Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier

Xavier CABRÉ et Yvan MARTEL

X. C. : Departament de Matemàtica Aplicada 1, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona, Espagne

Y. M. : Département de Mathématiques, Université de Cergy–Pontoise, 2, avenue Adolphe Chauvin, 95302 Cergy–Pontoise Cedex, France

---

Résumé. Dans cette Note, on considère l'équation de la chaleur linéaire $u_t - \Delta u = a(x)u$ dans $(0,T) \times \Omega$, $u = 0$ sur $(0,T) \times \partial\Omega$ et $u(0) = u_0$ sur Ω. Ici Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, et on suppose $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a \geq 0$ et $u_0 \geq 0$. Une condition simple sur le potentiel a est nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions faibles positives, globales en temps et à croissance en temps au plus exponentielle. On montre que cette condition, reposant sur l'existence d'une inégalité de type Hardy avec poids $a(x)$, est aussi "presque" nécessaire pour l'existence de solutions faibles, positives et locales en temps. En appliquant ces résultats à quelques potentiels "critiques", on trouve des résultats nouveaux d'existence et d'explosion instantanée et totale.

Existence versus instantaneous blow-up for linear heat equations with singular potentials

Abstract. In this Note, we consider the linear heat equation $u_t - \Delta u = a(x)u$ in $(0,T) \times \Omega$, $u = 0$ on $(0,T) \times \partial\Omega$, and $u(0) = u_0$ on Ω, where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth bounded domain. We assume that $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a \geq 0$ and $u_0 \geq 0$. A simple condition on the potential a is necessary and sufficient for the existence of positive weak solutions that are global in time and grow at most exponentially in time. We show that this condition, based on the existence of a Hardy type inequality with weight $a(x)$, is "almost" necessary for the local existence in time of positive weak solutions. Applying these results to some "critical" potentials, we find new results on existence and on instantaneous and complete blow-up of solutions.

Abridged English Version

We consider the linear heat equation with potential

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = a(x)u & \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{on } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{on } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^N$. We assume that $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, and that $a \geq 0$ and $u_0 \geq 0$ a.e. in Ω. Note that a is time independent. We only consider nonnegative solutions of (1).

Let $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ for $x \in \Omega$, and let $L^1_\delta(\Omega) = L^1(\Omega, \delta(x)\,dx)$. For $0 < T \leq \infty$ and $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$, we say that $u \geq 0$ is a weak solution of (1) if, for each $0 < S < T$, we have that $u \in L^1((0,S)\times\Omega)$, $au\delta \in L^1((0,S)\times\Omega)$, and

$$\int_0^S \int_\Omega u\,(-\zeta_t - \Delta\zeta) - \int_\Omega u_0\,\zeta(0) = \int_0^S \int_\Omega a\,u\,\zeta$$

for all $\zeta \in C^2([0,S]\times\overline{\Omega})$ with $\zeta(S) \equiv 0$ on Ω and $\zeta = 0$ on $[0,S]\times\partial\Omega$. If $T = \infty$, we say that u is a global weak solution.

We define the generalized first eigenvalue of $-\Delta - a(x)$ in Ω by

$$\lambda_1(a;\Omega) = \inf_{0\not\equiv\varphi\in C_c^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega a(x)\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2},$$

which could be $-\infty$. Our main results are the following :

THEOREM 1. – (i) *Suppose that, for some $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$ and some constants C and M, there exists a global weak solution $u \geq 0$ of* (1) *such that $\|u(t)\delta\|_{L^1(\Omega)} \leq Ce^{Mt}$ for all $t \geq 0$. Then $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$.*

(ii) *Suppose that $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$. Then, for each $u_0 \in L^2(\Omega)$ with $u_0 \geq 0$, there exists a global weak solution $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$ of* (1) *such that*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\, e^{-\lambda_1(a;\Omega)t} \quad \textit{for all } t \geq 0.$$

THEOREM 2. – *Suppose that $\lambda_1((1-\varepsilon)a;\Omega) = -\infty$ for some constant $\varepsilon > 0$. Then, for any $T > 0$ and any $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$ with $u_0 \geq 0$ and $u_0 \not\equiv 0$, there is no weak solution $u \geq 0$ of* (1). *Moreover, there is instantaneous and complete blow-up for* (1), *in the following sense :*

For every $n \geq 1$, set $a_n(x) = \min(a(x), n)$, $u_{0n}(x) = \min(u_0(x), n)$, and let u_n be the unique global solution of (1) *with a and u_0 replaced, respectively, by a_n and u_{0n}. Then, for all $0 < \tau < T$,*

$$\frac{u_n(t,x)}{\delta(x)} \longrightarrow +\infty \quad \textit{uniformly in } (\tau, T)\times\Omega, \textit{ as } n \to \infty.$$

We apply these results to some specific equations with "critical" potentials. First, our method provides a new and quite elementary proof of the following result of Baras and Goldstein [1]. Suppose that $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, and $a(x) = c|x|^{-2}$, where $c > 0$ is a constant. Let $c^* = (N-2)^2/4$. For this potential, [1] establishes the following :

(a) if $c \leq c^*$, (1) has a global weak solution for every $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \geq 0$.
(b) if $c > c^*$, (1) has no positive weak solution for any $T > 0$ and any $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$ with $u_0 \geq 0$ and $u_0 \not\equiv 0$. Moreover, there is instantaneous and complete blow-up of approximate solutions.

We obtain (a) and (b) through direct applications of Theorem 1(ii) and Theorem 2, respectively. Here the essential role is played by Hardy's inequality with best constant :

$$\frac{(N-2)^2}{4}\int_\Omega \frac{\varphi^2}{|x|^2} \leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \qquad \text{for all } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Our second application is concerned with the case when $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is of class C^2, $N \geq 2$, and $a(x) = c\delta(x)^{-2}$. Here $c > 0$ is a constant and $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. For this problem, we obtain statements (a) and (b) above with $c^* = 1/4$. Here we use some recent Hardy type inequalities proved in [3] and [6].

Finally, recall that the results for the potential $c|x|^{-2}$ required $N \geq 3$. In dimension $N = 2$, we prove that the potential $a(x) = c|x|^{-2}(1 - \log|x|)^{-2}$ is "critical", in the sense that the dichotomy (a)-(b) occurs with $c^* = 1/4$ for all domains Ω with $0 \in \Omega \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

On considère dans cette Note l'équation de la chaleur linéaire avec potentiel

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = a(x)u & \text{dans } (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dans un domaine Ω borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. On suppose $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $a \geq 0$ et $u_0 \geq 0$ presque partout dans Ω. Remarquons que a est indépendant du temps. On ne considère ici que les solutions positives de (1).

En 1984, Baras et Goldstein [1] ont considéré le cas du potentiel $a(x) = c|x|^{-2}$, où $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ et $c > 0$ est une constante. Pour cette équation ils ont montré que, si $c \leq (N-2)^2/4 = c^*(N)$ alors, pour tout $u_0 \geq 0$ tel que $|x|^{-\alpha}u_0 \in L^1(\Omega)$, où α est la plus petite racine de $(N-2-\alpha)\alpha = c$, il existe une solution faible de (1) globale en temps. En revanche, si $c > (N-2)^2/4$ alors, pour tout $T > 0$ et pour tout $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, il n'existe pas de solution faible de (1); de plus, on a explosion instantanée et totale des solutions approchées de (1). Leur démonstration d'inexistence utilise la technique d'itération de Moser ainsi qu'une inégalité de Sobolev avec poids.

La constante critique $c^*(N) = (N-2)^2/4$ est reliée à l'inégalité de Hardy avec constante optimale :

$$\frac{(N-2)^2}{4}\int_\Omega \frac{\varphi^2}{|x|^2} \leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Dans cette Note, on considère des potentiels $a(x)$ arbitraires et on établit des relations similaires entre l'existence de solution et la validité d'une inégalité de type Hardy avec poids $a(x)$. En particulier, on donne une démonstration nouvelle et assez simple du résultat d'inexistence de Baras et Goldstein. On obtient aussi des résultats nouveaux en considérant d'autres potentiels singuliers "critiques".

Pour $x \in \Omega$, soit $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ et $L^1_\delta(\Omega) = L^1(\Omega, \delta(x)\,dx)$. Soit $0 < T \leq \infty$ et $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$. Dans la suite, on dit que $u \geq 0$ est une *solution faible* de (1) si, pour tout $0 < S < T$, on a $u \in L^1((0,S)\times\Omega)$, $au\delta \in L^1((0,S)\times\Omega)$ et

$$\int_0^S \int_\Omega u\,(-\zeta_t - \Delta\zeta) - \int_\Omega u_0\,\zeta(0) = \int_0^S\int_\Omega a\,u\,\zeta$$

pour tout $\zeta \in C^2([0,S]\times\overline{\Omega})$ tel que $\zeta(S) \equiv 0$ sur Ω et $\zeta = 0$ sur $[0,S]\times\partial\Omega$. Notons qu'une telle solution satisfait $u\delta \in C([0,T); L^1(\Omega))$. Si $T = \infty$, on dit que u est une solution faible *globale* de (1).

On introduit la première valeur propre "généralisée" de l'opérateur $-\Delta - a(x)$, définie par

$$\lambda_1(a;\Omega) = \inf_{0\not\equiv\varphi\in C_c^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega a(x)\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2},$$

qui, éventuellement, peut être $-\infty$. La condition $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$ traduit l'existence d'une inégalité de type Hardy-Sobolev avec poids $a(x)$. En effet, dans ce cas on peut écrire

$$\int_\Omega a(x)\varphi^2 \leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \lambda_1(a;\Omega)\int_\Omega \varphi^2 \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Notre premier résultat montre que $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions faibles *globales* de (1), avec croissance au plus exponentielle en temps.

THÉORÈME 1. – (i) *Supposons qu'il existe* $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$, *des constantes* C *et* M, *et une solution faible globale* $u \geq 0$ *de* (1) *telles que*

$$\|u(t)\delta\|_{L^1(\Omega)} \leq Ce^{Mt} \quad \textit{pour tout } t \geq 0. \tag{3}$$

Alors $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$.

(ii) *Supposons que* $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$. *Alors, pour tout* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *avec* $u_0 \geq 0$, *il existe une solution faible* $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$ *de* (1) *telle que*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\, e^{-\lambda_1(a;\Omega)t} \quad \textit{pour tout } t \geq 0. \tag{4}$$

Notre deuxième résultat énonce que la condition $\lambda_1((1-\varepsilon)a;\Omega) > -\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$, est nécessaire à l'existence d'une solution faible de (1) *locale* en temps.

THÉORÈME 2. – *Supposons qu'il existe une constante* $\varepsilon > 0$ *telle que* $\lambda_1((1-\varepsilon)a;\Omega) = -\infty$. *Alors, pour tout* $T > 0$ *et pour tout* $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ *et* $u_0 \not\equiv 0$, *il n'existe aucune solution faible* $u \geq 0$ *de* (1). *De plus, on a explosion instantanée et totale pour l'équation* (1) *au sens suivant :*

Soit, pour chaque $n \geq 1$, $a_n(x) = \min(a(x), n)$, $u_{0n}(x) = \min(u_0(x), n)$, *et* u_n *l'unique solution globale de*

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n = a_n(x) u_n & \textit{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ u_n = 0 & \textit{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ u_n(0) = u_{0n} & \textit{sur } \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

On a alors, pour tout $0 < \tau < T$,

$$\frac{u_n(t,x)}{\delta(x)} \longrightarrow +\infty \quad \textit{uniformément sur } (\tau,T)\times\Omega, \textit{ quand } n \to \infty.$$

Éléments de démonstration des Théorèmes 1 *et* 2. *Condition suffisante.* – Il est assez standard d'établir l'existence globale d'une solution faible sous l'hypothèse $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$. En effet, soit a_n, u_{0n} et u_n les suites définies dans le Théorème 2. Alors, en multipliant (5) par u_n et en intégrant par parties sur Ω, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2(t) = -\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^2 + \int_\Omega a_n(x) u_n^2(t) \leq -\lambda_1(a;\Omega)\int_\Omega u_n^2(t),$$

pour tout $t > 0$. On obtient ainsi l'estimation (4) où u est remplacé par u_n, ce qui donne une borne uniforme en n sur la suite (u_n). Par convergence monotone, la limite u de la suite u_n est solution faible de (1); voir [1] et [7].

Conditions nécessaires. – Supposons que $u \geq 0$ soit une solution faible de (1) sur $(0,T)$. Soit $0 < u_n \leq u$ la solution de (5). Par convergence monotone, la limite $\underline{u}$ de la suite u_n existe, elle satisfait $0 < \underline{u} \leq u$, et $\underline{u}$ est solution faible de (1) ($\underline{u}$ est la solution minimale de (1)). Les Théorèmes 1(i) et 2 sont des conséquences de l'inégalité suivante. Pout tout $0 < t_1 < t_2 < T$, on a

$$\int_\Omega a(x)\varphi^2 - \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \leq \frac{1}{t_2 - t_1}\int_\Omega \log\left(\frac{\underline{u}(t_2)}{\underline{u}(t_1)}\right)\varphi^2 \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{6}$$

Pour montrer (6), on multiplie (5) par φ^2/u_n et on intègre par parties sur Ω. Notons que φ^2/u_n est à support compact dans Ω. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_n(x)\varphi^2 &= \int_\Omega (\partial_t u_n)\frac{\varphi^2}{u_n} + \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla(\varphi^2/u_n) \\ &= \frac{d}{dt}\int_\Omega (\log u_n)\varphi^2 + 2\int_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla\varphi)\frac{\varphi}{u_n} - \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \frac{\varphi^2}{u_n^2} \le \frac{d}{dt}\int_\Omega (\log u_n)\varphi^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

En intégrant entre t_1 et t_2, et en faisant $n \to \infty$, on prouve (6). Dans le passage à la limite, on écrit $\log(u_n(t_2)/u_n(t_1)) = \log(u_n(t_2)\delta) - \log(u_n(t_1)\delta)$. Pour tout $0 < t < T$, on a $u_n(t)\delta \uparrow \underline{u}(t)\delta$ dans $L^1(\Omega)$, et $u_n(t) \ge T(t)u_{0n} \ge c$ sur $\operatorname{supp}\varphi$, avec $c > 0$ indépendent de n (par le principe du maximum fort pour le semigroupe $T(t)$ associé à $\partial_t - \Delta$). On obtient donc $\int_\Omega \log(u_n(t_i)\delta)\varphi^2 \uparrow \int_\Omega \log(\underline{u}(t_i)\delta)\varphi^2$, pour $i = 1, 2$.

On indique maintenant comment prouver les conditions nécessaires des Théorèmes 1 et 2 à l'aide de (6). Supposons d'abord $T = \infty$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $\int_\Omega \varphi^2 = 1$. En utilisant l'inégalité de Jensen, on a, pour tout $t > 1$,

$$\int_\Omega a(x)\varphi^2 - \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \le \frac{1}{t-1}\left(\log\left(\int_\Omega \underline{u}(t)\delta\varphi^2\right) - \int_\Omega \log(\underline{u}(1)\delta)\varphi^2\right).$$

Comme $\underline{u} \le u$, l'inégalité (3) entraîne $\log\left(\int_\Omega \underline{u}(t)\delta\varphi^2\right) \le \log\left(C\|\varphi\|_\infty^2\right) + Mt$. En faisant $t \to +\infty$, on obtient donc $-\lambda_1(a;\Omega) \le M < \infty$.

Lorsque $T < \infty$, on fixe $0 < t_1 < t_2 < T$ et on utilise $\log(\underline{u}(t_2)/\underline{u}(t_1)) \in L^p(\Omega)$, pour tout $1 \le p < \infty$. En effet, on a $\underline{u}(t)\delta \in L^1(\Omega)$ et $\underline{u}(t) \ge T(t)u_0 \ge c(t)\delta$, avec $c(t) > 0$, pour tout $0 < t < T$ (voir Lemme 2 dans [7]). Cela implique que $\log(\underline{u}(t)\delta) \in L^p(\Omega)$, pour tout $1 \le p < \infty$. De $\log(\underline{u}(t_2)/\underline{u}(t_1)) \in L^{N/2}(\Omega)$, on déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ (indépendante de φ) telle que

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_\Omega \log\left(\frac{\underline{u}(t_2)}{\underline{u}(t_1)}\right)\varphi^2 \le \varepsilon\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + C(\varepsilon)\int_\Omega \varphi^2.$$

On obtient donc $\lambda_1((1+\varepsilon)^{-1}a;\Omega) > -\infty$. L'explosion instantanée et totale résulte de la non existence de solution faible, par les arguments de Martel [7] portant sur les solutions faibles (voir aussi Baras et Goldstein [1] et Peral et Vázquez [8]).

Dans ce qui suit, on donne quelques applications des Théorèmes 1 et 2.

(i) $a \in L^p(\Omega)$, avec $p \ge N/2$. Il est bien connu que si $a \in L^p(\Omega)$, avec $p \ge N/2$ alors $\lambda_1(a;\Omega) > -\infty$. On en déduit que, pour $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une solution faible globale de (1); voir l'appendice de Brezis et Cazenave [2] pour des résultats précis d'existence et unicité dans le cas $a = a(t,x)$ avec $a \in L^\infty((0,T); L^p(\Omega))$ et $p \ge N/2$.

(ii) $a(x) = c|x|^{-2}$. Supposons que $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $N \ge 3$. L'inégalité de Hardy (2) montre que $\lambda_1(c|x|^{-2};\Omega) \ge 0$ pour tout $c \le c^*(N)$, où $c^*(N) = (N-2)^2/4$. D'autre part, il est facile de démontrer que $\lambda_1(c|x|^{-2};\Omega) = -\infty$, pour tout $c > c^*(N)$ (voir [4]). En appliquant les Théorèmes 1(ii) et 2, on montre, pour $c^* = c^*(N)$:

(a) si $c \le c^*$, alors (1) admet une solution faible globale u pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \ge 0$.

(b) si $c > c^*$ alors, pour tout $u_0 \in L^1_\delta(\Omega)$, $u_0 \ge 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, (1) n'admet pas de solution faible locale. De plus, on a explosion instantanée et totale pour l'équation (1).

On retrouve donc le résultat d'inexistence (b) de Baras et Goldstein [1] cité au début de cette Note. Le résultat d'existence (a) est aussi contenu dans [1].

(iii) $a(x) = c\delta^{-2}(x)$. Ceci est un potentiel intéressant qui, à notre connaissance, n'a pas été considéré dans le cadre de l'équation (1). On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est de classe C^2, $N \geq 2$, et $c > 0$ est une constante. Rappelons que $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Pour ce problème, on obtient les propositions (a) et (b) ci-dessus avec $c^* = 1/4$.

En effet, considérons l'inégalité de type Hardy suivante :

$$c \int_\Omega (\varphi/\delta)^2 \leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \lambda \int_\Omega \varphi^2 \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{7$_\lambda$}$$

Quand $\lambda = 0$, il est connu que la constante optimale $c = c(\Omega)$ dans $(7)_0$ satisfait $0 < c(\Omega) \leq 1/4$. En outre, on sait que $c(\Omega) < 1/4$ pour certains domaines réguliers (voir [3], [6]). Cependant, Brezis et Marcus [3] ont montré récemment qu'il existe une constante $\lambda = \lambda(\Omega) \in \mathbb{R}$ telle que l'inégalité $(7)_\lambda$ soit vraie avec $c = 1/4$. On obtient alors le résultat d'existence (a) pour tout $c \leq 1/4$. D'autre part, pour tout $c > 1/4$, on a $\lambda_1(c\delta^{-2}; \Omega) = -\infty$ (voir [3]), et on en déduit la proposition (b).

(iv) $a(x) = c|x|^{-2}(1 - \log|x|)^{-2}$, $N = 2$. Rappelons que l'on a supposé $N \geq 3$ dans les résultats de (ii) sur le potentiel $c|x|^{-2}$. En dimension $N = 2$, on démontre que le potentiel $a(x) = c|x|^{-2}(1 - \log|x|)^{-2}$ est “critique”, au sens qu'il existe des solutions faibles positives de (1) si et seulement si $c \leq c^* = 1/4$, pour tout domaine Ω tel que $0 \in \Omega \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. On peut généraliser ce résultat au potentiel $a(x) = ((N-2)^2/4)|x|^{-2} + c|x|^{-2}(1 - \log|x|)^{-2}$ en toute dimension $N > 1$. Ceci sera démontré dans une prochaine publication [5].

Dans [5], on donnera également des applications des méthodes de cette Note à des problèmes quasi-linéaires et semi-linéaires. On étudiera aussi des questions d'unicité et régularité des solutions de quelques problèmes considérés dans ce travail.

Remerciements. Les auteurs souhaitent remercier Haim Brezis et Thierry Cazenave pour des discussions très stimulantes.

Références bibliographiques

[1] **Baras P. et Goldstein J.A., 1984.** The heat equation with a singular potential, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284, pp. 121-139.

[2] **Brezis H. et Cazenave T., 1996.** A nonlinear heat equation with singular initial data, *J. Anal. Math.*, 68, pp. 277-304.

[3] **Brezis H. et Marcus M., 1997.** Hardy's inequalities revisited, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 25, pp. 217-237.

[4] **Brezis H. et Vázquez J.L., 1997.** Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems, *Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid*, 10, pp. 443-469.

[5] **Cabré X. et Martel Y.** Linear heat equations with singular potentials and Hardy's inequalities, en préparation.

[6] **Davies E.B., 1995.** The Hardy constant, *Quart. J. Math. Oxford*, 46, pp. 417-431.

[7] **Martel Y., 1998.** Complete blow up and global behavior of solutions of $u_t - \triangle u = g(u)$, *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire*, 15, pp. 687-723.

[8] **Peral I. et Vázquez J.L., 1995.** On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 129, pp. 201-224.