T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS DENKLEMLERİNİN SİNGÜLER DEĞER AYRIŞIMI İLE YAKLAŞIK SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sinem ŞİMŞEK

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Tez Danışmanı	:	Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR

Temmuz 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS DENKLEMLERİNİN SİNGÜLER DEĞER AYRIŞIMI İLE YAKLAŞIK SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sinem ŞİMŞEK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 05/07/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR	Prof. Dr. Refik KESKİN	Prof. Dr. İbrahim OKUR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Tez konusu seçiminde ve çalışmalarımda bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım hocam sayın Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR'e, fikirleriyle destek ve yardımlarını gördüğüm Tuğba PETİK'e, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen değerli aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Sinem ŞİMŞEK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$A, B, C, \ldots$	Matrisler $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{mxn}$
A^{+}	A matrisinin Moore-Penrose tersi
A^{-1}	A matrisinin tersi
$A \otimes B$	A ve B matrislerinin kronecker çarpımı
diag$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$	Köşegen elemanları $s_1, s_2, \ldots, s_n$ olan nxn boyutlu köşegen matris
dim$(.)$	Boyut
I	Uygun Boyutlu Birim Matris
$iz(A)$	$A \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisinin köşegen elemanlarının toplamı
$\mathcal{N}(A)$	A matrisinin sıfır uzayı
$x, x_0, h, \ldots$	Vektörler $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{nx1}$
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^{mxn}$	mxn boyutlu reel elemanlı matrislerin kümesi
S_A	A matrisinin sütun uzayı
SVD	Singüler Değer Ayrışımı (Singular Value Decomposition)
$(.)^T$	Transpoze
$\in$	Elemanıdır
vec	Vektör operatörü

MATRİS DENKLEMLERİNİN SİNGÜLER DEĞER AYRIŞIMI İLE YAKLAŞIK SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Moore-Penrose ters, en küçük kareler çözümü, singüler değer ayrışımı (SVD), tutarsız matris denklemi, en iyi yaklaşık simetrik çözüm.

Çalışmanın ilk bölümünde SVD kavramı ve onun tarihsel gelişimi özetlenmektedir.

İleriki bölümlerde temel araçlar olacak olan bazı kavram ve teoremler Bölüm 2'de sunulmaktadır. Sonraki bölümde SVD detaylı bir biçimde tartışılmakta ve sayısal bir örnek verilmektedir.

Bölüm 4'de, önce, lineer denklem sistemleri ile ilgili genel bir teoriden bahsedilmektedir. Sonra $Ax = g$ sisteminin tutarsız olması durumunda en küçük kareler çözümleri arasından x vektörünü bulma problemine en iyi yaklaşık çözüm sunulmaktadır.

Bölüm 5'de, ilk olarak Bölüm 4'deki sonuçlar $AXB = C$ lineer matris denklemlerine genişletilmektedir. İkinci olarak $AXB = C$ lineer matris denklemi ve $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlılığı için gerekli ve yeterli koşullar SVD yardımıyla verilmektedir. Son olarak bu denklemlerin çözümleri için genel bir ifade yine SVD kullanılarak ortaya koyulmaktadır.

Sonraki bölümde, $AXB = C$ tutarlı matris denkleminin özel bir durumu olan $AX = C$ tutarlı matris denkleminin simetrik çözümleri verilmektedir.

Bölüm 7'de, son zamanlarda litaratürde çalışılmakta olan, $AXB = C$ matris denkleminin tutarsız olması durumunda en küçük kareler simetrik çözümleri arasından simetrik X matrisini bulma problemine en iyi yaklaşık çözüm SVD kullanılarak ele alınmaktadır. Ayrıca ortaya koyulan başlıca teorik sonuçları açıklamak için sayısal bir örnek de verilmektedir.

APPROXIMATE SYMMETRIC SOLUTIONS OF MATRIX EQUATIONS BY SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

SUMMARY

Keywords: Moore-Penrose inverse, least squares solution, singular value decomposition (SVD), inconsistent matrix equation, best approximate symmetric solution.

In the first chapter of the work, the concept of the SVD and its historical evolution are summarized.

Some concepts and theorems that will be fundamental tools for the further chapters are introduced in the Chapter 2. In the next chapter, the SVD is discussed in detail and a numerical example is given.

In the Chapter 4, first, a general theory about the linear equations systems is mentioned. Then, the best approximate solution to the problem of finding the vector x from among the least squares solutions set of the system $Ax = g$ if it is inconsistent is presented.

In the Chapter 5, firstly the results in the Chapter 4 are extended for the linear matrix equation $AXB = C$, secondly the necessary and sufficient conditions for consistency of the linear matrix equation $AXB = C$ and the linear equations system $Ax = g$ are given via the SVD. Finally, the general expression for the solutions of these equations is also established using the SVD again.

The symmetric solutions of the consistent matrix equation $AX = C$ which is a special case of the consistent matrix equation $AXB = C$ are given in the next chapter.

In the Chapter 7, the best approximate solution to the problem, studied in the literature recently, finding the symmetric matrix X from among the least squares symmetric solutions set of the linear matrix equations $AXB = C$ if it is inconsistent is considered using the SVD. Moreover, a numerical example to explain the main theoretical results established is given as well.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matrisler teorisinde, matris ayrışımlarından biri olan singüler değer ayrışımı, çeşitli bilim alanlarında problemlerin çözümünde sağladığı pratiklik açısından önemli bir yere sahiptir.

Singüler değer ayrışımı, ilk olarak iki uzayın lineer bağımsız ortogonal dönüşümleri aracılığı ile bir reel bilineer formun diğerine eşit yapılıp yapılmayacağını belirlemek isteyen diferensiyel geometriciler tarafından geliştirilmiştir. 1873 ve 1874 yıllarında Eugenio Beltrami ve Camile Jordan, matris olarak temsil edilebilen bilineer formların ortogonal dönüşümler altındaki değişmezlerinin bir tam kümesini oluşturan singüler değerleri bulmuşlar; 1889 yılında ise James Joseph Sylvester, reel kare matrislerin singüler değer ayrışımını yapmış ve singüler değerleri, ayrışımı yapılan matrisin kanonik çarpanları olarak isimlendirmiştir. Autonne diğer çalışmalardan bağımsız olarak 1915 yılında singüler değer ayrışımına, polar ayrışım vasıtasıyla ulaşmıştır. Dikdörtgensel ve kompleks matrisler için singüler değer ayrışımının ilk ispatını, singüler değer ayrışımına hermit matrisler için ana eksen dönüşümünün bir genellemesi olarak bakan, Carl Eckart ve Gale Young 1936 yılında yapmıştır. 1907 yılında ise Erhard Schmidt bazı zayıf varsayımlar altında kompakt olan integral operatörlerin singüler değerlerini tanımlamış ve bu teori ilk kez singüler değer terimini kullanan Emile Picard tarafından 1910 yılında geliştirilmiştir. Singüler değer ayrışımını pratik hesaplama yöntemleri 1954-1955 yıllarında Kogbetliantz ve 1958 yılında Hestenes'e kadar uzanır. 1965 yılında Gene Golub ve William Kahan singüler değer ayrışımını hesaplamak için bir metod yayınlamışlardır. 1970 yılında ise Golub ve Christian Reinsch bugün hala sıkça kullanılan Golub/Kahan algoritmasının değişik bir biçimini yayınlamıştır [20].

Çalışma boyunca SVD ile aşağıda açıklanacak kavram anlaşılacaktır.

$U \in \mathbb{R}^{mxm}$, $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ ortogonal matrisler ve $D \in \mathbb{R}^{rxr}$ köşegen olmak üzere, r ranklı bir $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \tag{1.1}$$

biçiminde ifade edilir. (1.1) ifadesindeki D köşegen matrisi $A^T A$ matrisinin öz değerlerinin pozitif karekökleri olduğundan A matrisindeki değişimler D matrisindeki değişimlere karşılık gelir [8]. Ayrıca ayrışımda sıfır öz değerleri dikkate alınmayarak gereksiz veriler atılmış böylece daha küçük boyutlu matrisler elde edilmiş olur. Ayrışımdaki U ve V matrisleri lineer bağımsız sütunlardan oluştuklarından dolayı singüler değer ayrışımı ilişkili değerleri, ilişkisiz değerlerin kümesine dönüştürür. Bu haliyle SVD, örneğin, istatistikte kullanım alanına sahiptir [22]. Mühendislikte ise bir yapısal sistemin singüler değer ayrışımının yapılması, klasik metotlara göre daha fazla bilgi açığa çıkarmasının yanı sıra, hesaplamalı alanda işlemci süresi ve hafıza kullanımında büyük avantajlara sahip olduğundan sistemin cevabının belirlenmesi anlamına gelir. Singüler değer ayrışımı veri madenciliği yapılacak, gereksiz yüzlerce değişkenden oluşan veri kümesinin boyutunu indirgemede sıkça kullanılan bir yöntemdir. Örneğin bir ürünün satışına ilişkin olarak düzenlenen veri kümesinde tüketicilerin telefon numaraları gereksiz bir değişken olarak yer alabilir. Bu tür gereksiz değişkenler elde edilecek örüntüleri kalitesizleştirebileceği gibi veri madenciliği sürecinin yavaşlamasına da yol açar. SVD bu tür problemlerde gereksiz verileri boşa çıkararak ihtiyaç duyulan bellek ve zaman miktarını azaltır [1, 2, 3].

Singüler değer ayrışımı, sağladığı bu avantajlar ile 20 yılı aşkın süredir araştırılan yüz tanıma teknikleri, kara yol köprülerinin deprem davranışlarını inceleme gibi güncel problemlerde sıkça kullanılan bir yöntemdir [4, 13, 17, 19].

$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $Ax = g$ lineer denklem sisteminde A matrisinin yerine (1.1)'deki singüler değer ayrışımı yazılırsa,

$$g = Ax = U\Sigma V^T x$$

olur. $g_1 = \Sigma V^T x$ olmak üzere,

$$g_1 = U^T g$$

yazılabilir. Böylece A matrisinin sütun uzayındaki g vektörü, U matrisinin sütun uzayında ifade edilmiş olur. Benzer şekilde herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü, V matrisinin sütun uzayına göre $x_1 = V^T x$ biçiminde ifade edilebilir. $Ax = g$ lineer denklem sisteminin her iki yanı soldan U^T ile çarpılır ve A matrisinin yerine (1.1)'deki singüler değer ayrışımı yazılırsa,

$$U^T g = U^T A x = U^T U \Sigma V^T x = \Sigma V^T x = \Sigma x_1$$

olur. Böylece, $U^T g = g_1$ ve $U^T g = \Sigma x_1$ eşitliklerinden $Ax = g$ lineer denklem sistemine denk ve çözümü daha kolay bulunabilen,

$$\Sigma x_1 = g_1$$

köşegen lineer denklem sistemi elde edilir.

A, B ve C matrisleri bilinen matrisler ve X matrisi bilinmeyen matris, $x = vecX$ ve $c = vecC$ olmak üzere $AXB = C$ matris denklemi,

$$(B^T \otimes A)x = c$$

klasik lineer denklem sistemi olarak yazılabilir.

Bu çalışmada başlıca olarak $AXB = C$ tutarsız matris denklemlerinin simetrik en küçük kareler çözümleri arasından en iyi yaklaşık çözümünü bulma problemi singüler değer ayrışımını kullanarak ele alınmaktadır. Yukarıda açıklanan fiziksel problemler ve SVD'nin sağladığı basitleştirmeden dolayı problem bu yaklaşım ile ele alınmaktadır. Çalışma uygulamalı bilimlerde ortaya çıkabilecek olan ve benzer matris denklemlerini içeren fiziksel problemlerin çözümünde kolaylık sağlayabilir. Çalışma boyunca reel elemanlı matrisler kullanılacaktır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan Moore-Penrose ters, kronecker çarpım, vec operatörü kavramları, Gram-Schmidt Yöntemi ve ilgili teoremler verilecektir.

2.1. Moore-Penrose Ters

Tanım 2.1.1. A matrisi bir mxn boyutlu matris ve G matrisi bir nxm boyutlu matris olmak üzere,

1) AGA=A ise G'ye A matrisinin bir genelleştirilmiş tersi denir ve G, A^{-} ile gösterilir.
2) AGA=A, GAG=G ise G'ye A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş tersi denir ve G, A_r^{-} ile gösterilir.
3) AGA=A, GAG=G ve GA simetrik ise G'ye A matrisinin bir minimum normlu yansımalı genelleştirilmiş tersi denir ve G, $A^{\sim}$ ile gösterilir.
4) AGA=A, GAG=G, GA ve AG simetrik ise G'ye A matrisinin Moore-Penrose tersi denir ve G, A^{+} ile gösterilir [9].

Teorem 2.1.2. Her A matrisi için bir Moore-Penrose ters var ve tektir [16].

Teorem 2.1.3. Herhangi bir A matrisinin Moore-Penrose tersi A^{+} olmak üzere,

1) $(A^{+})^{+}$= A,
2) $(A^{T})^{+}$=$(A^{+})^{T}$,
3) $(A^{T}A)^{+}$=A^{+} $(A^{T})^{+}$, $(AA^{T})^{+}$=$(A^{T})^{+}A^{+}$,
4) $(AA^{+})^{+}$=AA^{+} ve $(A^{+}A)^{+}$=$A^{+}A$,
5) Eğer A=0_{mxn} ise, A^{+}=0_{nxm} ,

6) Tekil olmayan A matrisi için A^{+}=A^{-1}

dır [16].

Teorem 2.1.4. P, Q matrisleri sırasıyla mxm boyutlu ve nxn boyutlu ortogonal matrisler ve A matrisi mxn boyutlu herhangi bir matris olsun. Bu durumda,

$$(PAQ)^{+} = Q^{T}A^{+}P^{T}$$

dır [7].

Tanım 2.1.5. A matrisi, m_1xn_1 boyutlu matris ve B matrisi, m_2xn_2 boyutlu matris olsun. Bu durumda A ve B matrislerinin kronecker (direkt) çarpımı $A \otimes B$ olarak gösterilen $m_1 m_2$x$n_1 n_2$ boyutlu bir C matrisidir ve

$$C=\begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n_2} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & & Ab_{2n_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Ab_{m_21} & Ab_{m_22} & \cdots & Ab_{m_2n_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1n_2}A \\ b_{21}A & b_{22}A & & b_{2n_2}A \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m_21}A & b_{m_22}A & \cdots & b_{m_2n_2}A \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. C matrisinin, her biri m_1xn_1 boyutlu olan $m_2 n_2$tane alt matrisi içerdiğine ve C_{ij} ile gösterilen ij. alt matrisinin Ab_{ij} olduğuna dikkat etmek gerekir. Bazen C=(C_{ij})=(Ab_{ij}), i=1,2,…,m_2, j=1,2,…, n_2 şeklinde de yazılabilir [7].

Teorem 2.1.6. A=(a_{ij}) , B=(b_{ij}), C=(c_{ij}) ve D=(d_{ij}) uygun boyutlu matrisleri için,

1) $A \otimes B \otimes C$=$(A \otimes B) \otimes C$=$A \otimes (B \otimes C)$,
2) $(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D$,
3) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$,
4) $(A \otimes B)^{+}$=$A^{+} \otimes B^{+}$

dır [16].

Tanım 2.1.7. A matrisi, sütunları $a_i \in \mathbb{R}^m$ i=1,2,…,n olan mxn boyutlu bir matris olsun. mnx1 boyutlu $vecA$ vektörü,

$$vecA=(a_1^T, a_2^T, \dots, a_n^T)^T$$

olarak tanımlanır [15].

Teorem 2.1.8. A, B, C uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

$$vec(ABC)=(C^T \otimes \mathrm{A})vecB$$

dir [7].

2.2. Lineer Bağımsızlık ve Baz Kavramları

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^n$'de $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu, $i = 1, 2, \dots, m$ için c_i skaler olmak üzere $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_mv_m$ şeklindeki bir ifadedir [21].

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}^n$'de iki veya daha fazla vektörden oluşan kümeye, eğer vektörlerden biri diğerlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa lineer bağımlıdır denir. Lineer bağımlı olmayan kümeye lineer bağımsızdır denir [21].

Tanım 2.2.3. S, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı olsun. S'nin bir τ alt kümesine, eğer S'deki her vektör τ'nun elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa S'yi gerer denir [21].

Tanım 2.2.4. S, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı olsun. S'nin bir τ alt kümesi lineer bağımsız ve S'yi geriyorsa, S'nin bir bazıdır denir [21].

Teorem 2.2.5. τ $=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesi ile üretilen $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı S olsun. Bu durumda τ'nun S için baz olacak şekilde bir alt kümesi vardır [21].

Bir Üretici Kümeyi Baza İndirgeme Yöntemi: A, $a_i = v_i$ olmak üzere nxm boyutlu matris ve B matrisi, A'nın satır indirgenmiş eşolon biçimi olsun. Eğer $w_1, w_2, \dots, w_s$ vektörleri, B'nin farklı elementer sütunlarına (elemanlarından bir tanesi 1'e eşit, diğerleri 0'a eşit olan vektör) dönüştürülen τ'daki vektörlerse bu durumda $\tau_0 = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$, S'nin bir bazıdır.

Teorem 2.2.6. S, $\tau = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesi ile üretilen $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı ve $\tau_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$, S'nin lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\tau_1 \cup \tau_2$, S için bir baz olacak şekilde τ'nun bir τ_2 alt kümesi vardır [21].

Lineer Bağımsız Bir Kümeyi Baza Genişletme Yöntemi: A matrisi, $i = 1,2, \dots, s$ için $a_i = u_i$ ve $j = 1,2, \dots, m$ için $a_{s+j} = v_j$ olmak üzere nx(s+m) boyutlu matris olsun. Bir başka deyişle A matrisinin ilk s sütunu τ_1'deki vektörler ve son m sütunu τ'daki vektörlerdir. B, A'nın satır indirgenmiş eşolon biçimi olsun ve $w_1, w_2, \dots, w_t$ vektörleri $e_1, e_2, \dots, e_s$'den (e_i vektörü, i. elemanı 1'e eşit, diğer elemanları 0'a eşit olan vektör) başka B'nin farklı elementer sütunlarına dönüştürülen τ'daki vektörler olsun. Bu durumda τ_2={$w_1, w_2, \dots, w_t$} dir.

İspat. Bir üretici kümeyi baza indirgeme yöntemine göre A matrisinin, B'nin farklı elementer sütunlarına karşılık gelen sütunları, S için bir baz oluşturur. A'nın ilk s sütunu lineer bağımsız olduğundan, bu ilk s sütun B'nin ilk s sütunu olan $e_1, e_2, \dots, e_s$ vektörlerine dönüştürülen A'daki vektörlerdir. Dolayısıyla τ_1'in her elemanı bazdadır. Diğer baz vektörlerin kümesi τ_2 olsun. Her bir elemanı A'nın son n sütunundan geldiğinden τ_2, τ'nun bir alt kümesidir. Böylece $\tau_1 \cup \tau_2$ bütün baz elemanlarının kümesidir.■

Örnek 2.2.7. v_1=(1, 0, -1, 1) ve v_2=(1, 1, 1, -1) olmak üzere $\mathbb{R}^4$'de lineer bağımsız vektörler kümesi τ_1={v_1, v_2} olsun. Bu kümeyi $\mathbb{R}^4$'ün bir bazına genişletelim.
$\mathbb{R}^4$, $\tau = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ kümesi ile üretildiğinden $\tau_1 \cup \tau_2$, $\mathbb{R}^4$ için bir baz olacak şekilde τ kümesinin bir τ_2 alt kümesi bulunabilir. Lineer bağımsız kümeyi baza

genişletme yöntemi izlenerek $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi oluşturulur ve satır indirgenmiş eşolon biçime dönüştürülürse,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. τ kümesinin e_1 ve e_3 vektörlerinin satır indirgenmiş eşolon biçimli matrisin farklı elementer sütunlarına dönüştürülen vektörler olduğu görülür. Böylece $\{v_1, v_2, e_1, e_3\}$ kümesi $\mathbb{R}^4$ için bir bazdır.

2.3. Ortogonal Bir Baz Oluşturma Yöntemi

Tanım 2.3.1. V, reel sayılar üzerinde bir vektör uzayı olsun. V'de bir iç çarpım, V'deki her u ve v vektör çifti için öyle bir fonksiyondur ki, bir reel sayı olan (u, v), V'deki her u, v ve w vektörleri ve her c skaleri için aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) (u, v)=(v, u),
2) $(u, v + w)$=(u, v)+(u, w),
3) (cu, v)=$c(u, v)$,
4) $(u, u) \geq 0$ ve (u, u)=0$\leftrightarrow u$=0.

V vektör uzayına iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayı denir [21].

Örneğin, u=$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ve v=$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayındaki keyfi vektörler olmak üzere u ve v vektörlerinin,

$$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

olarak tanımlanan nokta çarpımları, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı için bir iç çarpım tanımlar. Bu çarpım genel olarak matris gösterimi ile $u^T v$ şeklinde verilir [21].

Tanım 2.3.2. u vektörü, bir iç çarpım uzayında vektör olmak üzere, u'nun normu $\|u\|$ ile gösterilir ve $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ ile tanımlanır [21].

Tanım 2.3.3. Bir V iç çarpım uzayında $(u,v) = 0$ ise u ve v vektörlerine ortogonaldir denir. Bir S vektörler kümesinde her bir farklı vektör çifti ortogonal ise S'ye bir ortogonal küme denir. Ortogonal bir S kümesinde her vektörün normu 1 ise S'ye ortonormal küme denir [21].

Tanım 2.3.4. V bir iç çarpım uzayı ve τ, V'nin bir bazı olsun. Eğer τ ortogonal bir küme ise, τ'ya V'nin ortogonal bir bazı, τ ortonormal bir küme ise, τ'ya V'nin ortonormal bir bazı denir [21].

2.3.5. Gram-Schmidt Yöntemi (Bir Ortogonal Baz Oluşturma Yöntemi)

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, V iç çarpım uzayının bir bazı olsun. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ortogonal bazı aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$v_1 = u_1,$$
$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2,v_1)}{(v_1,v_1)} v_1,$$
$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3,v_1)}{(v_1,v_1)} v_1 - \frac{(u_3,v_2)}{(v_2,v_2)} v_2,$$
$$\vdots$$
$$v_n = u_n - \frac{(u_n,v_1)}{(v_1,v_1)} v_1 - \frac{(u_n,v_2)}{(v_2,v_2)} v_2 - \cdots - \frac{(u_n,v_{n-1})}{(v_{n-1},v_{n-1})} v_{n-1} \qquad [21].$$

BÖLÜM 3. SİNGÜLER DEĞER AYRIŞIMI

Bu bölümde öz değer, öz vektör, köşegenleştirme tanımları, spektral ayrışım ve singüler değer ayrışımı verilecektir.

3.1. Öz değer, Öz vektör, Köşegenleştirme ve Spektral Ayrışım

Tanım 3.1.1. Bir A matrisi için AA^T=A^TA= I ise A matrisine ortogonaldir denir [12]. Ortogonal A matrisi kare, tersinir ve A^{-1}=A^T olan matristir.

Teorem 3.1.2. nxn boyutlu A matrisi, a_i A matrisinin i. sütununa karşılık gelen nx1 boyutlu vektör olmak üzere A=(a_1, a_2, …, a_n) olarak ifade edilsin. A matrisinin ortogonal matris olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

1) i=1, 2, …, n için a_i^T a_i=1
2) i=1, 2, …, n, j=1, 2, …, n ve i≠j için a_i^T a_j=0

olmasıdır [21].

Tanım 3.1.3. A matrisi bir kare matris olmak üzere, A matrisinin elemanları arasında i≠j için $a_{ij} = a_{ji}$ eşitliği yazılabiliyorsa, A matrisine simetrik matris denir [12].

Tanım 3.1.4. A matrisi ℝ cismi üzerinde bir nxn boyutlu matris olsun. Eğer Ax=λx olacak şekilde sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ skaleri, A matrisinin bir öz değeri ya da karakteristik değeri olarak adlandırılır. Bu bağıntıyı sağlayan her x vektörüne A'nın λ öz değerine ait öz vektörü veya karakteristik vektörü denir [12]. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ matrisinin birbirinden farklı olması gerekmeyen n tane λ öz değeri vardır ve bu öz değerlerin bir kısmı ya da tamamı kompleks olabilir.

Teorem 3.1.5. nxn boyutlu bir A matrisinin en az bir tane sıfır öz değerine sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu A matrisinin tekil olmasıdır [12].

Teorem 3.1.6. A matrisi, nxn boyutlu tekil olmayan bir matris ve λ, A matrisinin bir öz değeri olsun. Bu durumda $\frac{1}{\lambda}$, A^{-1} matrisinin bir öz değeridir [12].

Tanım 3.1.7. Eğer bir D=(d_{ij}) kare matrisinde köşegen üzerinde olmayan tüm elemanlar sıfır ise D matrisine köşegen matris denir [12].

Tanım 3.1.8. A matrisi ve B matrisi nxn boyutlu iki matris olsun. Eğer,

$$B = V^{-1}AV$$

olacak şekilde tekil olmayan bir V matrisi varsa A matrisi ile B matrisi benzerdir denir [12].

Tanım 3.1.9. D=$V^{-1}AV$ bir köşegen matris, yani A matrisi, bir D köşegen matrisine benzer olacak şekilde tekil olmayan bir V matrisi varsa A matrisine köşegenleştirilebilir denir [12].

Teorem 3.1.10. Bir nxn boyutlu A matrisinin bir D köşegen matrisine benzer olmasının gerekli ve yeterli koşulu A matrisinin n tane lineer bağımsız öz vektöre sahip olmasıdır. Burada D matrisinin köşegen elemanları, A matrisinin öz değerlerdir ve V matrisi, sütunları A matrisinin öz değerlerine karşılık gelen öz vektörlerden oluşan matristir [12].

Teorem 3.1.11. A matrisi, nxn boyutlu reel simetrik bir matris olsun. A matrisinin öz değerleri reeldir ve her bir öz değere karşılık gelen bir reel öz vektör vardır [12].

Teorem 3.1.12. A matrisi, reel simetrik bir matris olmak üzere, λ_1 ve λ_2 A matrisinin herhangi iki öz değerleri ve x_1 ile x_2 sırasıyla λ_1 ve λ_2 öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler olsun. Eğer λ_1 ve λ_2 farklı ise $x_1^T x_2$=0 dır. Yani x_1 ve x_2 ortogonal vektörlerdir [12].

Teorem 3.1.13. A matrisi, nxn boyutlu reel simetrik bir matris olsun. Bu durumda A'nın n tane lineer bağımsız öz vektörü vardır [12].

Tanım 3.1.14. Sıfır olmayan her x vektörü için $x^T Ax \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan reel simetrik bir A matrisine pozitif kararsız matris denir [12].
Pozitif kararsız matrislerin hiçbir öz değeri negatif değildir [12].

Tanım 3.1.15. A matrisi, nxn boyutlu reel simetrik ve pozitif kararsız bir matris olsun. D köşegen elemanları pozitif olan köşegen matris ve V nxn boyutlu bir ortogonal matris olmak üzere, A matrisi,

$$V\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T$$

şeklinde ifade edilebilir ve bu ayrışıma A matrisinin spektral ayrışımı denir [8].

Gerçekten nxn boyutlu reel simetrik A matrisinin n tane lineer bağımsız öz vektörü vardır ve bu durumda V matrisi bu lineer bağımsız öz vektörlerden oluşan ortogonal bir matristir. Ayrıca A pozitif kararsız matris olduğundan, A'nın hiçbir öz değeri negatif değildir ve bu öz değerlerin pozitif olanları D köşegen matrisi oluşturur. Bundan sonraki asıl çalışmamız spektral ayrışımın daha genel bir ifadesi olan A matrisinin kare olmaması durumundaki ayrışımdır.

3.2. Singüler Değer Ayrışımı

Teorem 3.2.1. A, r ranklı mxn boyutlu bir matris olsun. nxn boyutlu V ortogonal matrisi ve rxr boyutlu tekil olmayan D köşegen matrisi,

$$V^T A^T AV=\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlasın. V matrisi, V_1 matrisi r sütunlu bir matris olmak üzere V=(V_1, V_2) olarak parçalansın. U matrisi, U_1= AV_1D^{-1} ve U_2, sütunları U_1 matrisinin sütunlarına dik olan mx$(m-r)$ boyutlu bir matris olmak üzere U =(U_1, U_2) olsun. Bu durumda,

$$U^T AV=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

dır. (3.2) ifadesindeki $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi, sırasıyla r=0, r=m, r=n, r=m=n olduğunda 0, $(D,0)$, $\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$ ve D biçimlerinde olur [8].

İspat. V=(V_1, V_2) olduğundan,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V^T A^T AV &= \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} A^T A(V_1, V_2) \\ &= \begin{pmatrix} V_1^T A^T A \\ V_2^T A^T A \end{pmatrix} (V_1, V_2) \\ &= \begin{pmatrix} V_1^T A^T AV_1 & V_1^T A^T AV_2 \\ V_2^T A^T AV_1 & V_2^T A^T AV_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$V_1^T A^T AV_1$=D^2, $V_1^T A^T AV_2$=0, $V_2^T A^T AV_1$=0, $V_2^T A^T AV_2$=0

yazılabilir.

0=$V_2^T A^T AV_2$=$(AV_2)^T$ (AV_2) eşitliğinden,

$$AV_2=0 \tag{3.3}$$

olduğu görülür. Teoremin ifadesindeki,

$$U_1= AV_1D^{-1} \tag{3.4}$$

eşitliğinin her iki yanı sağdan D matrisi ile çarpılırsa,

$$U_1 D = AV_1 \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. $(D^{-1})^T = D^{-1}$ olduğu göz önüne alınarak (3.4) eşitliğinin transpozu alınırsa,

$$U_1^T = D^{-1} V_1^T A^T \tag{3.6}$$

olarak bulunur. (3.3), (3.5) ve (3.6) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} U^T AV = (U_1, U_2)^T A (V_1, V_2) = \begin{pmatrix} U_1^T AV_1 & U_1^T AV_2 \\ U_2^T AV_1 & U_2^T AV_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D^{-1} V_1^T A^T AV_1 & U_1^T 0 \\ U_2^T U_1 D & U_2^T 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D^{-1} D^2 & 0 \\ (U_1^T U_2)^T D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.■

Böylece teoremin (3.1) eşitliğini sağlayan $n\text{x}n$ boyutlu bir V ortogonal matrisi ve pozitif köşegen elemanlı $r\text{x}r$ boyutlu D köşegen matrisi vardır. Ayrıca teoremdeki U matrisi ortogonal alınabilir. Bunu görmek için D matrisini, köşegen elemanları $A^T A$ matrisinin sıfırdan farklı fakat birbirinden farklı olması gerekmeyen r tane öz değerinin pozitif karekökleri olacak şekilde, V matrisini de teoremin (3.1) eşitliğini sağlayan $n\text{x}n$ boyutlu ortogonal bir matris olarak seçelim. Bir matrisin sıfır uzayı ile o matrisin transpozunun sütun uzayı birbirinin ortogonal tümleyeni olduğundan,

$$\mathcal{N}(U_1^T) \oplus S_{U_1} = \mathbb{R}^m$$

ve dolayısıyla

$$\dim[\mathcal{N}(U_1^T)] + \dim(S_{U_1}) = m$$

yazılabilir. Matrisin sütun uzayının boyutu o matrisin rankını verdiğinden,

$\dim[\mathcal{N}(U_1^T)]+\mathrm{rank}(U_1)=m$

dir.

$$U_1^T U_1=D^{-1}V_1^T A^T A V_1 D^{-1}=D^{-1}D^2D^{-1}=I_r \qquad (3.7)$$

eşitliği ve $\mathrm{rank}(U_1)$ $=\mathrm{rank}(U_1^T U_1) = r$ olduğu göz önüne alınırsa $\dim[\mathcal{N}(U_1^T)]=m-r$ bulunur. U_2 matrisinin sütunları $\mathcal{N}(U_1^T)$'nin ortonormal bazı olacak şekilde seçilirse,

$$U^T U=\begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix}(U_1, U_2)=\begin{pmatrix} U_1^T U_1 & U_1^T U_2 \\ U_2^T U_1 & U_2^T U_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}=I_m$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.2 A, r ranklı mxn boyutlu bir matris ve D matrisi köşegen elemanları pozitif olan rxr boyutlu köşegen matris olmak üzere,

$$U^T A\, V=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

olacak şekilde mxm boyutlu U ve nxn boyutlu V ortogonal matrisleri vardır. U ve V matrisleri ortogonal olduğundan (3.8) sağdan V^T ile, soldan U ile çarpılırsa A matrisi

$$A= U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \qquad (3.9)$$

biçiminde ifade edilebilir. (3.9) ifadesine mxn boyutlu A matrisinin singüler değer ayrışımı denir [8].

D matrisi, köşegen elemanları s_i skalerlerinden oluşan rxr boyutlu köşegen matris, U_1 sırasıyla r tane $u_1, u_2, \dots, u_r$ sütundan oluşan matris ve V_1 sırasıyla r tane

$v_1, v_2, \ldots, v_r$ sütundan oluşan matris olmak üzere A matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T = (U_1, U_2)\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

$$= U_1 D V_1^T$$

$$= \sum_{i=1}^{r} s_i u_i v_i^T \qquad (3.10)$$

biçiminde yada $s_1, s_2, \ldots, s_r$ köşegen elemanlarından farklı olanlar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ile gösterilmek üzere $j = 1, 2, \ldots, k$ için $L_j = \{i\colon s_i = \alpha_j\}$ ve $q_j = \sum_{i \in L_j} u_i v_i^T$ alınırsa,

$$A = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, q_j \qquad (3.11)$$

biçiminde de ifade edilebilir [8].

Teorem 3.2.3. A matrisi mxn boyutlu bir matris olsun. U mxm boyutlu, V nxn boyutlu ortogonal matrisleri ve D rxr boyutlu tekil olmayan köşegen matrisi,

$$U^T A\, V = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda U_1 matrisi ile V_1 matrisi r sütunlu matrisler ve $U = (U_1, U_2)$, $V = (V_1, V_2)$ olmak üzere,

$$\text{rank}(A) = r, \qquad (3.12)$$

$$V^T A^T A V = \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.13)$$

$$U^T A A^T U = \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.14)$$

$$U_1 = A V_1 D^{-1}, \qquad (3.15)$$

$$V_1 = A^T U_1 D^{-1} \tag{3.16}$$

dır [8].

İspat: D matrisi rxr boyutlu köşegen matris olduğundan rank$(U^T AV) = r$ dir. Bir matrisi sağdan ve soldan tersinir matris ile çarpmak matrisin rankını değiştirmeyeceğinden,

r =rank($U^T AV$)=rank(A)

dır. U ve V matrisleri ortogonal olduğundan,

$$V^T A^T AV = V^T A^T U U^T AV = (U^T AV)^T (U^T AV) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^T A A^T U = U^T AV V^T A^T U = (U^T A\, V)\,(U^T AV)^T = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U^T AV = \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} A(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} U_1^T AV_1 & U_1^T AV_2 \\ U_2^T AV_1 & U_2^T AV_2 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

eşitliğinden,

$U_1^T AV_1 = D$ ve $U_2^T AV_1 = 0$

olduğu ve

$$I_m = U^T U = U U^T = (U_1, U_2) \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} = U_1 U_1^T + U_2 U_2^T \tag{3.18}$$

eşitliğinden de,

$U_1 U_1^T = I_m - U_2 U_2^T$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} U_1 = U_1 D D^{-1} = U_1(U_1^T A V_1) D^{-1} &= (U_1 U_1^T) A V_1 D^{-1} \\ &= (I_m - U_2 U_2^T) A V_1 D^{-1} \\ &= A V_1 D^{-1} - U_2 (U_2^T A V_1) D^{-1} \\ &= A V_1 D^{-1} - U_2 0 D^{-1} \\ &= A V_1 D^{-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde (3.17) eşitliğinden,

$U_1^T A V_1 = 0$, $U_1^T A V_2 = 0$ olduğu ve

$$I_n = V V^T = (V_1, V_2) \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = V_1 V_1^T + V_2 V_2^T \tag{3.19}$$

eşitliğinden de,

$V_1 V_1^T = I_n - V_2 V_2^T$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} V_1 = V_1 D^T (D^T)^{-1} = V_1 (U_1^T A V_1)^T D^{-1} &= V_1 V_1^T A^T U_1 D^{-1} \\ &= (I_n - V_2 V_2^T) A^T U_1 D^{-1} \\ &= A^T U_1 D^{-1} - V_2 (U_1^T A V_2)^T D^{-1} \\ &= A^T U_1 D^{-1} - V_2 0 D^{-1} \\ &= A^T U_1 D^{-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur.■

$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T$ ayrışımındaki D köşegen matrisinin köşegeni üzerindeki $s_1, s_2, \dots, s_r$ elemanları, $A^T A$ matrisinin sıfırdan farklı fakat birbirinden farklı olması gerekmeyen öz değerlerinin pozitif karekökleridir. Bu değerler U ve V ortogonal matrislerinin seçiminden bağımsız olarak tektirler. $s_1, s_2, \dots, s_r$ skalerlerine A'nın singüler değerleri denir ve sayıları A matrisinin rankı kadardır. Ayrıca ayrışımdaki U ortogonal matrisinin, sütunları AA^T matrisinin öz değerlerine karşılık gelen öz vektörlerdir. Bunların ilk r tanesi ${s_1}^2, {s_2}^2, \dots, {s_r}^2$ öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler, kalan $m - r$ tane sütunsa sıfır öz değerlerine karşılık gelen öz vektörlerdir. V ortogonal matrisinin sütunları da $A^T A$ matrisinin öz değerlerine karşılık gelen öz vektörlerdir. Bunların ilk r tanesi ${s_1}^2, {s_2}^2, \dots, {s_r}^2$ öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler, kalan $n - r$ tane sütunsa sıfır öz değerlerine karşılık gelen öz vektörlerdir. $U_1 = AV_1D^{-1}$ eşitliğinden V matrisinin ilk r sütunu belli iken U_1 tek türlü, $V_1 = A^T U_1 D^{-1}$ eşitliğinden U matrisinin ilk r sütunu belli iken V_1 tek türlü belirlidir.

Tanım 3.2.4. A matrisi, mxn boyutlu r ranklı bir matris olsun. $s_1, s_2, \dots, s_r$ skalerleri, A matrisinin singüler değerleri olmak üzere, A matrisinin Frobeniüs normu,

$$\|A\| = ({s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + {s_r}^2)^{1/2}$$

olarak ifade edilebilir [8].

Bir A matrisinin, Frobeniüs normu $\|A\| = (iz(A^T A))^{1/2}$ ve singüler değer ayrışımı $A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|A\|^2 = iz(A^T A) &= iz\left[V\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T U^T U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T\right] \\ &= iz\left[V\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T\right] \end{aligned}$$

eşitliğinde uygun boyutlu herhangi iki B ve C matrisleri için $iz(BC) = iz(CB)$ olduğu kullanılırsa,

$\|A\|^2 = iz\left[\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = {s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + {s_r}^2$

elde edilir. Böylece

$\|A\| = ({s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + {s_r}^2)^{1/2}$

dir.

Teorem 3.2.5. D matrisi, $s_1, s_2, \ldots, s_r$ pozitif köşegen elemanlarından oluşan köşegen matris olmak üzere, A mxn matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T$$

olsun. Bu durumda $E_1 = \text{diag}(1/s_1, 1/s_2, \ldots, 1/s_r)$ olmak üzere A matrisinin Moore-Penrose tersi,

$$A^+ = V\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^T$$

şeklinde ifade edilir [8].

İspat: D köşegen matris olduğundan, $E_1 = \text{diag}(1/s_1, 1/s_2, \ldots, 1/s_r)$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} D^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Böylece U ve V matrislerinin ortogonal olduğu göz önüne alınırsa,

$$A^+ = \left(U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T\right)^+ = V\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ U^T = V\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^T$$

bulunur ki bu ifade A^+ matrisinin singüler değer ayrışımıdır ve A^+ matrisinin singüler değerleri A'nın singüler değerlerinin çarpmaya göre tersleridir. ■

Şimdi bir A matrisinin singüler değer ayrışımı için örnek verelim.

Örnek 3.2.6. A matrisi,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \\ -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

olsun.

$A^T A$=$\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$ matrisinin öz değerleri λ_1=36 ve λ_2=25 dir. λ_1=36 öz değerine karşılık gelen bir öz vektör $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve λ_2=25 öz değerine karşılık gelen bir öz vektör $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dır. Bu durumda V ortogonal matrisi x_1 ve x_2 öz vektörlerinden oluşan,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisidir. D matrisinin köşegen elemanları $A^T A$ nın öz değerlerinin pozitif karekökleri olduğundan,

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ve rank(A)=2 olduğundan,

$$V_1 = V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. $U_1 = AV_1 D^{-1}$ eşitliğinden U_1 matrisi,

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/5 \\ 1/3 & 2/5 \\ 0 & -4/5 \\ 2/3 & 1/5 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. U_1 matrisi, $\mathbb{R}^4$'ün bir bazına genişletilir ve bu baz Gram-Schmidt yöntemi ile ortogonalleştirilirse,

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/5 & 89/225 & 0 \\ 1/3 & 2/5 & 14/225 & 64/89 \\ 0 & -4/5 & 72/225 & 24/89 \\ 2/3 & 1/5 & 82/225 & -32/89 \end{pmatrix},$$

ve daha sonra ortonormalleştirilirse U matrisi,

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/5 & 89/\sqrt{20025} & 0 \\ 1/3 & 2/5 & 14/\sqrt{20025} & 64/\sqrt{5696} \\ 0 & -4/5 & 72/\sqrt{20025} & 24/\sqrt{5696} \\ 2/3 & 1/5 & 82/\sqrt{20025} & -32/\sqrt{5696} \end{pmatrix}$$

olur ve böylece A matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/5 & 89/\sqrt{20025} & 0 \\ 1/3 & 2/5 & 14/\sqrt{20025} & 64/\sqrt{5696} \\ 0 & -4/5 & 72/\sqrt{20025} & 24/\sqrt{5696} \\ 2/3 & 1/5 & 82/\sqrt{20025} & -32/\sqrt{5696} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 4. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

$A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $g \in \mathbb{R}^m$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere n bilinmeyenli m denklemden oluşan bir sistem,

$$Ax = g \tag{4.1}$$

olarak yazılır. A matrisine ve $(A \vdots\ g)$ ekli matrisine (4.1) denklem sisteminin sırasıyla katsayılar matrisi ve ekli matrisi denir. Bundan başka $m = n$ olması durumunda (4.1) sistemine kare sistem, g=0 özel durumunda da homojen sistem denir.

4.1. $\boldsymbol{Ax = g}$ Sisteminin Çözümlerinin Varlığı

Bu kısımda (4.1) denklem sisteminin çözümlerinin varlığı ile ilgili bazı özellikler verilecektir. Lineer denklem sistemlerinin çözüm yapılarını aşağıdaki iki temel teorem ortaya koyar.

Teorem 4.1.1. (4.1) şeklindeki bir lineer denklem sistemi verilsin. Ayrıca p ve q sırasıyla A ve $(A \vdots g)$ matrislerinin rankları olsun. Bu durumda (4.1) sistemi,

1) $p < q$ ise çözüme sahip değildir.
2) $p = q = n$ ise bir tek çözüme sahiptir.
3) $p = q$ ve $p < n$ ise $n - p$ tane parametreye bağlı sonsuz çoklukta çözüme sahiptir [21].

Teorem 4.1.2. A, nxn boyutlu bir matris olmak üzere aşağıdakiler denktir:

1) A tersinirdir.
2) Herhangi bir g vektörü için $Ax = g$ denklem sistemi bir tek çözüme sahiptir.
3) Ax=0 homojen denklem sistemi yalnızca aşikar (x=0) çözüme sahiptir.
4) A'nın satır indirgenmiş eşolon formu I birim matrisidir [21].

Yukarıdaki teoremlerden görüldüğü üzere $Ax = g$ denklem sisteminin çözümlerinin yapısı farklı irdelemeleri içermektedir. Aşağıda verilecek olan Moore-Penrose terslerin kullanımını içeren teorem, ele alınan problem için genel bir teoridir.

Teorem 4.1.3. (4.1) sisteminin tutarlı olmasının gerekli ve yeterli koşulu $AA^{+}g = g$ olmasıdır [7].

4.2. $Ax = g$ Sisteminin Çözümlerinin Sayısı

Bu kısımda $Ax = g$ lineer denklem sisteminin en az bir çözüme sahip olduğu kabul edilerek çözümlerin sayısı tartışılacak ve genel çözümün biçimi ortaya koyulacaktır.

Teorem 4.2.1. A matrisi mxn boyutlu bir matris olmak üzere, $Ax = g$ lineer denklem sistemi bir çözüme sahip olsun. h, herhangi bir nx1 boyutlu parametreler vektörü olmak üzere,

$$x_0=A^{+}g+(I-A^{+}A)h \quad (4.2)$$

şeklinde yazılan x_0 vektörü bir çözümdür. Ayrıca sistemin her çözümü bir nx1 boyutlu h vektörü için (4.2) biçiminde yazılabilir [18].

Sonuç 4.2.2. $Ax = g$ sistemi tutarlı ise, x_0=$A^{+}g$'nin sistemin tek çözümü olmasının gerekli ve yeterli koşulu $A^{+}A$=I olmasıdır [7].

Sonuç 4.2.3. A matrisi, mxn boyutlu bir matris olmak üzere $Ax = g$ lineer denklem sistemi tutarlı ise, sistemin bir tek çözümünün olmasının gerekli ve yeterli koşulu A'nın rankının n olmasıdır [7].

4.3. Tutarsız Lineer Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri

(4.1) lineer denklem sisteminin tutarsız olduğu, yani sistemi sağlayan herhangi bir x vektörünün olmadığı kabul edilirse, bu durumda (4.1) sistemi,

$$Ax - g = e(x) \tag{4.3}$$

olarak yazılabilir. Burada $e(x)$ bir kalan vektör ya da sapmalar vektörüdür. (4.1) sistemini sağlayan bir x_0 vektörü olsaydı, bu $e(x) = 0$ olacak şekilde bir x_0 vektörü olduğu anlamına gelecekti. Eğer $e(x) = 0$ olacak şekilde bir x vektörü yoksa $e(x_0)$ "küçük" olacak şekilde bir x_0 vektörü araştırılmak istenebilir. x_0 böyle bir vektör ise, bu durumda x_0 vektörüne $Ax = g$ sisteminin bir "yaklaşık" çözümü denir. Eğer x_0 vektörü (4.3) denkleminde, diğer tüm x vektörlerine göre daha küçük bir $e(x)$'i veriyorsa, x_0 vektörüne $Ax = g$ lineer denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü denir [7].

Not. $Ax = g$ lineer denklem sisteminin çözümü olmasa bile, bazen $Ax - g = e(x)$ ifadesinin yerine $Ax = g$ yazılacağına dikkat etmek gerekir.

Örnek 4.3.1. $Ax = g$ sistemi,

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=2 \\ 2x_1+2x_2&=2 \\ 3x_1+3x_2&=3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

olsun. Bu sistemin tutarsız olduğu açıktır. Çözüme bir alternatif olarak $f(x_1,x_2)$ sapmaların karesi yani,

$$f(x_1,x_2)=(x_1 + x_2 - 2)^2 +(2x_1 + 2x_2 - 2)^2+(3x_1 + 3x_2 - 3)^2$$

olmak üzere $f(x_1,x_2)$'yi minimum yapacak şekilde x_1 ve x_2'yi bulmak gerekli olsun. (4.4) sisteminin bir $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$ çözümüne sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu $f(x_1^0,x_2^0)=0$ olmasıdır. Çözüm olmayan x_1 ve x_2 değerleri için, $f(x_1,x_2)>0$ olduğu açıktır. Böylece $f(x_1,x_2)$ minimum olacak şekilde x_1 ve x_2 değerlerini bulmak gerekir ve buna yaklaşık çözüm denir. Bu değerleri belirlemek için analiz bilgisi kullanılırsa,

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \, , \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0$$

elde edilir. Bu ifadeler,

$$14x_1+14x_2=15$$
$$14x_1+14x_2=15$$

özdeş denklemlerini verir. Böylece $14x_1+14x_2=15$'i sağlayan herhangi x_1 ve x_2 için $f(x_1,x_2)$ minimumdur. Dolayısıyla $f(x_1,x_2)$ sapmalar kareleri toplamını minimumlaştırma kriteri tek bir çözüm vermez. $f(x_1,x_2)$ yi minimumlaştıran tüm x_1 ve x_2 değerleri arasından $x = \binom{x_1}{x_2}$ olmak üzere $\|x^T x\|=x_1^2 + x_2^2$ ifadesini minimum yapacak olan değerleri seçmek gibi ilave bir kriter daha olmalıdır. Örnekte $g(x_1,x_2)= x_1^2 + x_2^2$ ifadesi $14x_1+14x_2=15$ kısıtlamasına göre minimumlaştırılmalıdır. Yine analiz bilgisi kullanılarak, $x_1^0 = x_2^0 = \frac{15}{28}$ elde edilir. Şimdi $x_0=A^+g$ vektörünün aynı çözüm olduğu görülecektir. Eğer A^+ hesaplanırsa,

$$A^+= \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

bulunur ve A^+g hesaplanırsa,

$$A^+g = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunlar (4.4) eşitliğindeki sisteme yaklaşık çözüm olarak önceden bulunan değerlerle aynıdır.

Tanım 4.3.2. A matrisi mxn boyutlu bir matris olmak üzere x_0 vektörünün $Ax - g = e(x)$ denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü olarak tanımlanmasının gerekli ve yeterli koşulları:

1) $\mathbb{R}^n$'deki tüm x ler için $(Ax - g)^T(Ax - g) \geq (Ax_0 - g)^T(Ax_0 - g)$ bağıntısının sağlanması,
2) $(Ax - g)^T\ (Ax - g) = (Ax_0 - g)^T\ (Ax_0 - g)$ şeklindeki tüm $x \neq x_0$ vektörleri için $x^Tx > {x_0}^T x_0$ bağıntısının sağlanmasıdır [7].

Teorem 4.3.3. $Ax = g$ denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü $x_0 = A^+g$ dir [7].

Not: En iyi yaklaşık çözüm daima var ve tektir.

Sonuç 4.3.4. Herhangi bir mxn boyutlu A matrisi ve herhangi bir mx1 boyutlu g vektörü için, x vektörü $\mathbb{R}^n$ üzerinde değişmek üzere $(Ax - g)^T\ (Ax - g)$ niceliğinin minimumu $g^T(I - AA^+)g$'dir [7].

4.4. En Küçük Kareler Çözümü

Uygulamalı bilimlerde kullanılan bu yöntem $Ax - g = e(x)$ şeklinde ifade edilen tutarsız lineer denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü ile oldukça yakından ilişkilidir ve problem $\big(e(x)\big)^T e(x)$ minimum olacak şekilde bir x_0 vektörü bulmaktır. Bu koşulu sağlayan herhangi bir x vektörüne (4.3) sisteminin bir en küçük kareler çözümü denir [7].

Tanım 4.4.1. A matrisi mxn boyutlu bir matris olmak üzere x_0 vektörünün $Ax - g = e(x)$ sisteminin bir en küçük kareler çözümü olarak tanımlanması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbb{R}^n$'deki tüm x ler için,

$(Ax - g)^T\ (Ax - g) \geq (Ax_0 - g)^T\ (Ax_0 - g)$

bağıntısının sağlanmasıdır [7].

Not: (4.3) denklemindeki eşitlik durumunu sağlayacak şekildeki x'lerin bir kümesi varsa en küçük kareler çözümü için olan kısıtlamalardan daha çok değildir. Bu gerçek, bir en iyi yaklaşık çözüm ve bir en küçük kareler çözümü arasındaki farktır. Böylece bir sistemin birçok en küçük kareler çözümü olabilir. En iyi yaklaşık çözüm her zaman en küçük kareler çözümüdür. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Dolayısıyla en iyi yaklaşık çözüm, en küçük kareler çözümlerinin kümesi üzerinden aranır [7].

Teorem 4.4.2. nx1 boyutlu x_0 vektörünün $Ax - g = e(x)$ sisteminin bir en küçük kareler çözümü olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

$(Ax_0 - g)^T\ (Ax_0 - g) = g^T(I - AA^+)g$

olmasıdır [7].

Teorem 4.4.3. Bir nx1 boyutlu x_0 vektörünün $Ax - g = e(x)$ sisteminin bir en küçük kareler çözümü olmasının gerekli ve yeterli koşulu x_0'ın,

$Ax = AA^+g$

matris denklemini sağlamasıdır [7].

Sonuç 4.4.4. Bir nx1 boyutlu x_0 vektörünün $Ax - g = e(x)$ sisteminin bir en küçük kareler çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul x_0'ın

$A^TAx = A^Tg$

matris denklemini sağlamasıdır [7].

$A^T Ax$=$A^T g$ denklemler kümesine $Ax - g = e(x)$ sisteminin normal denklemleri denir.

A bir mxn matris, g mx1, x nx1 boyutlu vektörler ve h herhangi bir nx1 boyutlu vektör olmak üzere $Ax = g$ denklem sisteminin çözümü için iki durum söz konusudur:

1) Sistem tutarlı ($AA^+g = g$) ise, genel çözüm x=A^+g+$(I - A^+A)h$,
2) Sistem tutarsız ($AA^+g \neq g$) ise, çözüm yoktur ve en iyi yaklaşık çözüm x=A^+g ile bulunur.

BÖLÜM 5. LİNEER MATRİS DENKLEMLERİ

A, B ve C matrisleri sırasıyla $m_1 \mathrm{x} m_2$, $m_3 \mathrm{x} m_4$ ve $m_1 \mathrm{x} m_4$ boyutlu bilinen matrisler ve X bir $m_2 \mathrm{x} m_3$ boyutlu bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AXB = C \tag{5.1}$$

şeklindeki bir denkleme genel olarak bir lineer matris denklemi denir. Bu bölümde (5.1) şeklindeki matris denklemleri ve bu tür denklemlerle ilişkili Bölüm 4'de ele alınan problemlere benzer problemler incelenecektir.

5.1. Matris Denklemlerinin Çözümlerinin Varlığı

(5.1) lineer matris denklemini sağlayacak en az bir $m_2 \mathrm{x} m_3$ boyutlu X matrisi varsa, matris denklemine tutarlıdır denir. Aksi halde denkleme tutarsızdır denir.

Teorem 5.1.1. (5.1) matris denkleminin tutarlı olmasının gerekli ve yeterli koşulu $AA^+CB^+B = C$ olmasıdır.

İspat. (5.1) matris denklemi tutarlı ve X_1, denklemi sağlayan bir matris olsun. Bu durumda $AX_1B = C$ dir. $AX_1B = C$ denklemi soldan AA^+ ile sağdan B^+B ile çarpılırsa,

$$AA^+AX_1BB^+B = AA^+CB^+B$$

olur. Moore-Penrose tersin özelliğinden dolayı eşitliğin sol tarafı AX_1B dir. Böylece,

$$C = AA^+CB^+B$$

olarak bulunur. Şimdi $AA^{+}CB^{+}B = C$ olsun. Özel olarak X=$A^{+}CB^{+}$ alınır ve denklemde yerine yazılırsa,

$$AXB = C$$

olur. Böylece X=$A^{+}CB^{+}$'nın bir çözüm olduğu görülür.■

Teorem 5.1.2. $AXB = C$ lineer matris denklemi bir çözüme sahipse, her m_2xm_3 boyutlu H matrisi için,

$$X_1 = A^{+}CB^{+} + H - A^{+}AHBB^{+} \tag{5.2}$$

ile tanımlanan X_1 matrisi bir çözümdür. Bundan başka $AXB = C$ lineer matris denkleminin her çözümü bir m_2xm_3 boyutlu H matrisi için (5.2) biçiminde yazılabilir [7].

Matris denklemleri, lineer denklem sistemlerinin bir genelleştirilmişi olarak ele alınabilir. Bu özdeşleştirme gerçekten yerindedir. Çünkü $AXB = C$ denklemi kronecker çarpım yardımıyla,

$$(B^T \otimes A)x = c$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada x, X'in sütunlarının sırasıyla alt alta yazılması ile elde edilen bilinmeyenler sütun vektörü ve c, C'nin sütunlarının sırasıyla alt alta yazılmasıyla elde edilen bilinenler sütun vektörüdür. Bu gösterim çerçevesinde $(B^T \otimes A)x = c$ lineer denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = (B^T \otimes A)^{+}c + [I - [(B^T \otimes A)^{+}(B^T \otimes A)]h$$

olarak elde edilir. Burada h uygun boyutlu keyfi bir sütun vektördür. Elde edilen bu x çözümü, tekrar matris formatında yazılırsa,

$$X = A^{+}CB^{+} + H - A^{+}AHBB^{+}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu iki ifadenin denk olduğu görülür.

5.2. Matris Denklemlerinin Singüler Değer Ayrışımı İle Tutarlılığının İncelenmesi

$U_A = \left(U_{A_1}, U_{A_2}\right)$, $V_A = (V_{A_1}, V_{A_2})$ ortogonal matrisler olmak üzere A matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A=U_A \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_A^T \tag{5.3}$$

$U_B = \left(U_{B_1}, U_{B_2}\right)$, $V_B = (V_{B_1}, V_{B_2})$ ortogonal matrisler olmak üzere B matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$B=U_B \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_B^T, \tag{5.4}$$

olsun. Bu durumda $AXB = C$ denklemi,

$$U_A \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_A^T X U_B \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_B^T = C \tag{5.5}$$

biçiminde ifade edilebilir. (5.5) matris denklemi,

$$\tilde{X} = V_A^T X U_B \tag{5.6}$$

ve

$$\tilde{C}=U_A^T C V_B=\begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{X} \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{C} \tag{5.8}$$

matris denklemine denktir.

Teorem 5.2.1. $AXB = C$ matris denklemin tutarlı olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

$$(\tilde{C}_{21},\tilde{C}_{22})V_B^T = U_{A_2}^T C = 0 \tag{5.9}$$

$$U_A\begin{pmatrix}\tilde{C}_{12}\\ \tilde{C}_{22}\end{pmatrix} = CV_{B_2} = 0 \tag{5.10}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda Z_2, Z_3, Z_4 matrisleri uygun boyutlu keyfi matrisler olmak üzere $AXB = C$ matris denklemin genel çözümü,

$$X = V_A\begin{pmatrix}D_A^{-1}\tilde{C}_{11}D_B^{-1} & Z_2\\ Z_3 & Z_4\end{pmatrix}U_B^T = A^+CB^+ + V_A\begin{pmatrix}0 & Z_2\\ Z_3 & Z_4\end{pmatrix}U_B^T \tag{5.11}$$

biçimindedir [6].

İspat. $AXB = C$ matris denkleminin tutarlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $AXB = C$ olacak biçimde en az bir X çözümü vardır. A ve B matrislerinin singüler değer ayrışımları, $AXB = C$ matris denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} C &= \left(U_{A_1}, U_{A_2}\right)\begin{pmatrix}D_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{A_1}^T\\ V_{A_2}^T\end{pmatrix}X\left(U_{B_1}, U_{B_2}\right)\begin{pmatrix}D_B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{B_1}^T\\ V_{B_2}^T\end{pmatrix}\\ &= \left(U_{A_1}D_A, 0\right)\begin{pmatrix}V_{A_1}^T\\ V_{A_2}^T\end{pmatrix}X\left(U_{B_1}D_B, 0\right)\begin{pmatrix}V_{B_1}^T\\ V_{B_2}^T\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve buradan da,

$$C = U_{A_1}D_AV_{A_1}^T X U_{B_1}D_BV_{B_1}^T \tag{5.12}$$

olduğu görülür. (5.12) denkleminin her iki yanı soldan $U_{A_2}^T$ ile çarpılırsa,

$$U_{A_2}^T C = 0 \tag{5.13}$$

sağdan V_{B_2} ile çarpılırsa,

$$CV_{B_2} = 0 \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.7) eşitliğinden C matrisi çekilir ve (5.13)'de yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} 0 = U_{A_2}^T C = U_{A_2}^T U_A \tilde{C} V_B^T &= U_{A_2}^T \left(U_{A_1}, U_{A_2}\right) \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} V_B^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & U_{A_2}^T U_{A_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} V_B^T \\ &= \begin{pmatrix} U_{A_2}^T U_{A_2} \tilde{C}_{21} & U_{A_2}^T U_{A_2} \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} V_B^T \\ &= U_{A_2}^T U_{A_2} (\tilde{C}_{21} \quad \tilde{C}_{22})\, V_B^T \end{aligned} \tag{5.15}$$

olur. $U_{A_2}^T U_{A_2}$ matrisi tersinir olduğundan (5.15) eşitliğinin her iki yanı soldan $(U_{A_2}^T U_{A_2})^{-1}$ matrisi ile çarpılırsa,

$$(\tilde{C}_{21} \quad \tilde{C}_{22})\, V_B^T = 0$$

olarak bulunur. Benzer şekilde C matrisinin yerine (5.14)'de $U_A \tilde{C} V_B^T$ matrisi koyulursa,

$$\begin{aligned} 0 = CV_{B_2} = U_A \tilde{C} V_B^T V_{B_2} &= U_A \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{B_1}^T \\ V_{B_2}^T \end{pmatrix} V_{B_2} \\ &= U_A \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ V_{B_2}^T V_{B_2} \end{pmatrix} \\ &= U_A \begin{pmatrix} \tilde{C}_{12} V_{B_2}^T V_{B_2} \\ \tilde{C}_{22} V_{B_2}^T V_{B_2} \end{pmatrix} \\ &= U_A \begin{pmatrix} \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} V_{B_2}^T V_{B_2} \end{aligned} \tag{5.16}$$

olur. $V_{B_2}^T V_{B_2}$ matrisi tersinir olduğundan (5.16) eşitliğinin her iki yanı soldan $(V_{B_2}^T V_{B_2})^{-1}$ matrisi ile çarpılırsa,

$$U_A\begin{pmatrix}\tilde{C}_{12}\\ \tilde{C}_{22}\end{pmatrix}=0$$

olarak bulunur.

Şimdi teoremin yeterlilik kısmını ispatlayalım.

$(\tilde{C}_{21},\tilde{C}_{22})V_B^T= U_{A_2}^T C$=0 ve $U_A\begin{pmatrix}\tilde{C}_{12}\\ \tilde{C}_{22}\end{pmatrix}= CV_{B_2}$=0 olsun. $AXB = C$ matris denkleminin, (5.8) matris denklemine denk olduğunu ve Teorem 5.1.1'i göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}D_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^+\tilde{C}\begin{pmatrix}D_B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix}D_B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tilde{C}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U_A^T CV_B\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{A_1}^T\\ U_{A_2}^T\end{pmatrix}C(V_{B_1},V_{B_2})\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{A_1}^T CV_{B_1} & U_{A_1}^T CV_{B_2}\\ U_{A_2}^T CV_{B_1} & U_{A_2}^T CV_{B_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}U_{A_1}^T CV_{B_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur.

$\tilde{C}= U_A^T CV_B= \begin{pmatrix}U_{A_1}^T\\ U_{A_2}^T\end{pmatrix}C(V_{B_1},V_{B_2}) =\begin{pmatrix}U_{A_1}^T CV_{B_1} & U_{A_1}^T CV_{B_2}\\ U_{A_2}^T CV_{B_1} & U_{A_2}^T CV_{B_2}\end{pmatrix}$ olduğu ve kabulümüzden $U_{A_2}^T C$=0, CV_{B_2}=0 olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{pmatrix}U_{A_1}^T CV_{B_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_{A_1}^T CV_{B_1} & U_{A_1}^T CV_{B_2}\\ U_{A_2}^T CV_{B_1} & U_{A_2}^T CV_{B_2}\end{pmatrix}=\tilde{C}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{pmatrix}D_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^+\tilde{C}\begin{pmatrix}D_B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix}D_B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\tilde{C}$$

olduğu görülür ve (5.8) matris denkleminin dolayısıyla $AXB = C$ matris denkleminin tutarlılığı gösterilmiş olur.

Son olarak genel çözümü ifade edelim.

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 matrisleri keyfi matrisler ve $Z=\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere (5.8) matris denkleminin genel çözümü Teorem 5.1.2'ye göre,

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ + Z - \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+$$

$$= \begin{pmatrix} D_A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + Z - \begin{pmatrix} D_A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_A^{-1}\tilde{C}_{11} & D_A^{-1}\tilde{C}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_A^{-1}\tilde{C}_{11}D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_A^{-1}\tilde{C}_{11}D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_A^{-1}\tilde{C}_{11}D_B^{-1} & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

dır. $\tilde{X} = V_A^T X U_B$ eşitliğinden X matrisi çekilir ve $\tilde{X}$ yerine (5.17)'deki karşılığı koyulursa $AXB = C$ matris denkleminin genel çözümü,

$$X = V_A \begin{pmatrix} D_A^{-1}\tilde{C}_{11}D_B^{-1} & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} U_B^T \tag{5.18}$$

$$= V_A \begin{pmatrix} D_A^{-1}\tilde{C}_{11}D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_B^T + V_A \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} U_B^T$$

$$= V_A \begin{pmatrix} D_A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_B^T + V_A \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} U_B^T$$

$$= V_A \begin{pmatrix} D_A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_A^T U_A \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} V_B^T V_B \begin{pmatrix} D_B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_B^T + V_A \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} U_B^T$$

$$= V_A \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ U_A^T U_A \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} V_B^T V_B \begin{pmatrix} D_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ U_B^T + V_A \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} U_B^T$$

$$= A^+ C B^+ + V_A \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} U_B^T \tag{5.19}$$

olarak bulunur. ■

5.3.Tutarsız Matris Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri

Öncelikle şunu belirtmekte fayda vardır ki $\|A\|$ sembolü ile reel matrisler için Frobenius normu anlaşılacaktır.

Lineer denklem sistemlerinde olduğu gibi $AXB = C$ matris denkleminin tutarsız olduğu yani, bu denklemi sağlayan herhangi bir X matrisinin olmadığı kabul edilirse, bu durumda $\|AXB - C\|$ küçük olacak şekilde bir X matrisi araştırılmak istenebilir. Bu şekildeki bir X matrisine matris denkleminin yaklaşık çözümü denir. Eğer bir X_0 matrisi diğer tüm bu şekildeki X matrislerine göre $\|AXB - C\|$'yi daha küçük yapıyorsa X_0'a en iyi yaklaşık çözüm denir.

$AXB = C$ matris denkleminin $(B^T \otimes A)x = c$ alışılagelmiş lineer denklem sistemi olarak yazılabileceği bilinmektedir. Sonuç olarak, böyle bir denklem sisteminin yaklaşık çözümleri ve en iyi yaklaşık çözümü Bölüm 4'deki gibi ilerlenerek elde edilebilir. En iyi yaklaşık çözümün Bölüm 4'de verildiği gibi en küçük kareler çözümleri içerisinden aranması yeterlidir.

Teorem 5.3.1. $AXB = C$ matris denkleminin en iyi yaklaşık çözümü

$$X = A^+ C B^+ \tag{5.20}$$

dır.

İspat. $AXB = C$ matris denklemi, $(B^T \otimes A)x = c$ lineer denklem sistemine denktir. Bu denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü ise Teorem 4.3.3' de verildiği üzere $x = (B^T \otimes A)^+ c$ dir. Bu ifadenin matris formundaki eşiti ise $X = A^+ C B^+$'dır. ■

Teorem 5.3.2. X matrisinin, $AXB = C$ tutarsız sisteminin bir en küçük kareler çözümü olmasının gerekli ve yeterli koşulu, X matrisinin,

$$AXB = AA^{+}CB^{+}B \tag{5.21}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

Sonuç 5.3.3. X matrisinin $AXB = C$ matris denkleminin bir en küçük kareler çözümü olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

$$(A^{T}A)X(BB^{T}) = A^{T}CB^{T} \tag{5.22}$$

olmasıdır.

$AXB = C$ matris denkleminin, $(B^{T} \otimes A)x = c$ lineer denklem sistemi biçiminde yazılabileceği göz önüne alındığında, Teorem 5.2.1'dekine benzer bir irdeleme $Ax = g$ lineer denklem sistemi için de ifade edilmek istenebilir. Şimdi lineer denklem sistemlerinin tutarlılığının SVD ile incelenmesine olanak sağlayan teoremi ifade edelim.

5.4 Lineer Denklem Sistemlerinin Singüler Değer Ayrışımı İle Tutarlılığının İncelenmesi

$U = (U_1, U_2)$, $V = (V_1, V_2)$ ortogonal matrisler olmak üzere $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A = U\,\Sigma\,V^{T} = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^{T} \tag{5.23}$$

olsun. $Ax = g$ lineer denklem sistemi Bölüm 1'de bahsedildiği üzere,

$$x_1 = V^{T}x \tag{5.24}$$

ve

$$g_1 = U^{T}g \tag{5.25}$$

olmak üzere,

$$\Sigma x_1 = g_1 \tag{5.26}$$

köşegen lineer denklem sistemine denktir.

Teorem 5.4.1. $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisi r ranklı matris olmak üzere $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olmasının gerekli ve yeterli koşulu $U_2^T g = 0$ olmasıdır. Bu durumda, h vektörü herhangi bir nx1 boyutlu parametreler vektörü, $I \in \mathbb{R}^{(n-r)\mathrm{x}(n-r)}$ birim matris ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, nxn boyutlu matris olmak üzere, $Ax = g$ lineer denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = A^+ g + V_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \tag{5.27}$$

biçimindedir.

İspat. $Ax = g$ lineer denklem sistemi tutarlı olsun. Bu durumda $Ax = g$ olacak biçimde en az bir x çözümü vardır. A matrisinin singüler değer ayrışımı $Ax = g$ lineer denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$g = U\,\Sigma\,V^T x = (U_1, U_2) \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} x = (U_1 D,\ 0) \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} x$$

ve buradan da

$$g = U_1 D\, V_1^T x \tag{5.28}$$

olduğu görülür. (5.28) eşitliğinin her iki yanı soldan U_2^T matrisi ile çarpılırsa,

$$U_2^T g = U_2^T U_1 D\, V_1^T x = 0$$

elde edilir.

Şimdi teoremin yeterlilik kısmını ispatlayalım.

$U_2^T g = 0$ olsun. $Ax = g$ lineer denklem sistemi, (5.26) köşegen lineer denklem sistemine denk olduğundan, $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlılığını görmek (5.26) köşegen lineer denklem sisteminin tutarlılığını görmeye denktir. (5.26) köşegen lineer denklem sisteminin tutarlılığını görmek için Teorem 4.1.3'e göre $\Sigma\Sigma^+ g_1 = g_1$ olduğu gösterilmelidir.

$$\Sigma\Sigma^+ g_1 = \Sigma\Sigma^+ U^T g = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} U_1^T \\ 0 \end{pmatrix} g$$

olduğu ve

$$g_1 = U^T g = \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} U_1^T g \\ U_2^T g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T \\ 0 \end{pmatrix} g$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\Sigma\Sigma^+ g_1 = g_1$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Son olarak, yine $Ax = g$ lineer denklem sisteminin (5.26) köşegen lineer denklem sistemine denk olduğu ve Teorem 4.2.1 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} x_1 = \Sigma^+ g_1 + (I - \Sigma^+\Sigma)h &= \Sigma^+ g_1 + \left[I - \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] h \\ &= \Sigma^+ g_1 + \left[I - \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] h \\ &= \Sigma^+ g_1 + \left[I - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] h \\ &= \Sigma^+ g_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \end{aligned}$$

burada $x_1 = V^T x$ ve $g_1 = U^T g$ olduğu kullanılırsa,

$$V^T x = \Sigma^+ U^T g + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \tag{5.29}$$

olur. (5.29) eşitliğinin her iki yanı V ile soldan çarpılırsa, $Ax = g$ lineer denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = V\,\Sigma^+ U^T g + V \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h = A^+ g + V \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h$$

olarak bulunur.■

BÖLÜM 6. MATRİS DENKLEMLERİNİN SİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, $AX = C$ tutarlı matris denkleminin simetrik çözümlerinin genel ifadesi singüler değer ayrışımı ile verilecektir.

6.1. $AX = C$ Lineer Matris Denkleminin Singüler Değer Ayrışımı İle Simetrik Çözümleri

Bu bölümde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ ve $C \in \mathbb{R}^{mxn}$ bilinen matrisler, $X \in \mathbb{R}^{nxn}$ bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AX = C$$

tutarlı lineer matris denkleminin simetrik çözümlerinin singüler değer ayrışımı kullanılarak nasıl bulunacağı ile ilgili teorem ve bu teoremin sonuçları verilecektir.

$U_1 \in \mathbb{R}^{mxr}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{nxr}$ olmak üzere U=(U_1, U_2) $\in \mathbb{R}^{mxm}$ ve V=(V_1, V_2) $\in \mathbb{R}^{nxn}$ ortogonal matrisler ve i=1, 2, …, r için $s_i > 0$ olmak üzere D=diag$(s_1, s_2, \ldots s_r)$ köşegen matris olsun.Bu durumda r ranklı A matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \tag{6.1}$$

olarak ifade edilir.

Teorem 6.1.1. A matrisinin singüler değer ayrışımı (6.1) biçiminde olsun. $AX = C$ matris denkleminin simetrik bir çözüme sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu AC^T=CA^T ve $U_2^T C$=0 olmasıdır. Bu durumda G matrisi herhangi bir (n-r)x(n-r) boyutlu simetrik matris olmak üzere $AX = C$ matris denkleminin genel çözümü,

$$X = V_1 D^{-1} U_1^T C + V_2 V_2^T C^T U_1 D^{-1} V_1^T + V_2 G V_2^T \tag{6.2}$$

biçimindedir [10].

İspat. İlk olarak teoremin gereklilik kısmını gösterelim.
$AX = C$ matris denklemi simetrik bir X çözümüne sahip olsun. Bu durumda $X^T = X$ ve $AX = C$ dir. $AX = C$ matris denkleminin her iki yanı sağdan A^T matrisi ile çarpılır ve AXA^T matrisini simetrik olduğu göz önüne alınırsa,

$$CA^T = AC^T$$

olduğu görülür. $AX = C$ matris denkleminde A matrisinin yerine singüler değer ayrışımı yazılırsa,

$$C = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T X = (U_1, U_2) \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} X = U_1 D V_1^T X \tag{6.3}$$

olur. (6.3) eşitliği soldan U_2^T ile çarpılır ve $U_2^T U_1 = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$U_2^T C = U_2^T U_1 D V_1^T X = 0 \tag{6.4}$$

elde edilir.

Şimdi teoremin yeterlilik kısmını gösterelim.
$AC^T = CA^T$ ve $U_2^T C = 0$ olsun. $AX = C$ matris denkleminde, A matrisinin yerine singüler değer ayrışımı yazılır ve soldan U^T ile çarpılırsa,

$$U^T U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T X = U^T C$$

olur buradan,

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T X = \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} U_1^T C \\ U_2^T C \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

elde edilir. $X_{11} \in \mathbb{R}^{rxr}$ olmak üzere,

$$V^T X V = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

olsun. (6.5) eşitliğinin her iki yanı sağdan V ile çarpılır ve $V^T X V$ matrisi yerine (6.6)'daki karşılığı koyulursa,

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T C \\ U_2^T C \end{pmatrix} (V_1, V_2)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} DX_{11} & DX_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T C V_1 & U_1^T C V_2 \\ U_2^T C V_1 & U_2^T C V_2 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

elde edilir. $U_2^T C = 0$ olduğundan (6.7) eşitliğinde $U_2^T C V_1 = 0$ ve $U_2^T C\ V_2 = 0$ olup,

$$\begin{aligned} D_{rxr} X_{11_{rxr}} &= U_{1\ rxm}^T C_{mxn} V_{1_{nxr}} \\ D_{rxr} X_{12_{rx(n-r)}} &= U_{1\ rxm}^T C_{mxn} V_{2_{nx(n-r)}} \\ X_{21} &= X_{12}^T \\ X_{22} &= X_{22}^T \end{aligned} \tag{6.8}$$

eşitlikleri yazılabilir. (6.8) deki ilk iki eşitlikten X_{11} ve X_{12} matrisleri,

$X_{11} = D^{-1} U_1^T\ C V_1$ ve $X_{12} = D^{-1} U_1^T\ C V_2$

olarak bulunur. $AC^T = CA^T$ ve $U_2^T C$=0 eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$(U^T\ CA^T U)^T$=$U^T AC^T U$=$U^T CA^T U$,

$$U^T\, CA^T U = \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} C\, V \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T\, U = \begin{pmatrix} U_1^T C \\ U_2^T C \end{pmatrix} (V_1, V_2) \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_1^T CV_1 & U_1^T CV_2 \\ U_2^T CV_1 & U_2^T CV_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_1^T CV_1 & U_1^T CV_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_1^T CV_1 D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitlikleri yazılabilir. $U^T CA^T U$ matrisi simetrik olduğundan $U_1^T CV_1 D$ matrisi de simetriktir. $X_{11} = D^{-1} U_1^T\, CV_1$ eşitliği sağdan DD^{-1} ile çarpılırsa,

$$X_{11} = D^{-1}(U_1^T\, CV_1 D)D^{-1}$$

olur. D^{-1} köşegen matrisinin ve $U_1^T CV_1 D$ matrisinin simetrik oldukları göz önüne alınırsa X_{11} matrisinin simetrikliği görülür. Böylece $AC^T = CA^T$ ve $U_2^T C$=0 olduğu kabul edildiğinde $AX = C$ matris denkleminin simetrik bir çözümünün varlığı gösterilmiş olur.

Şimdi $AX = C$ lineer matris denkleminin simetriklik şartı altında genel çözümünü ifade edelim.

G matrisi, $(n - r)$x$(n - r)$ boyutlu keyfi simetrik bir matris olmak üzere $X_{22} = G$ olarak seçilsin. (6.6) eşitliğinden X matrisi çekilir ve $(V_1 V_1^T + V_2 V_2^T)$=$VV^T = I$ olduğu kullanılırsa,

$$X = V \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} V^T$$

$$= (V_1, V_2) \begin{pmatrix} D^{-1} U_1^T CV_1 & D^{-1} U_1^T CV_2 \\ V_2^T C^T U_1 D^{-1} & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

$$= (V_1 D^{-1} U_1^T CV_1 + V_2 V_2^T C^T U_1 D^{-1} \quad V_1 D^{-1} U_1^T CV_2 + V_2 G) \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

$$= V_1 D^{-1} U_1^T CV_1 V_1^T + V_2 V_2^T C^T U_1 D^{-1} V_1^T + V_1 D^{-1} U_1^T CV_2 V_2^T + V_2 G V_2^T$$

$$= V_1 D^{-1} U_1^T C(V_1 V_1^T + V_2 V_2^T) + V_2 V_2^T C^T U_1 D^{-1} V_1^T + V_2 G V_2^T$$

$$= V_1 D^{-1} U_1^T C + V_2 V_2^T C^T U_1 D^{-1} V_1^T + V_2 G V_2^T$$

olarak bulunur.■

Sonuç. 6.2.2. rank(A)=r olmak üzere $AX = C$ lineer matris denkleminin simetrik çözümler uzayının boyutu $\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$ dir [10].

Sonuç 6.2.3. Eğer $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisi m ranklı ise $AX = C$ lineer matris denkleminin simetrik bir çözüme sahip olmasının gerekli ve yeterli koşulu AC^T=CA^T olmasıdır[10].

İspat. Teorem 6.1.1'de ifade edilen $U_2^T C$=0 şartındaki U_2 matrisi, mx$(m-r)$ boyutlu matristir. Eğer rank(A)=m olursa $m-r=0$ olur ki bu durumda $U_2^T C$=0 şartından bahsedilmez.■

BÖLÜM 7. TUTARSIZ MATRİS DENKLEMLERİNİN EN İYİ YAKLAŞIK SİMETRİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde $AXB = C$ ve $AX = C$ tutarsız matris denklemlerinin en iyi yaklaşık simetrik çözümü, matris denklemleri lineer denklem sistemine dönüştürüldükten sonra singüler değer ayrışımı kullanılarak verilecektir.

7.1. $AXB = C$ Tutarsız Matris Denkleminin En İyi Yaklaşık Simetrik Çözümü

Teorem 7.1.1. $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxp}$ ve $C \in \mathbb{R}^{mxp}$ bilinen matrisler ve $X \in \mathbb{R}^{nxn}$ bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AXB = C, X = X^T \tag{7.1}$$

tutarsız matris denklemi verilsin. c_1=$vec(C)$, c_2=$vec(C^T)$, $x = vec(X)$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$=$g$, $\begin{pmatrix} B^T \otimes A \\ A \otimes B^T \end{pmatrix} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$=$A_1$, $\mathcal{A}^T g$=g_1 ve r ranklı A_1 matrisinin singüler değer ayrışımı A_1=$U_{A_1} D_{A_1} V_{A_1}^T$ olsun. h vektörü n^2x1 boyutlu bir parametreler vektörü, I matrisi $(n^2 - r)$x$(n^2 - r)$ boyutlu birim matris ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, n^2xn^2 boyutlu matris olmak üzere $\mathcal{A}x = g$ lineer denklem sisteminin en küçük kareler çözümlerinin genel ifadesi,

$$x = A_1^{+} g_1 + V_{A_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \tag{7.2}$$

biçimindedir.

İspat. (7.1) matris denkleminin transpozu alınırsa,

$$B^T X A^T = C^T \tag{7.3}$$

matris denklemi elde edilir. $x = vec(X)$, $c_1 = vec(C)$ ve $c_2 = vec(C^T)$ olmak üzere (7.1) ve (7.3) matris denklemleri,

$$\begin{pmatrix} B^T \otimes A \\ A \otimes B^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

lineer denklem sistemi biçiminde yazılabilir. $\begin{pmatrix} B^T \otimes A \\ A \otimes B^T \end{pmatrix} = \mathcal{A}$ ve $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = g$ olmak üzere (7.4) lineer denklem sistemi, $\mathcal{A}x = g$ lineer denklem sistemi biçiminde ifade edilebilir. $e(x) = \mathcal{A}x - g$ olmak üzere $\mathcal{A}x = g$ tutarsız denklem sisteminin en küçük kareler çözümlerinin kümesi $e^T(x)e(x)$ ifadesini minimum yapan x vektörleridir.

$$\begin{aligned} e^T(x)e(x) = (\mathcal{A}x - g)^T(\mathcal{A}x - g) &= (x^T\mathcal{A}^T - g^T)(\mathcal{A}x - g) \\ &= (x^T\mathcal{A}^T\mathcal{A}x - x^T\mathcal{A}^T g - g^T\mathcal{A}x + g^T g) \end{aligned}$$

ve $x^T\mathcal{A}^T g = (x^T\mathcal{A}^T g)^T = g^T\mathcal{A}x$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$e^T(x)e(x) = x^T\mathcal{A}^T\mathcal{A}x - 2x^T\mathcal{A}^T g + g^T g$$

bulunur. Bu ifadenin x'e göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse, $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin normal deklemleri,

$$\mathcal{A}^T\mathcal{A}x = \mathcal{A}^T g \tag{7.5}$$

olarak bulunur. $\mathcal{A}^T\mathcal{A} = A_1$ ve $\mathcal{A}^T g = g_1$ olmak üzere (7.5) denklemi,

$$A_1 x = g_1 \tag{7.6}$$

biçiminde yazılabilir. A_1 matrisinin singüler değer ayrışımı A_1=$U_{A_1}D_{A_1}V_{A_1}^T$ ve h, herhangi uygun boyutlu parametreler vektörü olmak üzere, $A_1x = g_1$ tutarlı lineer denklem sisteminin genel çözümü Teorem 5.4.1'e göre,

$$x = A_1^+g_1+V_{A_1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}h \quad (7.7)$$

dir. Sonuç 4.4.4'e göre x_0 vektörünün, $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin bir en küçük kareler çözümü olmasının gerekli ve yeterli koşulu $\mathcal{A}^T\mathcal{A}x = \mathcal{A}^Tg$ denklemini sağlamasıdır. Buna göre $\mathcal{A}^T\mathcal{A}x = \mathcal{A}^Tg$ tutarlı lineer denklem sisteminin genel çözümünün ifadesi olan (7.7) denklemi, $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin en küçük kareler çözümlerinin genel ifadesidir.■

Yardımcı Teorem 7.1.2. c_1=$vec(C)$, c_2=$vec(C^T)$, $\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$=$g$, $\begin{pmatrix}B^T\otimes A\\ A\otimes B^T\end{pmatrix} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$=A_1, $\mathcal{A}^Tg$=g_1 ve A_1 matrisinin singüler değer ayrışımı A_1=$U_{A_1}D_{A_1}V_{A_1}^T$ olmak üzere,

$$V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g - \mathcal{A}{A_1}^+g_1) = 0$$

dır.

İspat. $(\mathcal{A}V_{A_1})^+$ matrisi, $(I\mathcal{A}V_{A_1})^+$ gibi göz önüne alınırsa, I ve V_{A_1}matrisleri ortogonal olduğundan, Teorem 2.1.4'e göre $(I\mathcal{A}V_{A_1})^+ = V_{A_1}^T\mathcal{A}^+I^T$= $V_{A_1}^T\mathcal{A}^+$ dır. $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ matrisinin simetrikliği ve $\mathcal{A}^+\mathcal{A}\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g - \mathcal{A}{A_1}^+g_1) &= V_{A_1}V_{A_1}^T\mathcal{A}^+(g - \mathcal{A}(\mathcal{A}^T\mathcal{A})^+(\mathcal{A}^Tg)) \\ &= I\mathcal{A}^+(g - \mathcal{A}\mathcal{A}^+(\mathcal{A}^T)^+\mathcal{A}^Tg) \\ &= \mathcal{A}^+g - \mathcal{A}^+\mathcal{A}\mathcal{A}^+(\mathcal{A}\mathcal{A}^+)^Tg \\ &= \mathcal{A}^+g - \mathcal{A}^+(\mathcal{A}\mathcal{A}^+)^Tg \\ &= (\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+\mathcal{A}\mathcal{A}^+)g \\ &= (\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+)g \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.■

Teorem 7.1.3. c_1=$vec(C)$, c_2=$vec(C^T)$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$=$g$, $x = vec(X)$, $\begin{pmatrix} B^T \otimes A \\ A \otimes B^T \end{pmatrix} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$=$A_1$, $\mathcal{A}^T g$=g_1 ve A_1 matrisinin singüler değer ayrışımı A_1=$U_{A_1} D_{A_1} V_{A_1}^T$ olmak üzere $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü,

$$x = A_1^+ g_1 = \mathcal{A}^+ g \tag{7.8}$$

dir.

İspat. Tutarsız bir sistemin en iyi yaklaşık çözümü, en küçük kareler çözümleri içerisinden aranır. $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin en küçük kareler çözümlerinin genel ifadesi Teorem 7.1.1'e göre (7.2) biçimindedir. (7.2) ifadesi, $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$g = \mathcal{A}\left[A_1^+ g_1 + V_{A_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h\right] = \mathcal{A}A_1^+ g_1 + \mathcal{A}V_{A_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h$$

ve buradan

$$\mathcal{A}V_{A_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h = g - \mathcal{A}A_1^+ g_1$$

elde edilir.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h = z$ dersek,

$$\mathcal{A}V_{A_1} z = g - \mathcal{A}A_1^+ g_1 \tag{7.9}$$

olur. (7.9) lineer denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü, Teorem 4.3.3'e göre,

$$z = (\mathcal{A}V_{A_1})^+ (g - \mathcal{A}A_1^+ g_1)$$

dir. Bu değer (7.2)'de yerine yazılırsa,

$$x = A_1^+ g_1 + V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g - \mathcal{A}A_1^+ g_1) \tag{7.10}$$

olur. Yardımcı Teorem 7.1.2'den $V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g - \mathcal{A}A_1^+ g_1) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü,

$$x = A_1^+ g_1 = \mathcal{A}^+ g \tag{7.11}$$

olarak bulunur.■

$\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sistemi, (7.1) ve (7.3) tutarsız matris denklemlerine karşılık gelen lineer denklem sistemi olduğundan, $\mathcal{A}x = g$ lineer denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü olan (7.11), matris formatına getirilirse $AXB = C$ tutarsız matris denkleminin en iyi yaklaşık simetrik çözümü ifade edilmiş olur.

Şimdi benzer şekilde $AX = C$ tutarsız matris denkleminin en iyi yaklaşık simetrik çözümünü ifade edelim.

7.2. $AX = C$ Tutarsız Matris Denkleminin En İyi Yaklaşık Simetrik Çözümü

$AXB = C \quad X = X^T$ tutarsız matris denkleminde B matrisi, nxn boyutlu birim matris olarak göz önüne alınırsa, $c_1 = vec(C)$, $c_2 = vec(C^T)$ ve $x = vec(X)$ olmak üzere, (7.4)'deki denklem sistemine karşılık,

$$\begin{pmatrix} I \otimes A \\ A \otimes I \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $\begin{pmatrix} I \otimes A \\ A \otimes I \end{pmatrix} = \mathcal{A}$ ve $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = g$ olmak üzere $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin normal denklemleri,

$$\mathcal{A}^T \mathcal{A}x = \mathcal{A}^T g$$

dir. $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$=A_1, $\mathcal{A}^T g$=g_1 ve r ranklı A_1 matrisinin singüler değer ayrışımı A_1=$U_{A_1}D_{A_1}V_{A_1}^T$ olsun. h vektörü n^2x1 boyutlu bir parametreler vektörü, I matrisi (n^2-r)x(n^2-r) boyutlu birim matris ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, n^2xn^2 boyutlu matris olmak üzere A_1x=g_1 tutarlı denkleminin singüler değer ayrışımı ile genel çözümü,

$$x = A_1^+g_1 + V_{A_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}h \tag{7.13}$$

dir. (7.13), $\mathcal{A}x = g$ tutarsız lineer denklem sisteminin en küçük kareler çözümlerinin genel ifadesidir. Bu çözümler içersinden aranan en iyi yaklaşık çözüm ise, Yardımcı Teorem 7.1.2'den $V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g-\mathcal{A}A_1^+g_1)$ = 0 olduğu göz önüne alınırsa,

$$x = A_1^+g_1$$

olarak bulunur.

7.3. Sayısal Algoritma ve Örnek

$A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxp}$, $C \in \mathbb{R}^{mxp}$ bilinen matrisler, $X \in \mathbb{R}^{nxn}$ bilinmeyenler matrisi olmak üzere aşağıda verilecek olan sayısal algoritma $AXB = C$ tutarsız matris denkleminin simetrik bir çözümünü bulma problemi için analitik çözüm ortaya koymaktadır.

Algoritma 7.3.1

1) A, B ve C matrislerini gir.
2) C ve C^T matrislerini c_1 ve c_2 atamasıyla vektör formatına getir.
3) $B^T\otimes A$ matrisini oluştur.
4) $A\otimes B^T$ matrisini oluştur.
5) $\begin{pmatrix} B^T\otimes A \\ A\otimes B^T \end{pmatrix}$ matrisini $\mathcal{A}$ atamasıyla oluştur.
6) $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ matrisini g atamasıyla oluştur.

7) $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ matrisini A_1 atamasıyla oluştur.

8) $A_1^T g$ matrisini g_1 atamasıyla oluştur.

9) A_1 matrisinin $A_1 = U\Sigma V^T$ singüler değer ayrışımını hesapla.

10) $\mathcal{A}V_{A_1}$ matrisini hesapla.

11) $\mathcal{A}V_{A_1}$ matrisinin Moore-Penrose tersini hesapla.

12) A_1 matrisinin Moore-Penrose tersini hesapla.

13) $g - \mathcal{A}A_1^+ g_1$ matrisini hesapla.

14) $x = A_1^+ g_1 + V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g - \mathcal{A}A_1^+ g_1)$ hesapla.

15) $x = A_1^+ g_1$ en iyi yaklaşık çözüm yaz.

Örnek 7.3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $AXB = C$ tutarsız matris denkleminin en iyi yaklaşık simetrik çözümünü bulalım:

$$\begin{pmatrix} B^T \otimes A \\ A \otimes B^T \end{pmatrix} = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -12 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \\ -4 & 0 & -12 & 0 \\ 8 & -16 & 4 & -8 \\ 8 & 8 & 4 & 4 \\ -16 & 0 & -8 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & -12 \\ 8 & 4 & -16 & -8 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 8 & 4 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -12 & 0 & 0 \\ -16 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \mathcal{A}^T\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 864 & 192 & 192 & -88 \\ 192 & 672 & -88 & 168 \\ 192 & -88 & 672 & 168 \\ -88 & 168 & 168 & 520 \end{pmatrix},$$

$$A_1^+ = \begin{pmatrix} 0{,}0016 & -0{,}0007 & -0{,}0007 & 0{,}0007 \\ -0{,}0007 & 0{,}0020 & 0{,}0007 & -0{,}0010 \\ -0{,}0007 & 0{,}0007 & 0{,}0020 & -0{,}0010 \\ 0{,}0007 & -0{,}0010 & -0{,}0010 & 0{,}0027 \end{pmatrix},$$

olup

$c_1 = (-2, 4, 0, 0, 3, -1, 0, 1, 0)^T$ ve $c_2 = (-2, 0, 0, 4, 3, 1, 0, -1, 0)^T$

olmak üzere $g = \binom{c_1}{c_2}$, $\mathcal{A}^T g = g_1$ olduğundan Teorem 4.3.3'e göre en iyi yaklaşık simetrik çözüm,

$$x = A_1^+ g_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1169 \\ 0{,}0115 \\ 0{,}0115 \\ 0{,}2431 \end{pmatrix}$$

dır.

Elde edilen bu x vektörü matris formatına getirilirse,

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}1169 & 0{,}0115 \\ 0{,}0115 & 0{,}2431 \end{pmatrix}$$

simetrik matrisi $AXB = C$ tutarsız matris denkleminin en iyi yaklaşık simetrik çözümü olarak bulunmuş olur.

A_1 matrisinin singüler değer ayrışımı,

$$A_1 = U\Sigma V_{A_1}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8228 & 0 & 0.4316 & 0.3697 \\ 0.3934 & 0.7071 & -0.3387 & -0.4802 \\ 0.3934 & -0.7071 & -0.3387 & -0.4802 \\ 0.1160 & 0 & -0.7644 & 0.6342 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1035.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 760.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 718.54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 214.29 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0.82284 & 0 & 0.4316 & 0.3697 \\ 0.39337 & 0.7071 & -0.3387 & -0.4802 \\ 0.39337 & -0.7071 & -0.3387 & -0.4802 \\ 0.116 & 0 & -0.7644 & 0.6342 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathcal{A}V_{A_1} = \begin{pmatrix} 1{,}0404 & -7{,}0710 & 9{,}3586 & -7{,}8794 \\ 5{,}4886 & -2{,}8284 & -6{,}4328 & 0{,}6550 \\ -8{,}0118 & 8{,}4852 & 2{,}3380 & 4{,}3796 \\ 0{,}9343 & -14{,}1420 & 13{,}6324 & 3{,}6144 \\ 11{,}7672 & 2{,}8284 & -3{,}6692 & -0{,}3000 \\ -16{,}3124 & 5{,}6568 & -4{,}1960 & -2{,}0096 \\ -0{,}0722 & 2{,}8284 & -2{,}2180 & -2{,}6602 \\ -2{,}4324 & -1{,}4142 & -0{,}1858 & 0{,}2210 \\ 3{,}2914 & 0 & 1{,}7264 & 1{,}4788 \\ 1{,}0404 & 7{,}0710 & 9{,}3586 & -7{,}7994 \\ 0{,}9343 & 14{,}1420 & 13{,}6324 & 3{,}7744 \\ -0{,}0722 & -2{,}8284 & -2{,}2180 & -2{,}6922 \\ 5{,}4886 & 2{,}8284 & -6{,}4328 & 0{,}6870 \\ 11{,}7672 & -2{,}8284 & -3{,}6692 & -0{,}3320 \\ -2{,}4324 & 1{,}4142 & -0{,}1858 & 0{,}2370 \\ -8{,}0118 & -8{,}4852 & 2{,}3380 & 4{,}2836 \\ -16{,}3124 & -5{,}6568 & -4{,}1960 & -2{,}0736 \\ 3{,}2914 & 0 & 1{,}7264 & 1{,}4788 \end{pmatrix},$$

$$g - \mathcal{A}A_1^+ g_1 = \begin{pmatrix} 0{,}6606 \\ 2{,}2155 \\ 0{,}6055 \\ 1{,}1480 \\ 0{,}9545 \\ 0{,}9620 \\ 0{,}1877 \\ 1{,}2567 \\ -0{,}4675 \\ 0{,}6606 \\ 1{,}1480 \\ 0{,}1877 \\ 2{,}2155 \\ 0{,}9545 \\ 1{,}2567 \\ 0{,}6055 \\ 0{,}9620 \\ -0{,}4675 \end{pmatrix},$$

olup $\mathcal{A}V_{A_1}$ matrisinin Moore-Penrose tersi hesaplanır ve $V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g-\mathcal{A}A_1^+g_1)$ ifadesinde yerine koyulursa,

$$V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g-\mathcal{A}A_1^+g_1)=10^{-15}\begin{pmatrix}-0{,}0100\\0{,}0388\\0{,}0427\\-0{,}2136\end{pmatrix}$$

olur.

Teorik olarak sıfıra eşit olduğu gösterilen $V_{A_1}(\mathcal{A}V_{A_1})^+(g-\mathcal{A}A_1^+g_1)$ matrisinin yukarıdaki hesaplamalarda tam olarak sıfıra eşit bulunamaması, bilgisayar hassasiyetine bağlı olarak virgülden sonraki ondalıklı hanelerin tamamının değil birkaçının alınmasıdır. Fakat teorik olarak sıfıra eşit çıkması tesadüf değildir. Çünkü bilindiği üzere tutarsız bir $Ax=g$ sisteminin en iyi yaklaşık çözümü A^+g dir. Bir matrisin Moore-Penrose tersi tek olduğundan, hesaplamalar SVD ile yapılsa bile aynı sonuca ulaşılacağı bellidir. Singüler değer ayrışımı ile yapılan hesaplamalarda farklı olan taraf en küçük kareler çözümlerinin SVD kullanılarak ifade edilebilmesidir.

BÖLÜM 8. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Birinci bölümde singüler değer ayrışımı kavramından ve onun tarihsel gelişiminden söz edilmiştir.

İkinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak Moore-Penrose ters, kronecker çarpım, vec operatörü kavramları, Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ve ilgili teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $U \in \mathbb{R}^{mxm}$, $V \in \mathbb{R}^{nxn}$ ortogonal matrisler ve D köşegen matris olmak üzere bir $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ matrisin singüler değer ayrışımının,

$$A = U\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T$$

biçiminde olacağından ve U, V, D matrislerinin nasıl bulunacağından söz edilmiştir.

Dördüncü bölümde reel hayatta ortaya çıkan problemlerin birçoğunda karşılaşılan $Ax = g$ lineer denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve sayısı, tutarsız olması durumunda ise en küçük kareler çözümleri ve bu çözümler arasından aranması gereken en iyi yaklaşık çözüm karakterize edilmiştir.

Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde $Ax = g$ lineer denklem sistemi için verilen özellikler $AXB = C$ lineer matris denklemleri için verilmiş, bunlara ek olarak $AXB = C$ matris denkleminin ve $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olmasının gerekli ve yeterli şartları ile genel çözümü singüler değer ayrışımı ile ifade edilmiştir.

Altıncı bölümde $AX = C$ tutarlı matris denklemi ele alınmış ve bu denklemin simetrik çözümleri singüler değer ayrışımı ile ifade edilmiştir.

Yedinci bölüm çalışmanın ana bölümü olarak sayılabilir. Bu bölümde $AXB = C$ ve $AX = C$ tutarsız matris denklemleri göz önüne alınmış ve bu denklemlerin en küçük kareler çözümleri SVD ile ifade edilmiş, bu en küçük kareler çözümleri içerisinden de en iyi yaklaşık simetrik çözüm bulunmuştur. Bulunan teorik sonuçları açıklamak için sayısal bir örnek verilmiş ve

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

olmak üzere $AXB = C$ tutarsız matris denkleminin en iyi yaklaşık simetrik çözümü,

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}1169 & 0{,}0115 \\ 0{,}0115 & 0{,}2431 \end{pmatrix}$$

olarak bulunmuştur.

KAYNAKLAR

[1] ALTER, O., BROWN, P.O., BOTSTEIN, D., Singular Value Decomposition for Genome-wide Expression Data Processing and Modelling, Pnas, 97(18), 10101-10106, 2000.

[2] ASLANTAŞ,V., A Singular Value Decomposition Based Image Watermarking Using Genetic Algorithm, International Journal of Electronics and Communications, 62(5), 386-394, 2008.

[3] BIGLIERI, E., YAO, K., Some Properties of Singular Value Decomposition and Their Applications to Digital Signal Processing, Signal Processing, 18(3), 277-289, 1989.

[4] CHANG, C.C., TSAİ, P. and LİN, C.C., SVD-Based Digital Image Watermarking Scheme, Pattern Recognition Lett 26, 1577-1586, 2005.

[5] ERİC CHU, King-Wah, Singular Value and Generalized Singular Value Decompositions and The Solution of Linear Matrix Equations, Linear Algebra Appl., 88(8), 83-98, 1987.

[6] ERİC CHU, King-Wah, Singular Value and Generalized Singular Value Decompositions and The Solution of Linear Matrix Equations, Linear Algebra Appl., 88(8), 83-98, 1987.

[7] GRAYBİLL, F. A., Matrices with Applications in Statistics, Colorado State University, Fort Collins, Wadswarth, 1983.

[8] HARVİLLE, David A., Matrix Algebra from a Statistician’s Perspective, Springer, 2008.

[9] HENK, Don F.J., On The Symmetric Solution of a Linear Matrix Equation, Linear Algebra and Its Appl., 93, 1-7, 1987.

[10] HUA, Dai, On The Symmetric Solution of a Linear Matrix Equations, Linear Algebra and Its Appl., 131, 1-7, 1990.

[11] KOLMAN, Bernard, and, HİLL, David, Elementary Linear Algebra with Applications, Prentice Hall, 2007.

[12] LİPSCHUTZ, Seymour, Linear algebra, Mcgraw-Hill, 1990.

[13] MACIEJEWSKI, A.A., KLEIN, C.A., The Singular Value Decomposition: Computation and Applications to Robotics, The International Journal of Robotics Research, 8(6), 63-79, 1989.

[14] MAGNUS, Jan R, and, NEUDECKER, H., The Commutation Matrix: Some Properties and Applications,The Annals of Statistics, 7(2), 381-394, 1979.

[15] MAGNUS, Jan R, and, NEUDECKER, H., The Elimination Matrix: Some Lemmas and Applications, Sıam J. Algebraic Discrete Methods, 1(4), 422-449, 1980

[16] MAGNUS, Jan R, and, NEUDECKER, H., Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, Wiley, 1988.

[17] MULLER, N.,MAGAIA,L.,HERBST, B.M., Singuler Value Decomposition, Eigenfaces, and 3D Reconstructions, SIAM REVIEW 46(3), 518-545, 2004.

[18] RAO, C. R., MITRA, S. K., Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, Wiley, New York, 1971.

[19] RUOTOLO, R., Using SVD to detect damage in structures with different operational conditions, Journal of Sound and Vibration, 226(3), 425-439, 1999.

[20] STEWART, G.W., On the Early History of the Singular Value Decomposition, SIAM REVİEW, 35(4), 551-566, 1993.

[21] VENIT, S., and, BISHOP, W., Elementary Linear Algebra, California State University at Los Angeles, Pws Publishers, 1985.

[22] WALL, M.E., RECHTSTEİNER, A., ROCHA, L.M, Singular Value Decomposition and principal component analysis, in A Practical Approach to Microarrary Data Analysis, BERRAR, D.P., DUBİTZKY, W., GRANZOW, M., 91-109, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Sinem ŞİMŞEK, 1986 yılında Sakarya'nın Adapazarı ilçesinde doğdu. Lise öğrenimini 2004 yılında Figen Sakallıoğlu Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başlayıp 2008 yılında mezun oldu ve Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı.