmektedir. Bu şekilden plak kenarı için kritik sönümün yaklaşık $c_1 \cong c_{kritik} \cong 5 - 10 \text{ Ns/m}^2$ civarı olduğu görülmektedir.

Şekil 4.47 ABDB plağın $x=a$ kenar orta noktasının titreşimi

ABDB plağının $c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$ için, titreşim hareketinin zamanla değişimini gösteren mod şekilleri Şekil 4.48'de gösterilmiştir. Bu şekiller, $t = 0$ başlangıç anında, plak orta noktasına 0.1 m'lik yer değiştirme verildikten sonra serbest bırakılmasıyla, 2. saniyeye kadar belirli zaman dilimlerindeki aldığı şekilleri ifade etmektedir. Zaman dilimleri, her bir şeklin üzerinde verilmiştir. Bu şekillerden de görülebileceği üzere, plak kenarındaki sönümün etkisiyle plak titreşimleri zamanla sıfıra yaklaşmaktadır. Plağın 2. saniyedeki maksimum yer değiştirmesi yaklaşık olarak $5 \cdot 10^{-9}$ m dir. Bu da çok küçük bir değer olduğu için sıfır kabul edilebilir ve 2. saniyede plak titreşimlerinin sönümlendiği söylenebilir.



Şekil 4.48 ABDB plağın titreşiminin $c_1=10 \text{ Ns/m}^2$ için zamanla azalması

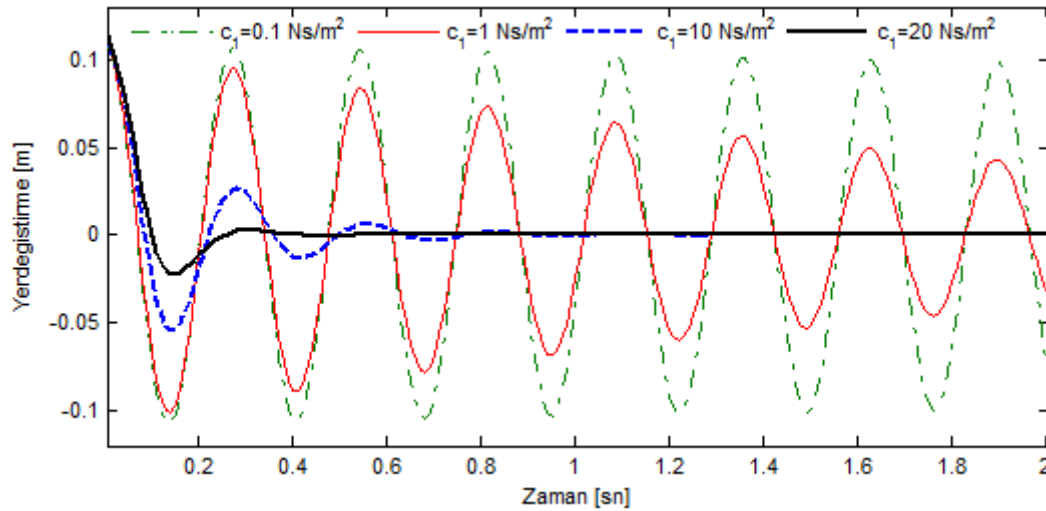
4.3.3. Ankastre-Basit-Elastik ve Sönüm-Basit (AB(ED)B) plak

AB(ED)B plağı için, çeşitli sınır parametrelerine göre hesaplanan karmaşık 4 adet λ_i kökü, Tablo 4.24'te verilmiştir. Ankastre kenarda sönüm elemanı yoktur. Elastik destekli kenardaki sönüm oranları yine sırasıyla $c_1 = 0.1, 1, 10, 20 \text{ Ns/m}^2$ alınmıştır.

AB(ED)B plağının $(a/2, b/2)$ orta noktasının zamanla titreşimi, Şekil 4.49'da verilmiştir. Bu şekilden yine, sönüm oranı arttıkça titreşimin daha kısa zamanda sönümlendiği açık olarak görülmektedir. Sönüm oranı, $c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$ olduğu zaman sönümleme zamanı yaklaşık 1 saniyedir. Şekilde görüldüğü gibi bu plak için, kritik sönümün, $c_1 \cong c_{kritik} \cong 20 \text{ Ns/m}^2$ olduğu söylenebilir. Sönümün $c_1 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$ olması, bu plak titreşimleri için çok yetersiz olduğu da görülmektedir.

Tablo 4.24 AB(ED)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

AB(ED)B $k_0 = 10^{10} \text{ N/m}^2, K_0 = 10^{10} \text{ N}, k_1 = 100 \text{ N/m}^2, K_1 = 100 \text{ N}$				
	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2$ $c_1 = 20 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$	$-7565.7 \mp 5500.8i$	$-756.1 \mp 550.54i$	$-70.596 \mp 59.543i$	$-24.672 \mp 38597i$
$\lambda_{3,4}$	$-0.048441 \mp 23.186i$	$-0.4823 \mp 23.205i$	$-5.1775 \mp 22.936i$	$-13.214 \mp 19.651i$



Şekil 4.49 AB(ED)B plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi

4.3.4. Elastik ve Sönüm-Basit-Elastik ve Sönüm-Basit ((ED)B(ED)B) plak

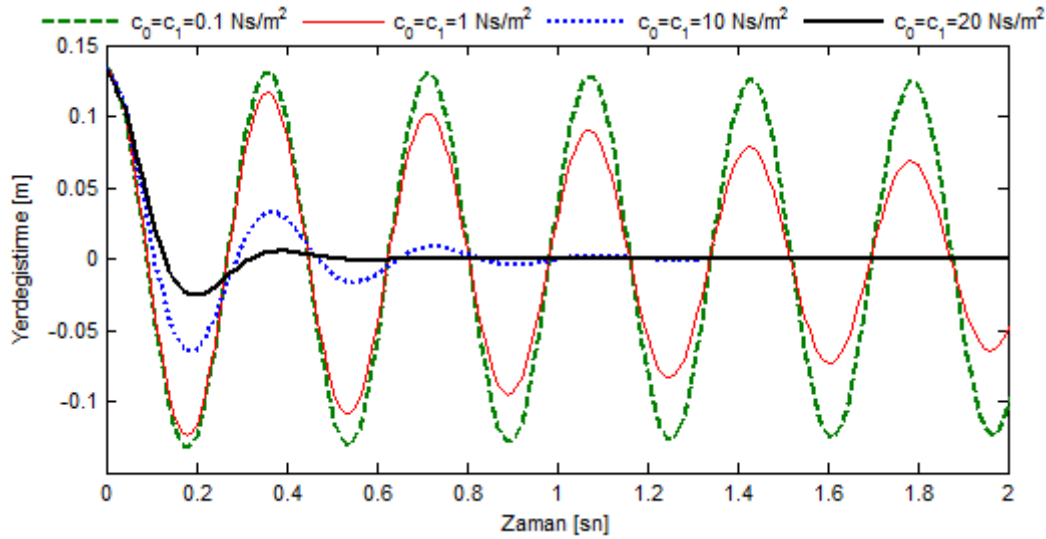
Bir başka örnek, iki kenarından elastik mesnetli plağın, elastik destekli kenarlarına sönüm eklenerek oluşan (ED)B(ED)B sınır şartlı plaktır. (ED)B(ED)B plağının yay ve çeşitli sönüm oranları için elde edilen 4 adet karmaşık eşlenik kök, Tablo 4.25'de verilmiştir.

(ED)B(ED)B plağının orta noktasının titreşimlerinin, çeşitli sönüm değerlerine göre değişimi Şekil 4.50'de görülmektedir. Aşağıdaki Tablo 4.25'de verilen yay

katsayıları ve $c_0 = c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$ sönüm değeri için, sönümleme zamanının $t_s \cong 1.5$ saniye, kritik sönümün ise $15 < c_{0,1} = c_{kritik} < 20$ olduğu şekilden söylenebilir. Dikkat edilirse AB(ED)B plak ile (ED)B(ED)B plak yaklaşık aynı sönüm özelliklerini göstermektedir. Örneğin $c_{0,1} = 10 \text{ Ns/m}^2$ için sönümleme zamanı ikisi içinde yaklaşık $t_s \cong 1.5$ sn. dir. İki kenara da sönüm ekleme yerine, sadece tek bir kenara sönüm eklemenin yeterli olduğu anlaşılmaktadır.

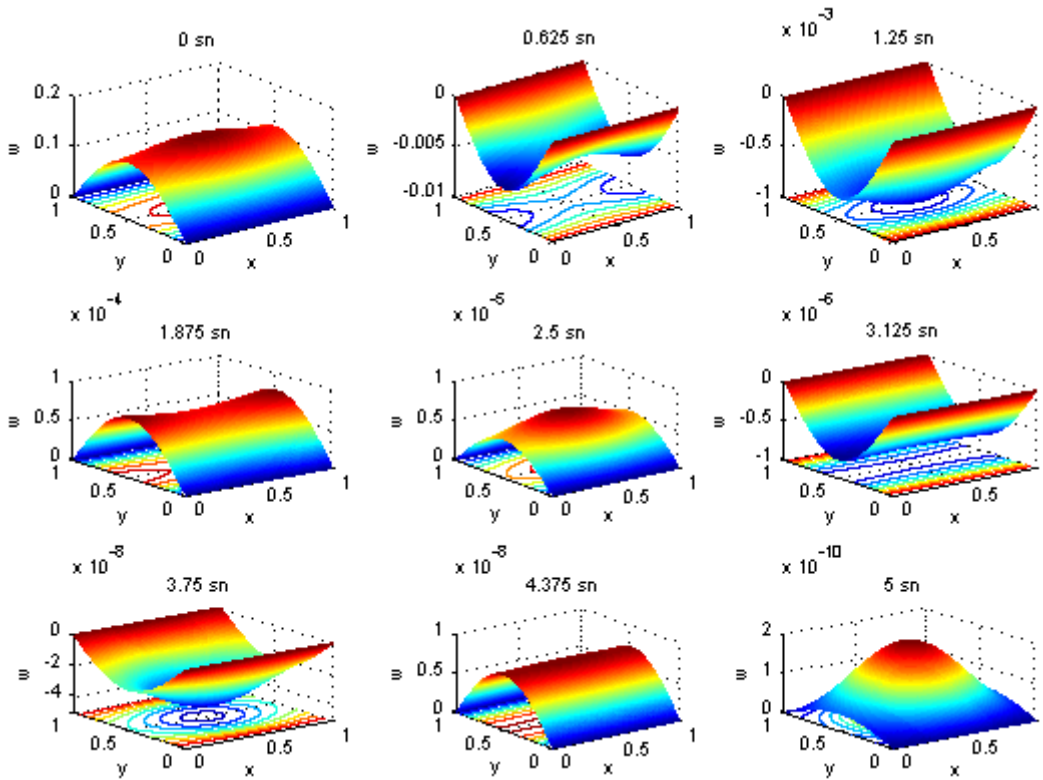
Tablo 4.25 (ED)B(ED)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

(ED)B(ED)B $k_0 = k_1 = 100 \text{ N/m}^2$, $K_1 = K_1 = 100 \text{ N}$				
	$c_0 = c_1 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 20 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$	$-11160 \mp 6064.3i$	$-1118.7 \mp 602.48i$	$-107.96 \mp 64.167i$	$-47.629 \mp 37.406i$
$\lambda_{3,4}$	$-0.036743 \mp 17.576i$	$-0.37158 \mp 17.628i$	$-3.8084 \mp 17.393i$	$-8.4317 \mp 16.482i$



Şekil 4.50 (ED)B(ED)B plağın orta noktasının titreşimi

(ED)B(ED)B plağının $c_0 = c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$ için titreşim hareketinin, zamanla mod değişimleri Şekil 4.51'de gösterilmiştir. Bu şekillerden, plaktaki maksimum deformasyonun, $t = 0$ başlangıç anında uygulanan yer değiştirme olduğu görülmektedir. Plaktaki deformasyonun, sönümün etkisiyle zamanla azaldığı ve 2. saniyeden sonra özellikle 5. saniyede tamamen ortadan kalktığı ve titreşimin sönümlendiği görülmektedir.



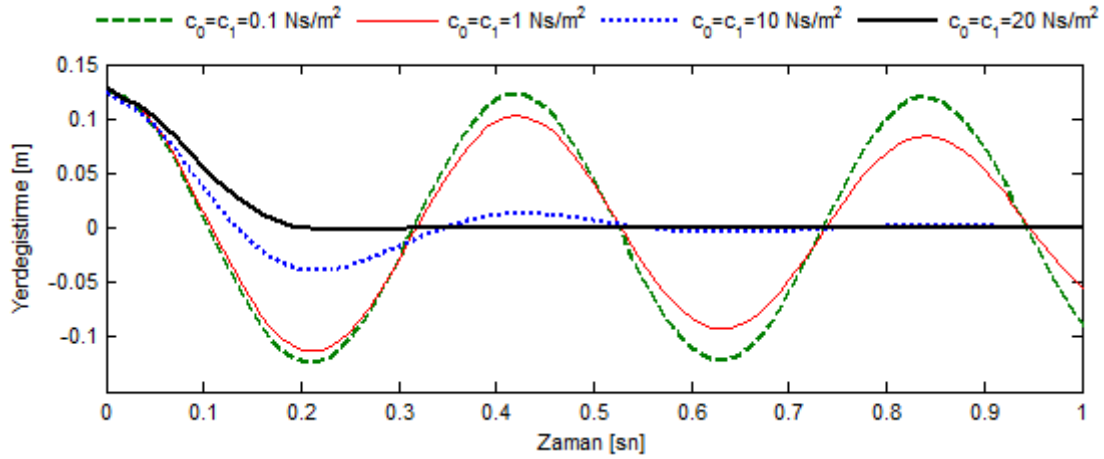
Şekil 4.51 (ED)B(ED)B plağın titreşiminin $c_{0,1}=10 \text{ Ns/m}^2$ için azalması

4.3.5. Sönüm-Basit-Sönüm-Basit (DBDB) plak

DBDB sınır şartlı, başka bir ifadeyle hiçbir elastik destek içermeyen plak için elde edilen λ_i kök değerleri Tablo 4.26'de verilmiştir. Bu plak için yine 4 adet kök mevcuttur. Ancak, sönüm değerleri, $c_0 = c_1 = 20 \text{ Ns/m}^2$ iken elde edilen ilk iki kök, diğerlerinin aksine karmaşık değil reel sayıdır. Diğer kökler karmaşık ve eşleniktir. Bu plak için kritik sönümün $c_{0,1} \cong c_{kritik} \cong 15 \text{ Ns/m}^2$ ve bu değer için sönümlenme zamanının $t_s \cong 0.5 \text{ sn}$. olduğu tahmin edilebilmektedir (Şekil 4.52).

Tablo 4.26 DBDB plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

DBDB	$k_0 = k_1 = 10^{-10} \text{ N/m}^2, K_0 = K_1 = 10^{-10} \text{ N}$			
	$c_0 = c_1 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 20 \text{ Ns/m}^2$
λ_1	-6375.2 - 3277.5i	-637.05 - 327.92i	-58.555 - 34.43i	-0.062193
λ_2	-6375.2 + 3277.5i	-637.05 + 327.92i	-58.555 + 34.43i	-0.019691
$\lambda_{3,4}$	-0.047139 \mp 14.969i	-0.47344 \mp 14.968i	-5.1973 \mp 14.917i	-0.022663 \mp 30.639i



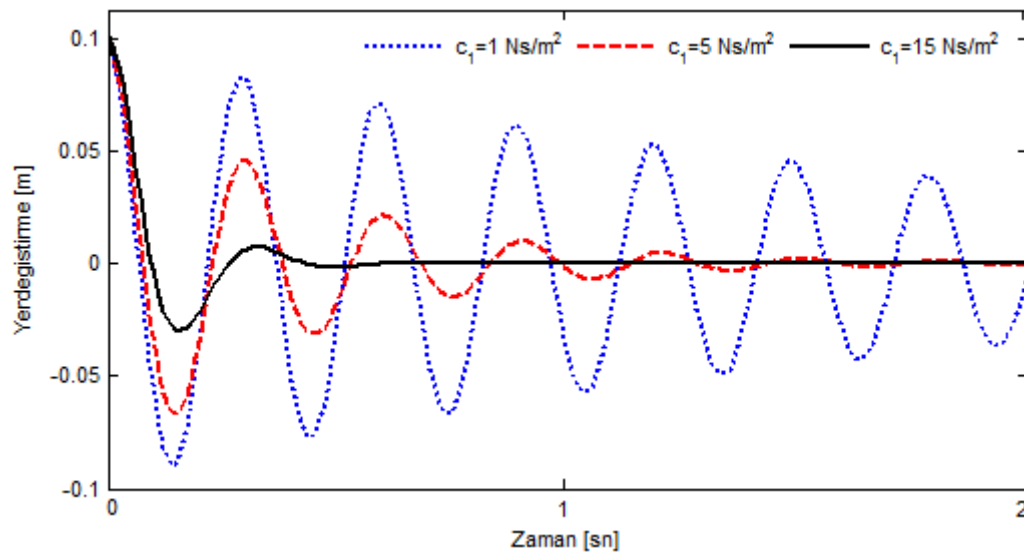
Şekil 4.52 DBDB plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi

4.3.6. Ankastre-Basit-Burulma Yayı ve Sönüm-Basit (AB(MD)B) plak

AB(MD)B sınır şartlı plağın farklı sönümler için elde edilen λ_i kök değerleri Tablo 4.27'da verilmiştir. $c_1 = 5 \text{ Ns/m}^2$ iken sönümlenme zamanı $t_s \cong 2$ saniyedir. Kritik sönüm ise $c_1 \cong c_{kritik} \cong 15 \text{ Ns/m}^2$ civarı olduğu görülmektedir (Şekil 4.53).

Tablo 4.27 AB(MD)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

AB(MD)B $k_0 = 10^{15} \text{ N/m}^2$, $K_0 = 10^{15} \text{ N}$, $k_1 = 10^{-10} \text{ N/m}^2$, $K_1 = 100 \text{ N}$			
	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 5 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 15 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$	$-654.11 \mp 549.94i$	$-128.73 \mp 112.87i$	$-35.545 \mp 46.693i$
$\lambda_{3,4}$	$-0.49988 \mp 21.053i$	$-2.5181 \mp 20.802i$	$-8.3539 \mp 18.654i$



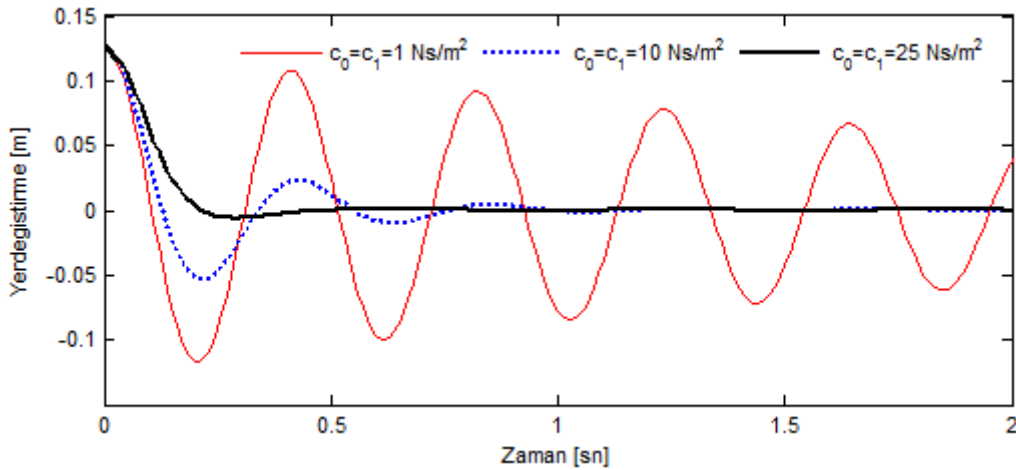
Şekil 4.53 AB(MD)B plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi

4.3.7. Burulma Yayı ve Sönüm - Basit - Burulma Yayı ve Sönüm - Basit ((MD)B(MD)B) plak

(MD)B(MD)B plağın farklı sönümler için λ_i kök değerleri Tablo 4.28'dedir. $c_{0,1} = 10 \text{ Ns/m}^2$ İken, sönümleme zamanı yaklaşık $t_s \cong 1.5$ saniyedir. Ayrıca bu plak için kritik sönüm $c_{0,1} \cong c_{kritik} \cong 15 \text{ Ns/m}^2$ civarı olduğu görülmektedir (Şekil 4.54).

Tablo 4.28 (MD)B(MD)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

(MD)B(MD)B $k_0 = k_1 = 10^{-10} \text{ N/m}^2$, $K_0 = K_1 = 100 \text{ N}$				
	$c_0 = c_1 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 25 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$	$-10166 \mp 6036.3i$	$-1019 \mp 602.54i$	$-97.889 \mp 64.783i$	$-30.067 \mp 37.527i$
$\lambda_{3,4}$	$-0.038996 \mp 15.275i$	$-0.39184 \mp 15.306i$	$-4.0146 \mp 14.873i$	$-10.653 \mp 10.627i$



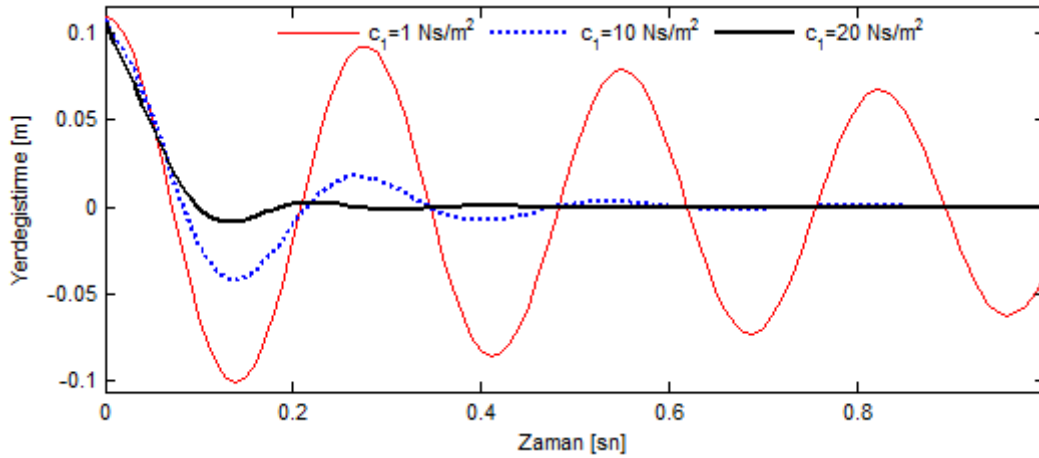
Şekil 4.54 (MD)B(MD)B plağın orta noktasının titreşimi

4.3.8. Ankastre-Basit-Doğrusal Yay ve Sönüm-Basit (AB(YD)B) plak

AB(YD)B sınır şartlı plak için 4 adet karmaşık ve eşlenik λ_i kökleri Tablo 4.29'dedir. AB(YD)B plağının kritik sönümü $c_{kritik} \cong 20 \text{ Ns/m}^2$ arasındadır (Şekil 4.55).

Tablo 4.29 AB(YD)B plağın için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

AB(YD)B $k_0 = 10^{15} \text{ N/m}^2$, $K_0 = 10^{15} \text{ N}$, $k_1 = 100 \text{ N/m}^2$, $K_1 = 10^{-10} \text{ N}$			
	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 1 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = 0 \text{ Ns/m}^2, c_1 = 20 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$	$-633.84 \mp 357.42i$	$-56.966 \mp 36.513i$	$-21.315 \mp 10.701i$
$\lambda_{3,4}$	$-0.58231 \mp 22.935i$	$-6.3843 \mp 23.902i$	$-10.361 \mp 33.522i$



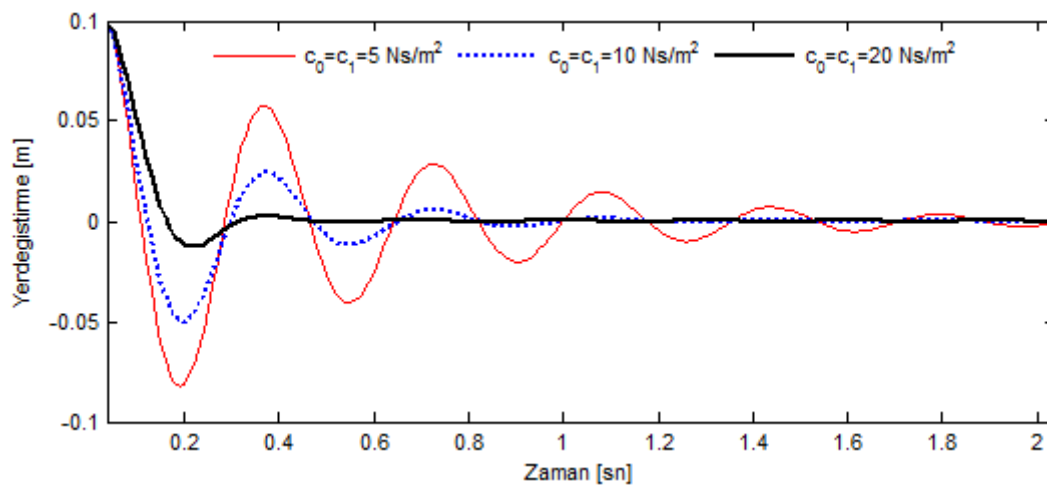
Şekil 4.55 AB(YD)B plağın orta noktasının sönüm oranlarına göre titreşimi

4.3.9. Doğrusal Yay ve Sönüm - Basit - Doğrusal Yay ve Sönüm - Basit ((YD)B(YD)B) plak

(YD)B(YD)B (Doğrusal Yay ve Sönüm-Basit-Doğrusal Yay ve Sönüm-Basit) plağı için 4 adet karmaşık ve eşlenik λ_i kökleri Tablo 4.30'da verilmiştir. (YD)B(YD)B plağının kritik sönümü $c_{kritik} \cong 20 \text{ Ns/m}^2$ civarındadır (Şekil 4.56).

Tablo 4.30 (YD)B(YD)B plak için yay ve sönüm katsayılarına göre λ_i kökleri

(YD)B(YD)B $k_0 = k_1 = 100 \text{ N/m}^2, K_0 = K_1 = 10^{-10} \text{ N}$			
	$c_0 = c_1 = 5 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 10 \text{ Ns/m}^2$	$c_0 = c_1 = 20 \text{ Ns/m}^2$
$\lambda_{1,2}$	$-145.58 \mp 66.03i$	$-69.339 \mp 33.728i$	$-26.589 \mp 15.087i$
$\lambda_{3,4}$	$-1.9614 \mp 17.652i$	$-4.13 \mp 17.902i$	$-10.335 \mp 20.83i$



Şekil 4.56 (YD)B(YD)B plağın orta noktasının titreşimi

BÖLÜM 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, kenarlarında elastik mesnet ve sönüm elemanları bulunan ince dikdörtgen plak modeli oluşturularak çözülmüştür. Bu modelin kullanılabilir olduğunu doğrulamak için; Li ve Daniels'in elastik mesnetli ince plak modeli ve çözüm yöntemi kullanılmıştır. Elastik mesnetli plağın kenarlarına sönüm elemanları da ilave edilerek, klasik olmayan sınır şartlı plak modeli oluşturulmuştur. Şekil 3.3'te verilen plağın $x = 0$ ve $x = a$ kenarlarından, elastik ve sönüm destekli plak modelinin sınır şartları belirlenerek, plağın hareketine ait diferansiyel denklemi çıkartılmıştır. Bu diferansiyel denklemin çözümünü gerçekleyen ve sınır şartlarına bağlı olan bir çözüm fonksiyonu, polinomsal Fourier serisi şeklinde elde edilmiştir. Polinomsal Fourier çözüm fonksiyonuyla birlikte plağın diferansiyel denkleminin çözümü için, Galerkin ayrıklaştırma prensibi uygulanarak plağın doğal frekansları ve frekans parametreleri elde edilmiştir. Belirli ve klasik sınır şartları için hesaplanan frekans parametreleri, Li ve Daniels'in elde ettiği sonuçlarla ve bazı referanslarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, elde edilen sonuçlar ile referanslardaki sonuçların büyük doğrulukta örtüştüğü görülmüştür. İlaveten, daha yüksek modlar için de frekanslar ve frekans parametreleri hesaplanmıştır. Mevcut metotla ihtiyaç hissedildiği kadar frekans parametresi elde edilebilmektedir.

Fourier serileri, özellikle klasik sınır şartlı plak çözümlerinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Ancak, Fourier serileri tek başına klasik olmayan sınır şartlarına sahip plaklarda, süreksizlik vb. muhtemel problemler yüzünden tam olarak yeterli gelmemektedir. Bu tür problemlerde, plağın belirli sınır şartlarını sağlamak ve plağın hareketine ait diferansiyel denkleminin çözümünü sağlamak için, Fourier seri açılımları veya trigonometrik fonksiyonlu kombinasyonlarla birlikte polinomlar kullanılmaktadır. Üçüncü bölümde gösterildiği gibi, bu çalışmada da, sinüs serilerinden oluşan çift Fourier serisi ile belirli bir polinomun toplamından oluşan bir çözüm fonksiyonu kullanılmıştır.

Denklem (3.33)'deki m ve n terimleri, M ve N gibi belirli bir değere kadar sürdürülebileceği açıktır. Daha önce belirtildiği gibi Galerkin prosedürü sonsuz terime kadar uygulandığında kesin çözüm elde edilmektedir. Ancak, bazı durumlarda, çok küçük terim sayılarında bile doğru değerler elde edilebilmiştir.

Yay ve sönüm parametreleri değerlerinin değiştirilmesiyle çeşitli sınır şartlı plak modelleri elde edilebildiği görülmüştür. Bazı plak modellerinde, ankastre, basit, serbest gibi kenarları elde edebilmek için yay ve sönüm parametrelerinin değerinin sıfıra veya ∞ gibi çok büyük değerlere değiştirilmesi gerekebilmektedir. Ancak, yay ve sönüm katsayılarının sıfır veya sonsuz (∞) alınması, bazen sistemde süreksizlik oluşmasına, dolayısıyla kararsızlıklara sebep olmaktadır. Bu tür sorunlarla karşılaşıldığında veya böyle problemlerden kaçınmak amacıyla, sıfır (0) sayısal değerinin yerine 10^{-15} , 10^{-20} gibi çok küçük bir sayının, sonsuz (∞) ifadesinin yerinede 10^{15} , 10^{20} gibi bir sayının girilmesi gerektiği görülmüştür.

Ayrıca daha farklı sınır şartları için frekans parametreleri hesaplanmış ve mod biçimleri gösterilmiştir. Farklı yay katsayıları için, plağın mod şekillerinin değişimi incelenmiştir. Elde edilen şekillerden doğrusal yayların, hem düşey yer değiştirmeyi, hem de mod şekillerinin değişimini önemli oranda etkilediği görülmüştür. Burulma yaylarının ise, plak yer değiştirmesi üzerindeki etkisinin çok az olduğu, doğrusal yaylarda olduğu gibi, ancak mod şekillerini önemli oranda etkilediği görülmüştür. Ayrıca doğrusal yayların plak frekansları üzerinde, burulma yay katsayılarına göre çok daha etkili olduğu tespit edilmiştir.

Sönümlü durum için, $x = 0, x = a$ kenarları boyunca elastik yaylarla ve sönüm elemanlarıyla destekli, diğer kenarlarından basit mesnetli plağın, çeşitli sönüm ve yay parametreleri için titreşim hareketi incelenmiştir. Sönümsüz durumdaki öz değerlere (doğal frekanslara) karşılık gelen, λ_i kök değerleri elde edilmiştir. Beklendiği gibi tüm kökler negatif işaretli olarak elde edilmiştir. Buda plak titreşiminin genliğinin üstel olarak azalacağını göstermektedir. Ayrıca, elde edilen λ kökleri genellikle karmaşık ve birbirine eşlenik olarak çıkmıştır. Bilindiği gibi, bu karmaşık kökün negatif reel (gerçel) kısmı genlikler eğrisini, sanal kısmı ise harmonik veya periyodik titreşimleri meydana getirmektedir. Dolayısıyla, sanal

kısımın büyüklüğü oluşan titreşimin büyüklüğünü ifade etmektedir. Sanal kısmın sıfır olması da plakta titreşimin oluşmadığını göstermektedir. İşte bundan hareketle sanal kısmın sıfıra yakın olması, plaktaki sönümün kritik sönüme yakın olduğunu göstermektedir.

Mevcut plakta elde edilen λ_i karmaşık köklerinin sayısı M ve N terim sayısı artınca artmaktadır. Bu durumda birçok karmaşık kök ortaya çıkmaktadır. Bu karmaşık sayıların her birinin, sanal kısımlarını sıfır yapacak sönüm değerlerini analitik olarak bulmak çok zorlaşmaktadır. Bu zorluktan dolayı, çeşitli yay ve sönüm parametrelerine sahip, farklı plak modellerinin kritik sönümleri ve aynı zamanda sönümlenme zamanları, şekillerden ve λ_i köklerinin sanal kısımlarından yaklaşık olarak tahmin edilmeye çalışılmıştır. Yukarıda sönümlü durum için elde edilen tüm kökler ve şekiller terim sayıları $M=N=1$ alındığı durumda elde edilmiştir. Dolayısıyla sönümlü durum için elde edilen sonuçların, yaklaşık olduğu söylenebilir. Terim sayılarının $M=N=1$ alınması, az da olsa çözümdeki başlangıç yer değiştirmelerini de etkilediği görülmüştür. Terim sayısı arttırılınca, başlangıç yer değiştirmeleri ve diğer parametreler daha doğru elde edilecektir. Yüksek terim sayılarında yaklaşık olarak $(M+N)^2$ kadar λ_i kökü elde edildiği de tespit edilmiştir. Buda, hem hesaplama zorluğunu yeterince arttırmakta, hem de bir o kadar başlangıç şartını belirlemeyi gerektirmektedir.

Tezin asıl amacı, sönümlü plak modelinin oluşturulması, diferansiyel denkleminin çözülebilmesi, plak kenarlarındaki sönümün ve elastik elemanların, plak titreşimleri üzerindeki etkisinin incelenmesi olduğu için, sönümlü model için terim sayısının $M=N=1$ alınmasında hiçbir dezavantaj görülmemiştir. Zira sönümsüz bir sistem için terim sayısı zaten $M=N=1$ alınarak metodun doğruluğu gösterilmiştir.

Plak kenarlarına uygulanan sönüm elemanlarının, çeşitli sönüm katsayıları için, plak titreşimlerinin zamanla değişimi incelenmiştir. Yay katsayıları değişiminde olduğu gibi, sönüm katsayılarının değişimiyle, faz farklarına benzer değişimlerin oluşmasından, sönümlü doğal frekansın değiştiği anlaşılmaktadır. Ankastre kenarlara ve basit destekli kenarlara sönüm eklemenin, bu kenarlar açısından bir katkısının olmadığı beklendiği gibi görülmüştür. Buda çözümün doğruluğunun sağlaması

olarak düşünülebilir. Yukarıda verilen yay ve sönüm parametrelerine göre, incelenen plak modelleri için yapılan örnek çözümlerde, sönümleme zamanlarının yaklaşık $t_s \cong 1-5$ saniye civarlarında, kritik sönümlerin ise $c_{kritik} \cong 15-20 \text{ Ns/m}^2$ civarında olduğu söylenebilir. Ancak daha farklı sınır şartlarına sahip plak modelleri için, kritik sönümlerin ve sönümleme zamanlarının farklı olabileceği açıktır.

Karşılıklı iki kenarı elastik ve sönüm destekli ince plak için, daha birçok durum incelenebilir. Örneğin, yay ve sönüm değerlerinin ve frekans parametrelerinin, plak boyut oranlarına göre değişimi, plak malzemesi ile frekans parametreleri değişimi, mevcut plağın çeşitli yükler altındaki, zorlanmış titreşimleri incelenebilir. Yay ve sönüm değerleri değiştirilerek, daha birçok farklı sınır şartlı plak modeli oluşturularak incelenebilir. Frekans analizi plak modelinin davranışı hakkında çok önemli ipuçları vereceği açıktır.

Mevcut elastik ve sönüm mesnetli tek bir plak modelindeki yay ve sönüm katsayılarının kolayca değiştirilmesiyle türetilen 28 farklı sınır şartlı plak modelinin serbest titreşimleri incelenmiştir. İncelenen bu dikdörtgen plak modellerin 19 tanesi kenarlarında sönüm elemanı olmayan yani sönümsüz, 9 tanesi ise sönümlü modeldir. Sönüm ve yayların değişik değerler almasıyla, EBDB, YBDB, MBDB, (YD)B(ED)B, (MD)B(YD)B vb. daha birçok farklı sınır şartlı plak modeli daha türetilip incelenebilecektir. Dolayısıyla sönüm ilave edildiği zaman, klasik olmayan sınır şartlı plak modellerinin çözümü de rahatlıkla yapılabilecektir. Birçok farklı plak modellerinin çözümlerini, her bir model için ayrı ayrı, zor ve sıkıcı analitik çözümler yaparak elde etmek yerine, elde edilen çözüm fonksiyonu ile her birisinin kolaylıkla çözülebildiği görülmüştür.

Yukarıda yapılan analitik ve sayısal hesaplardan ve örneklerden, elde edilen şekil ve tablolardan hareketle, sınır şartlarını içinde barındıran polinom ve Fourier serisinin toplamından oluşan çözüm fonksiyonunun, elastik ve sönüm destekli ince plakların çözümünde güvenilir bir şekilde kullanılabilmesi gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlardan ve grafiklerden, sadece plak kenarlarına yerleştirilen sönüm elemanlarının, tüm plak titreşimlerinin sönümlemesinde kullanılabilmesi görülmüştür. Özellikle küçük ve orta sönüm büyüklüklerinde çok doğru sonuçlar

elde edilmiştir. Ancak bazı durumlarda, yüksek sönüm oranlarında kararsızlıklar tespit edilmiştir. Bunun nedeni tam olarak tespit edilememiş olup M ve N terim sayılarının küçük alınmasından kaynaklanıyor olabileceği tahmin edilmektedir.

Pratik hayatta kullanılan plak kenarlarına veya belirli hatlar boyunca elastik ve sönüm elemanları konularak tasarımlar yapılabilir. Bu elemanlar kullanım ve tasarıma göre, farklı tasarımlarda metal yaylar, amortisörler olabileceği gibi, çeşitli kauçuk malzemeler, keçeler, mantarlar, elyaf ürünler, hava yastığı, çeşitli direngenlik ve sönüm değerlerine sahip ürünler gibi birçok ürün olabilir. Yay katsayıları yüksek ancak sönüm oranları düşük malzemeler yay yerine, sönüm oranları yüksek yay katsayıları düşük malzemeler sönüm elemanı yerine kullanılabilir gibi, sönümlenme özelliğine ve belli bir direngenliğe sahip malzemeler, hem yay hem de sönüm elemanı yerine kullanılabilir. Bu çalışmada görüldüğü gibi, plağın doğal frekanslarını birçok parametre etkileyebilmektedir. Dolayısıyla plağın çalışma frekansını doğal frekansından uzak tutacak parametrelere ve katsayılara sahip elastik ve sönüm elemanları kullanılmalıdır.

KAYNAKLAR

- [1] AMABILI, M., "Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates", Cambridge University Press, ISBN-13:978-0-521-88329-0, 2008.
- [2] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S., "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1959.
- [3] SZILARD, R., "Theories and Applications of Plate Analysis", New Jersey, John Willey & Sons, Inc., ISBN:0-471-42989-9, 2004.
- [4] VENTSEL, E., KRAUTHAMMER, T., "Thin Plates and Shells", Marcel Dekker, Inc, Newyork, ISBN:0-8247-0575-0, 2001.
- [5] LAGNESE, J.E., "Boundary Stabilization of Thin Plates", SIAM Studies In Applied Mathematics, Philadelphia, ISBN: 0-89871-237-8, 1989.
- [6] BERKTAY, İ., "Plak Teorisi ve Uygulamaları", Yıldız Teknik Üniversitesi, Sayı 237, İstanbul. 1992.
- [7] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.,M., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, ISBN:0--7-Y85821-7, 1963.
- [8] MINDLIN, R.D., "Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates", World Scientific Publishing, ISBN 981-270-381-0, 2006.
- [9] LIEW, K.M., WANG, C.M., XIANG, Y., KITIPORNCHAI, S., "Vibration of Mindlin Plates", Elseiver, ISBN: 0 08 043341 3, 1998.
- [10] LEISSA, A.W., "Vibration of Plates", NASA SP-160, Government Printing Offices, Washington, D.C., U. S. 1969.
- [11] TIMOSHENKO, S.P., "History of Strength of Materials", McGraw-Hill, New York. 1953.
- [12] SOEDEL, W., "Vibrations of Shells and Plates", Third Edition, Marcel Dekker INC., ISBN: 0-8247-5629-0, 2004.
- [13] RAO, S.S., "Vibration of Continuous Systems", John Wiley & Sons, ISBN-13:978-0-471-77171-5, 2007.

- [14] LEISSA, A.W., "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 257-293, 1973.
- [15] ELISHAKOFF, I., STERNBERG, A., "Vibration of rectangular plates with edge-beams", *Acta Mechanica* 36, 195–212, 1980.
- [16] ELISHAKOFF, I., LIN, Y.K., XHU, L.P., "Probabilistic and Convex Modeling of Acoustically Excited Structures", Elsevier, Amsterdam, Netherlands, Chapter VIII, 1994.
- [17] GORMAN, D.J., SHARMA, R.K., "A comprehensive approach to the free vibration analysis of rectangular plates by use of the method of superposition", *Journal of Sound and Vibration* 47, 126-128, 1976.
- [18] GORMAN, D.J., "Free vibration analysis of cantilever plates by the method of superposition", *Journal of Sound and Vibration* 49,453-467, 1976.
- [19] GORMAN, D.J., "Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition", *Journal of Sound and Vibration*, 57(3), 437-447, 1978.
- [20] SINGHAL, R.K., GORMAN, D.J., "Free vibration of partially clamped rectangular plates with and without rigid point supports", *Journal of Sound and Vibration* 203(2), 181-192, 1997.
- [21] GORMAN, D.J., "Accurate free vibration analysis of point supported Mindline plates by the superposition method", *Journal of Sound and Vibration* 219(2), 265-277, 1999.
- [22] GORMAN, D.J., "Free vibration analysis of completely free rectangular plates by the superposition-Galerkin method", *Journal of Sound and Vibration* 237(5), 901-914, 2000.
- [23] GORMAN, D.J., "Free vibration analysis of corner-supported rectangular plates with symmetrically distributed edge beams", *Journal of Sound and Vibration* 263, 979–1003. 2003.
- [24] GORMAN, D.J., "Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration* 27, 311–333, 2004.
- [25] GORMAN, D.J., "Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method superposition", *Journal of Sound and Vibration* 272, 831–851, 2004.
- [26] GORMAN, D.J., "Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported", *Journal of Sound and Vibration* 294, 131–161, 2006.

- [27] GORMAN, D.J., "Vibration analysis of plates by the superposition method", World Scientific, ISBN:981-02-3681-6, 1999.
- [28] BARDELL, N.S., LANGLEY, R.S., DUNSDON, J.M., "On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration* 191(3), 459-467, 1996.
- [29] KOBAYSHI, Y., YAMADA, G., HONMA, S., "In-plane vibration of point-supported rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 126(3), 545-549, 1988.
- [30] GUTIERREZ, R.H., LAURA, P.A.A., "In-plane vibration of thin elastic rectangular plates elastically restrained against translation along the edges", *Journal of Sound and Vibration* 132 (3), 512–515, 1989.
- [31] HYDE, K., CHANG, J.Y., BACCA, C., WICKERT, J.A., "Parameters studies for plane stress in-plane vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration* 247(3), 471-487, 2001.
- [32] VEL, S.S., BATRA, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration* 272, 703–730, 2004.
- [33] FEBBO, M., VERA, S.A., LAURA, P.A.A., "Free, transverse vibrations of thin plates with discontinuous boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration* 281, 341–356, 2005.
- [34] ZHOU, D., JI, T., "Free vibration of rectangular plates with internal column supports", *Journal of Sound and Vibration* 297, 146–166, 2006.
- [35] WU, J.H., LIU, A.Q., CHEN, H.L., "Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions", *Journal of Applied Mechanics*, vol 74, 1247, 2007.
- [36] BAHRAMI, M.N., LOGHMANI, M., POOYANFAR, M., "Analytical Solution for Free Vibration of Rectangular Kirchhoff Plate from Wave Approach", *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Volume 29, ISSN 1307-6884, 2008.
- [37] LOW, K.H., CHAI, G.B., LIM, T.M., SUE, S.C., "Comparisons of experimental and theoretical frequencies for rectangular plates with various boundary conditions and added masses", *International Journal Mech. Sci.*, Vol 40, 1119-1131, 1998.
- [38] LIM, C.W., LU, C.F., XIANG, Y., YAO, W., "On new symplectic elasticity approach for exact free vibration solutions of rectangular Kirchhoff plates", *International Journal of Engineering Science* 47, 131–140, 2009.

- [39] HUANG, M.H., THAMBIRATNAM, D.P., "Analysis of plate resting on elastic supports and elastic foundation by finite strip method", *Computers and Structures* 79, 2547-2557, 2001.
- [40] HSU, M.H., "Vibration Characteristics of Rectangular Plates Resting on Elastic Foundations and Carrying any Number of Sprung Masses", *International Journal of Applied Science and Engineering*, 4, 1: 83-89, 2006.
- [41] CIVALEK, O., "Elastik zemine oturan yapıların hesap yöntemlerine genel bir bakış", *Türkiye Mühendislik Haberleri*, Sayı 432-4, 2004.
- [42] MERMERTAS, V., GURGOZE, M., "Preservation of the fundamental natural frequencies of rectangular plates with mass and spring modifications", *Journal of Sound and Vibration* 276, 440–448, 2004.
- [43] WU, J.S., LUO, S.S., "Use of the analytical-and-numerical-combined method in the free vibration analysis of a rectangular plate with any number of point masses and translational springs", *Journal of Sound and Vibration* 200(2), 179-194, 1997.
- [44] CHEUNG, Y.K., ZHOU, D., "Vibrations of rectangular plates with elastic intermediate line-supports and edge constraints", *Thin-Walled Structures* 37, 305–331, 2000.
- [45] HUANG, M.H., THAMBIRATNAM, D.P., "Free vibration analysis of rectangular plates on elastic intermediate supports", *Journal of Sound and Vibration* 240(3), 567-580, 2001.
- [46] GORMAN, D.J., "Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries", *Journal of Sound and Vibration* 285, 941–966, 2005.
- [47] ZHOU, D., "Natural frequencies of elastically restrained rectangular plates using a set of static beam functions in the Rayleigh-Ritz method", *Computers & Structures*, Volume 57, Issue 4, Pages 731-735, 1995.
- [48] ZHOU, D., "Natural frequencies of rectangular plates using a set of static beam functions in Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 189, Issue 1, Pages 81-87, 1996.
- [49] LEE, L.T., LEE, D.C., "Free vibration of rectangular plates on elastic point supports with the application of a new type of admissible function", *Computer & Structures*, Vol. 65, No. 2, pp. 149-156, 1997.
- [50] ZHOU, D., CHEUNG, Y.K., "Free vibration of line supported rectangular plates using a set of static beam functions", *Journal of Sound and Vibration* 223(2), 231-245, 1999.

- [51] LI, W.L., DANIELS, M., "A Fourier series method for the vibrations of elastically restrained plates arbitrarily loaded with springs and masses", *Journal of Sound and Vibration* 252(4), 768-781, 2002.
- [52] LI, W.L., "Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports", *Journal of Sound and Vibration* 273, 619-635, 2004.
- [53] DU, J., LI, W.L., JIN, G., YANG, T., LIU, Z., "An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges", *Journal of Sound and Vibration* 306, 908-927, 2007.
- [54] LI, W.L., ZHANG, X., DU, J., LIU, Z., "An exact series solution for the transverse vibration of rectangular plates with general elastic boundary supports", *Journal of Sound and Vibration* 321, 254-269, 2009.
- [55] KHOV, H., LI, W.L., GIBSON, R.D., "An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions", *Composite Structures* 90, 474-481, 2009.
- [56] ZHANG, X., LI, W.L., "Vibrations of rectangular plates with arbitrary non-uniform elastic edge restraints", *Journal of Sound and Vibration* 326, 221-234, 2009.
- [57] DU, J., LI, W.L., LIU, Z., YANG, T., JIN, G., "Free vibration of two elastically coupled rectangular plates with uniform elastic boundary restraints", *Journal of Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2010.08.044, 2010.
- [58] ZHANG, X., LI, W.L., "A unified approach for predicting sound radiation from baffled rectangular plates with arbitrary boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration* 329, 5307-5320, 2010.
- [59] DAL, H., MORGUL, O.K., "Static Solution Of Elastically Supported Plates Using Polynomial Functions", *IMS'2010 7th International Symposium On Intelligent Manufacturing Systems*, Sarajevo, Bosnia Herzegovina, September 15-17, 2010.
- [60] ZARUBINSKAYA, M.A., VAN HORSSSEN, W.T., "On the free vibrations of a rectangular plate with two opposite sides simply supported and the other sides attached to linear springs", *Journal of Sound and Vibration* 278, 1081-1093, 2004.
- [61] ZARUBINSKAYA, M.A., VAN HORSSSEN, W.T., "Coupled torsional and vertical oscillations of a beam subjected to boundary damping". 298, *Cilt Journal of Sound and Vibration*, s. 1113-1128, 2006
- [62] HIJMISSSEN, J.W., VAN HORSSSEN W.T., "On the weakly damped vibrations of a vertical beam with a tip-mass", *Journal of Sound and Vibration* 310, 740-754, 2008.

- [63] ZARUBISKAYA, M.A., VAN HORSSSEN, W.T., "On aspects of boundary damping for a rectangular plate", *Journal of Sound and Vibration* 292, 844–853, 2006.
- [64] MORGÜL, Ö.K., KÜÇÜKRENDEÇİ, İ., "Effect of the Mechanical Properties of Composite Laminated Plates on Free Vibrations". , *Science and Engineering of Composite Materials*, Vol. 15, No. 4, 313-327, 2008.
- [65] MORGÜL, Ö.K., KÜÇÜKRENDEÇİ, İ., "Nonlinear Vibration Analysis Of Laminated Composite Plates in Symetrical", *IKS-2005 Proceedings: ISBN 975-00132-0-449*.
- [66] JACQUOT, R.G., "Suppression of random vibration in plates using vibration absorbers", *Journal of Sound and Vibration* 248(4), 585-596, 2001.
- [67] ULZ, M.H., Semercigil, Semercigil, S.E., "Vibration control for plate-like structures using strategic cut-outs", *Journal of Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2007.06.068, 2007.
- [68] PARK, C.H., BAZ, A., "Vibration control of bending modes of plates using active constrained layer damping", *Journal of Sound and Vibration* 227(4), 711-734, 1999.
- [69] LIU, X., HUA, H.S., ZHANG, Z., "Robust control of plate vibration via active constrained layer damping", *Thin-Walled Structures* 42, 427–448, 2004.
- [70] YEH, J.Y., CHEN, L.W., "Finite element dynamic analysis of orthotropic sandwich plates with an electrorheological fluid core layer", *Composite Structures* 78, 368–376, 2007.
- [71] LIN, Q., ERMANNI, P., "Semi-active damping of a clamped plate using PZT", *International Journal of Solids and Structures* 41, 1741–1752, 2004.
- [72] NARAYANA, G.V., GANESAN, N., "Critical comparison of viscoelastic damping and electrorheological fluid core damping in composite sandwich skew plates", *Composite Structures* 80, 221–233, 2007.
- [73] DAL, H., MORGÜL, Ö.K., ŞAHİN, İ., "Artificial Neural Network - Based Vibration Control Of A Tractor Seat With Magnethorheological Damper", *IMS'2008 6th International Symposium On Intelligent And Manufacturing Systems Features, Strategies And Innovation, Sakarya, TURKEY*. October 14-16, 2008.
- [74] YAVUZ, A.K., PHOENIX, S.L., TERMAATH, S.C., "Multiple Crack Analysis in Finite Plates", *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 11, pp. 2535-2541, 2006.

- [75] PHOENIX, S.L., YAVUZ, A.K., PAPOULIA, K.D., HUI, C.Y., "Buckling Analysis of Delaminated and Stitched Composite Plate System under Hygro-thermal Pressure", ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 128, No. 1, pp. 117-122, 2006
- [76] YAVUZ, A.K., PAPOULIA, K.D., PHOENIX, S.L., HUI, C.Y., "Stability Analysis of Stitched Composite Plate System with Delamination under Hygro-thermal Pressure", AIAA Journal, Vol. 44, No. 7, pp. 1579-1585, 2006.
- [77] NAYYAR, K., "Statik and modal analyses of laminated composite plates using hierarchical finite element method", Master of Science Thesis, Concordia University, Canada, 2006.
- [78] QATU, M.S., "Vibration of Laminated Shells and Plates", Elsevier Academic Press, sh 179, ISBN-10: 0080442714, 2004.
- [79] QUEK, S.S., LIU, G.R., "The Finite Element Method:A Practical Course", Butterworth-Heinemann, ISBN-13: 978-0750658669, 2003.
- [80] HUANG, CHIUNG-SHIANN, Singularities in plate vibration problems. Ph.D. Thesis, The Ohio State University, 1991.
- [81] LI, W.,L., "Free vibrations of beams with general boundary conditions", Journal of Sound and Vibration, 237(4), 709-725, 2000.
- [82] ZHOU, D., "Discussion on 'free vibrations of beams with general boundary conditions' ", Journal of Sound and Vibration 257(3), 589–592, 2002.
- [83] LI, W.L., Reply to: Discussion on "Free vibrations of beams with general boundary conditions", Journal of Sound and Vibration, 257(3), 593–595, 2002.
- [84] LI, W.L., "Dynamic analysis of beams with arbitraryelastic supports at both ends", Journal of Sound and Vibration 246, 751-756, 2001.
- [85] WANG, J., QIAO, P., "Vibration of beams with arbitrary discontinuities and boundary conditions", Journal of Sound and Vibration 308, 12–27, 2007.
- [86] CHAKRAVERTY, S., "Vibration of Plates", CRC Press, ISBN-13: 978-1-4200-5395-1, 2009.

EKLER

Galerkin Metodunun Tanıtılması

Bu metod, varyasyonel prensibinin Rus bilim adamı olan Galerkin B.G., tarafından tekrar formüle edilerek, virtüel iş prensibinin daha fazla genelleştirilmesi ve basitleştirilmesi sonucu ortaya çıkmıştır. Galerkin metodu, içinde kısmi diferansiyel denklem barındıran problemler, plak ve kabukların stabilite problemleri, doğrusal ve doğrusal olmayan titreşim problemleri, küçük ve geniş deformasyon teorileri gibi birçok çeşitli problem tiplerine başarılı olarak uygulanabilmektedir. Galerkin metodunun matematiksel teorisi oldukça karmaşık olmasına rağmen, fiziksel olarak yorumlanması basittir.

Bu metoda göre, yapı sisteminin dengede olduğu kabul edilerek hesaplamalar yapılmaktadır. Bir plak elemanının da dengede bulunduğu bir an için, sisteme etki eden iç ve dış kuvvetlerin toplamı sıfır olur. Buna göre, sonsuz küçük 3D bir plak elemanının dengesi için, diferansiyel denklem ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{L}_1(u, v, w) - p_x = 0 \quad (\text{Ek.1})$$

$$\mathcal{L}_2(u, v, w) - p_y = 0 \quad (\text{Ek.2})$$

$$\mathcal{L}_3(u, v, w) - p_z = 0 \quad (\text{Ek.3})$$

Burada \mathcal{L} diferansiyel operatör, p_x, p_y, p_z dış kuvvetlerdir. u, v, w ise x, y, z yönlerindeki yer değiştirme bileşenleridir. Homojen bir plak denklemi için dış kuvvetler, $p_x = p_y = p_z = 0$ olur. Kirchhoff plağının eğilmesi için, diferansiyel denklem sadece dikey yöndeki (z yönündeki) w bileşenine bağlı olur.

İnce plak elemanı eğilmesi için diferansiyel denklem, aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu durumda, yukarıdaki diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi en basit hale indirgenmiş olur.

$$\mathcal{L}(w) = 0 \quad (\text{Ek.4})$$

Plağın z yönündeki küçük yer değiştirme fonksiyonunun, diferansiyel boyuttaki küçük keyfi varyasyonu δw ile ifade edilsin. Dış ve iç kuvvetlerin virtüel işleri, sistemin potansiyel enerjisi tanımlanmadan doğrudan diferansiyel denge denklemlerinden elde edilebilmektedir. Dengeye bulunan bir plak elemanı için virtüel işler toplamı aşağıdaki gibi sifıra eşit olur.

$$\delta W_i + \delta W_e = \delta(W_i + W_e) = 0 \quad (\text{Ek.5})$$

Buradan hareketle sonsuz küçük ve dengedeki bir plak elemanının virtüel iş ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{L}(w)\delta(w) = 0 \quad (\text{Ek.6})$$

Bu denklem, plağın tüm alanı boyunca integre edilecek olursa aşağıdaki gibi olur.

$$\iint_A \mathcal{L}(w)\delta(w)dA = 0 \quad (\text{Ek.7})$$

Bu varyasyonel denklemler, incelenen diferansiyel denklemin kesin çözümleri olan u, v, w yer değiştirme fonksiyonları için geçerlidir. Dolayısıyla u, v, w fonksiyonlarının doğru seçimi çok önemlidir. İncelenen plak problemi için, yukarıda belirtildiği gibi sadece w fonksiyonu mevcuttur. Yer değiştirme fonksiyonu w aşağıdaki gibidir.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \psi_{mn}(x, y) \quad (\text{Ek.8})$$

Burada $\psi_{mn}(x, y)$ bütün tanımlı sınır şartlarını sağlayan bir fonksiyondur. A_{mn} ise bilinmeyen sabit katsayıdır. Ayrıca, $\psi_{mn}(x, y)$ fonksiyonu diferansiyel denklemin, en yüksek dereceli türev derecesi kadar türevlenebilir olması gerekmektedir. Yer değiştirme fonksiyonu (Ek.8)'in varyasyon ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\delta w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) \delta A_{mn} \quad (\text{Ek.9})$$

Denklem (Ek.9), Denklem (Ek.7)'de yerine konulursa, Denklem (Ek.11) elde edilir.

$$\iint_A \mathcal{L}(w) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(x, y) \delta A_{mn} dA = 0 \quad (\text{Ek.10})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta A_{mn} \iint_A \mathcal{L}(w) \psi_{mn}(x, y) dA = 0 \quad (\text{Ek.11})$$

Bu denklem, δw 'nin her küçük varyasyonu için sağlanmak zorundadır. Dolayısıyla δA_{mn} açılım katsayısı keyfidir ve yukarıdaki ifadenin gerçekleştirilmesi için ihmal edilirse, Denklem (Ek.13) elde edilir.

$$\iint_A \mathcal{L}(w) \psi_{mn}(x, y) dA = 0 \quad (\text{Ek.12})$$

$$\iint_A \mathcal{L}(w) \psi_{mn}(x, y) dx dy = 0 \quad (\text{Ek.13})$$

Bu ifadenin tüm yapı elemanı üzeri boyunca integrasyonu, bilinmeyen A_{mn} katsayılarının bulunabilmesi için, cebirsel lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin çözülmesiyle, bilinmeyen A_{mn} katsayıları elde edilir. Eğer plak eğilmesi için titreşim analizi inceleniyorsa, A_{mn} özvektörleri ve ω_{mn} özdeğerleri elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin DAL, 1975 Manisa-Demirci doğumludur. İlk ve orta öğrenimini Kütahya Simav'da tamamladı. 1996 yılında SAÜ, SMYO Demiryolu ve Araçları programını birincilikle bitirerek SAÜ, Müh. Fak. Makine Mühendisliği Bölümüne devam etti. Lisans eğitimini tamamlayınca çok kısa bir süre özel sektörde çalıştıktan sonra, askerlik hizmetini yedek subay olarak tamamladı. 2004 yılında SAÜ, FBE'de yüksek lisansı tamamladı. Aynı yıl, aynı üniversitede doktora eğitimine başladı. 2002 yılından beri SAÜ Makine Mühendisliği bölümünde Arş. Gör. olarak çalışmaktadır