



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA

**Modelo cinemático de la interface háptica  
PHANToM Premium 1.5/6DOF**

**Adolfo Rodríguez Tsouroukdissian, Luis Basañez  
Villaluenga**

*IOC-DT-P-2005-6  
Febrer 2005*

Institut d'Organització i Control  
de Sistemes Industrials



# Modelo cinemático de la interfase háptica PHANToM<sub>TM</sub> Premium 1.5/6DOF

Adolfo Rodríguez Tsouroukdissian  
Luis Basañez Villaluenga

*Instituto de Organización y Control  
Universidad Politécnica de Cataluña  
02 de febrero de 2005*

## 1. RESUMEN

En el presente reporte se deriva la cinemática directa e inversa, así como el Jacobiano de la interfase háptica PHANToM<sub>TM</sub> Premium 1.5/6DOF.

## 2. CINEMÁTICA

La configuración inicial del manipulador y la nomenclatura utilizada se muestran en la figura 1. Dado que los ejes de rotación de las tres últimas articulaciones se interceptan en un mismo punto, el manipulador es de tipo “wrist-partitioned”. Esto es, las tres primeras articulaciones se encargan del

posicionamiento del elemento terminal, y las tres últimas de su orientación.

El problema cinemático de este tipo de manipulador se puede descomponer en dos problemas independientes, los de obtener el mapa directo e inverso entre:

- Los ángulos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  y la posición del elemento terminal, medida con respecto al sistema base.
- Los ángulos  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  y la orientación del elemento terminal, medida con respecto al sistema base.

Las transformaciones de cuerpo rígido y cálculos cinemáticos siguen la notación de [2].

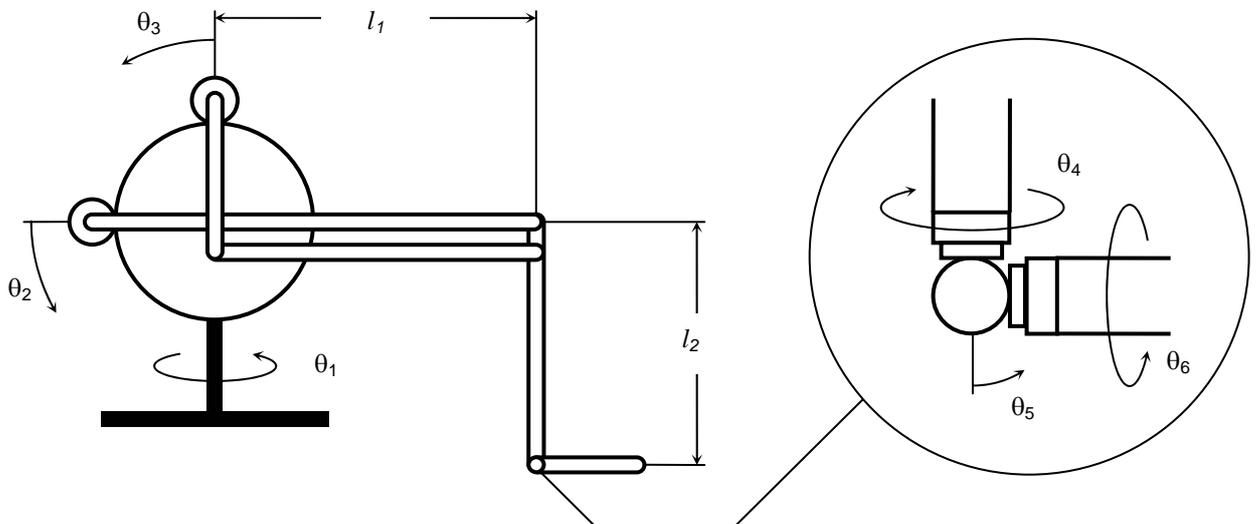


Figura 1. Configuración inicial del manipulador y nomenclatura utilizada

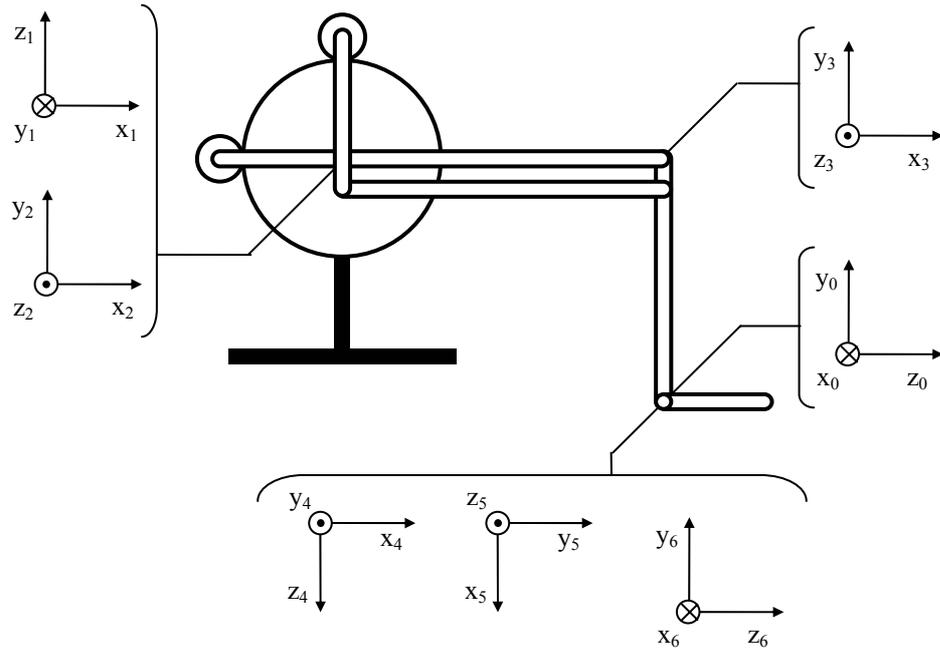


Figura 2. Sistemas de coordenadas en la configuración inicial

## 2.1. Cinemática Directa

Los sistemas de coordenadas asociados a cada articulación y el sistema base se muestran en la figura 2.

Las transformaciones homogéneas entre el sistema  $\{i\}$  y el sistema  $\{i-1\}$ , para  $i \in \{1, \dots, 6\}$  son

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 - \theta_2) & -\sin(\theta_3 - \theta_2) & 0 & l_1 \\ \sin(\theta_3 - \theta_2) & \cos(\theta_3 - \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\theta_6) & \sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

La transformación homogénea entre el sistema  $\{6\}$  y el sistema  $\{0\}$  se obtiene a partir de la composición

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T. \quad (7)$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0_6R & {}^0_6d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Por razones de simplicidad y brevedad, se adoptará en lo que resta de documento la notación  $\sin(\theta_i) = s_i$  y  $\cos(\theta_i) = c_i$ , para las posiciones de las articulaciones y  $\sin(\alpha) = s_\alpha$  y  $\cos(\alpha) = c_\alpha$  para los demás ángulos.

$$r_{11} = -s_1c_3c_4s_5s_6 - s_1s_3c_5s_6 + s_1c_3s_4c_6 + c_1s_4s_5s_6 + c_1c_4c_6 \quad (9)$$

$$r_{12} = -s_1c_3c_4s_5c_6 - s_1s_3c_5c_6 - s_1c_3s_4s_6 + c_1s_4s_5c_6 - c_1c_4s_6 \quad (10)$$

$$r_{13} = s_1c_3c_4c_5 - s_1s_3s_5 - c_1s_4c_5 \quad (11)$$

$$r_{21} = -s_3c_4s_5s_6 + s_3s_4c_6 + c_3c_5s_6 \quad (12)$$

$$r_{22} = -s_3c_4s_5c_6 - s_3s_4s_6 + c_3c_5c_6 \quad (13)$$

$$r_{23} = s_3c_4c_5 + c_3s_5 \quad (14)$$

$$r_{31} = -c_1c_3c_4s_5s_6 - c_1s_3c_5s_6 + c_1c_3s_4c_6 - s_1s_4s_5s_6 - s_1c_4c_6 \quad (15)$$

$$r_{32} = -c_1c_3c_4s_5c_6 - c_1s_3c_5c_6 - c_1c_3s_4s_6 - s_1s_4s_5c_6 + s_1c_4s_6 \quad (16)$$

$$r_{33} = c_1c_3c_4c_5 - c_1s_3s_5 + s_1s_4c_5 \quad (17)$$

$$p_x = s_1(l_1c_2 + l_2s_3) \quad (18)$$

$$p_y = l_1s_2 + l_2(1 - c_3) \quad (19)$$

$$p_z = l_1(c_1c_2 - 1) + l_2(c_1s_3) \quad (20)$$

### Posición

La posición del elemento terminal en coordenadas del sistema base  $p_{x_0}$ ,  $p_{y_0}$ ,  $p_{z_0}$  viene dada directamente por los parámetros del vector  ${}^0_6d$  (ecuaciones (18), (19) y (20) respectivamente).

### Orientación

La orientación del elemento terminal está expresada en términos de los ángulos de Euler  $YXZ$ . Estos corresponden a las siguientes rotaciones sucesivas:

- Rotación  $\gamma$  alrededor del eje  $z$
- Rotación  $\beta$  alrededor del eje  $x$
- Rotación  $\alpha$  alrededor del eje  $y$

La matriz de rotación asociada a estos ángulos es

$$R_E = \begin{bmatrix} s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha c_\beta \\ c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma & -s_\beta \\ c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (21)$$

Los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  se obtienen igualando (21) y la matriz de rotación contenida en (8)

$$R_E = {}^0_6R. \quad (22)$$

$\beta$  se calcula a partir de

$$\beta = -\text{asin}(r_{23}). \quad (23)$$

En el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$  la solución de (23) tiene la forma

$$\beta = \text{atan2}\left(-r_{23}, \sqrt{1 - r_{23}^2}\right). \quad (24)$$

Si  $\beta \neq \{-\pi/2, \pi/2\}$

$$\alpha = \text{atan2}\left(\frac{r_{13}}{c_\beta}, \frac{r_{33}}{c_\beta}\right) \quad (25)$$

$$\gamma = \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{c_\beta}, \frac{r_{22}}{c_\beta}\right). \quad (26)$$

En  $\beta = \{-\pi/2, \pi/2\}$ , (25) y (26) no están definidas.

Evaluando (21) en  $\beta = -\pi/2$

$$R_E = \begin{bmatrix} c_{\alpha+\gamma} & -s_{\alpha+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_{\alpha+\gamma} & -c_{\alpha+\gamma} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\alpha + \gamma = \text{atan2}(-r_{12}, -r_{32}). \quad (28)$$

Dado que (28) tiene infinitas soluciones para  $\alpha$  y  $\gamma$ , se impone la restricción adicional  $\gamma = 0$  y se obtiene

$$\alpha = \text{atan2}(-r_{12}, -r_{32}). \quad (29)$$

Análogamente, evaluando (21) en  $\beta = \pi/2$

$$R_E = \begin{bmatrix} c_{\alpha-\gamma} & s_{\alpha-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_{\alpha-\gamma} & c_{\alpha-\gamma} & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\alpha - \gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{32}) \quad (31)$$

Imponiendo la restricción adicional  $\gamma = 0$

$$\alpha = \text{atan2}(r_{12}, r_{32}) \quad (32)$$

## 2.2. Cinemática Inversa

### Posición

La metodología descrita en este apartado sigue el esquema propuesto por [1].

A partir de la vista superior del manipulador mostrada en la figura 3 se obtiene  $\theta_1$

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_{x_0}, p_{z_0} + l_1). \quad (33)$$

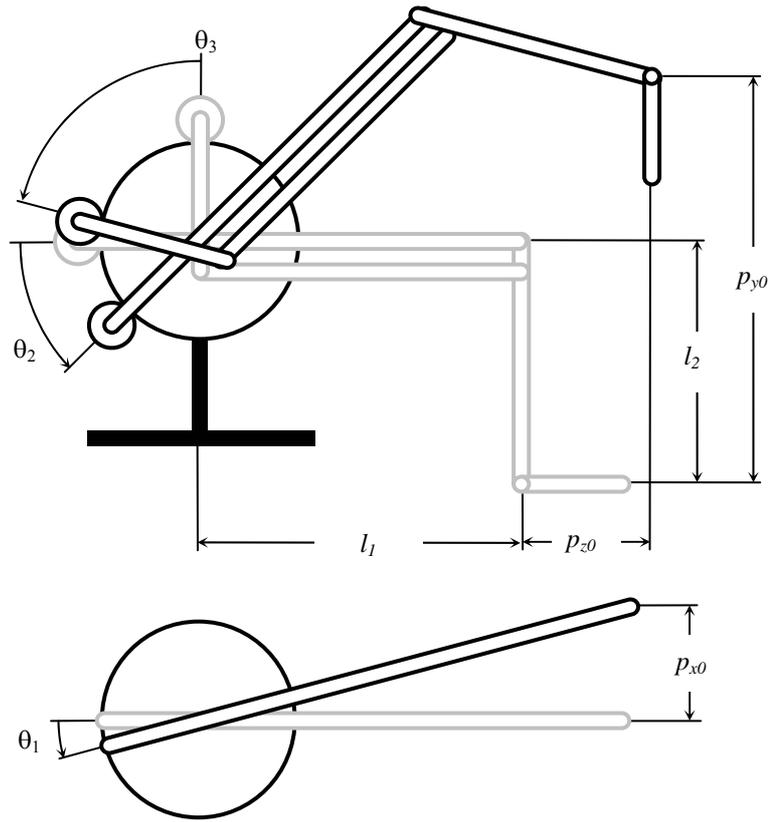


Figura 3: Vistas lateral y superior del manipulador en una posición genérica

Para calcular  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se tiene, según las figuras 3 y 4

$$R = \sqrt{(p_{z0} + l_1)^2 + p_{x0}^2} \quad (34)$$

$$r = \sqrt{(p_{y0} - l_2)^2 + R^2} \quad (35)$$

$$\zeta = \text{atan2}(p_{y0} - l_2, R). \quad (36)$$

A partir del teorema del coseno del triángulo superior de la figura 4 se obtienen los ángulos  $\phi$  y  $\psi$

$$\phi = \text{acos}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r^2}{2l_1l_2}\right) \quad (37)$$

$$\psi = \text{acos}\left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + r^2}{2l_1r}\right). \quad (38)$$

Dado que los ángulos  $\phi$  y  $\psi$  son siempre positivos en el espacio de trabajo del manipulador,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se pueden expresar como

$$\theta_2 = \psi + \zeta \quad (39)$$

$$\theta_3 = \theta_2 + \phi - \pi/2. \quad (40)$$

### Orientación

Para que el elemento terminal esté orientado según los ángulos de Euler  $YXZ$  se debe satisfacer (22)

$${}^0_6R = R_E \quad (41)$$

$${}^0_3R {}^4_6R = R_E \quad (42)$$

$${}^4_6R = {}^0_3R^{-1} R_E \quad (43)$$

$${}^4_6R = {}^0_3R^T R_E \quad (44)$$

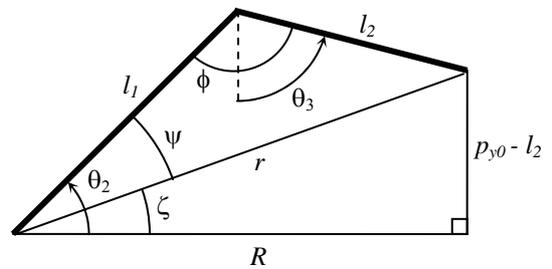


Figura 4: Diagrama utilizado en el cálculo de la cinemática inversa

donde

$${}^4_6R = \begin{bmatrix} -c_4s_5s_6 + s_4c_6 & -c_4s_5c_6 - s_4s_6 & c_4c_5 \\ c_5s_6 & c_5c_6 & s_5 \\ -s_4s_5s_6 - c_4c_6 & -s_4s_5c_6 + c_4s_6 & s_4c_5 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$${}^0_3R^T R_E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$a_{11} = c_1c_3(c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma) + s_1c_3(s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) + s_3c_\beta s_\gamma \quad (47)$$

$$a_{12} = c_1c_3(c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma) + s_1c_3(s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma) + s_3c_\beta c_\gamma \quad (48)$$

$$a_{13} = c_1c_3c_\alpha c_\beta + s_1c_3s_\alpha c_\beta - s_3s_\beta \quad (49)$$

$$a_{21} = -c_1s_3(c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma) - s_1s_3(s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) + c_3c_\beta s_\gamma \quad (50)$$

$$a_{22} = -c_1s_3(c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma) - s_1s_3(s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma) + c_3c_\beta c_\gamma \quad (51)$$

$$a_{23} = -c_1s_3c_\alpha c_\beta - s_1s_3s_\alpha c_\beta - c_3s_\beta \quad (52)$$

$$a_{31} = s_1(c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma) - c_1(s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) \quad (53)$$

$$a_{32} = s_1(c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma) - c_1(s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma) \quad (54)$$

$$a_{33} = s_1c_\alpha c_\beta - c_1s_\alpha c_\beta \quad (55)$$

$\theta_5$  se calcula como

$$\theta_5 = \text{asin}(a_{23}). \quad (56)$$

En el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$  la solución de (56) tiene la forma

$$\theta_5 = \text{atan2}\left(a_{23}, \sqrt{1 - a_{23}^2}\right) \quad (57)$$

Si  $\theta_5 \neq -\pi/2$ ,  $\theta_4$  y  $\theta_6$  quedan como

$$\theta_4 = \text{atan2}\left(\frac{a_{33}}{c_5}, \frac{a_{13}}{c_5}\right) \quad (58)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}\left(\frac{a_{21}}{c_5}, \frac{a_{22}}{c_5}\right) \quad (59)$$

En  $\theta_5 = -\pi/2$  (58) y (59) no están definidas ya que existe una singularidad de muñeca. Evaluando (45) en  $\theta_5 = -\pi/2$

$${}^4_6R = \begin{bmatrix} s_{4+6} & c_{4+6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -c_{4+6} & s_{4+6} & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

se obtiene

$$\theta_4 + \theta_6 = \text{atan2}(a_{32}, -a_{31}) \quad (61)$$

Para que existan  $\theta_4$  y  $\theta_6$  únicos para un  $\theta_5$  dado, se combina (61) con unas restricciones adicionales que dan preferencia al movimiento de la articulación 6 con respecto al de la articulación 4:

Si  $\theta_{6\min} \leq \sigma \leq \theta_{6\max}$

$$\theta_4 = 0 \quad (62)$$

$$\theta_6 = \sigma \quad (63)$$

Si  $\sigma < \theta_{6\min}$

$$\theta_4 = \sigma - \theta_{6\min} \quad (64)$$

$$\theta_6 = \theta_{6\min} \quad (65)$$

Si  $\sigma > \theta_{6\max}$

$$\theta_4 = \sigma - \theta_{6\max} \quad (66)$$

$$\theta_6 = \theta_{6\max} \quad (67)$$

donde  $\sigma = \text{atan2}(a_{32}, -a_{31})$ .

El caso singular  $\theta_5 = \pi/2$  no será analizado ya que representa una configuración imposible del manipulador.

Dado que (56) tiene dos soluciones en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , se pueden calcular dos conjuntos de ángulos  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  que satisfagan la orientación definida por los ángulos de Euler YXZ.

El primer conjunto ha sido calculado para  $|\theta_5| \in [0, \pi/2)$ , y el segundo, llamado  $\theta_4^*, \theta_5^*, \theta_6^*$  se calcula para  $|\theta_5| \in (\pi/2, \pi]$  según

$$\theta_5^* = \text{atan2}\left(a_{23}, -\sqrt{1 - a_{23}^2}\right) \quad (68)$$

$$\theta_4^* = a \tan 2(-s_4, -c_4) \quad (69)$$

$$\theta_6^* = a \tan 2(-s_6, -c_6) \quad (70)$$

### 3. JACOBIANO

El Jacobiano  $J$  de un manipulador de  $n$  articulaciones es una matriz que relaciona las velocidades de las articulaciones  $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dots \ \dot{\theta}_n]^T$  con la velocidad del elemento terminal. El Jacobiano está compuesto por dos submatrices:

- $J_\omega$  que relaciona las velocidades angulares de las articulaciones con la velocidad angular del elemento terminal.

$${}^0_n \omega = J_\omega \dot{\theta} \quad (71)$$

- $J_v$  que relaciona las velocidades angulares de las articulaciones con la velocidad lineal del elemento terminal.

$${}^0_n v = J_v \dot{\theta} \quad (72)$$

El Jacobiano tiene la forma

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad (73)$$

El manipulador en consideración tiene 6 articulaciones, por lo tanto  $n=6$ .

#### $J_\omega$

El Jacobiano de velocidades angulares  $J_\omega$  está compuesto por vectores columna  $J_{\omega i}$ , cada uno correspondiente al vector  $\hat{k}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$  asociado al sistema  $\{i\}$ , expresado en coordenadas del sistema  $\{0\}$

$$J_{\omega i} = {}^0_i R \hat{k}_i \quad (74)$$

$$J_\omega = [J_{\omega 1} \ J_{\omega 2} \ J_{\omega 3} \ J_{\omega 4} \ J_{\omega 5} \ J_{\omega 6}] \quad (75)$$

donde

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$J_{\omega 2} = J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} s_1 s_3 \\ -c_3 \\ c_1 s_3 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} -s_1 c_3 s_4 - c_1 c_4 \\ -s_3 s_4 \\ -c_1 c_3 s_4 + s_1 c_4 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$J_{\omega 6} = \begin{bmatrix} s_1 c_3 c_4 c_5 - c_1 s_4 c_5 - s_1 s_3 s_5 \\ s_3 c_4 c_5 + c_3 s_5 \\ c_1 c_3 c_4 c_5 + s_1 s_4 c_5 - c_1 s_3 s_5 \end{bmatrix} \quad (80)$$

#### $J_v$

El Jacobiano de velocidades lineales  $J_v$  está compuesto por vectores columna  $J_{v i}$ , cada uno correspondiente al producto vectorial

$$J_{v i} = J_{\omega i} \times ({}^0 d - {}^0_i d) \quad (81)$$

$$J_v = [J_{v 1} \ J_{v 2} \ J_{v 3} \ J_{v 4} \ J_{v 5} \ J_{v 6}] \quad (82)$$

$J_{\omega i}$  es el vector unitario orientado según el eje de giro del sistema  $\{i\}$ , y  $({}^0 d - {}^0_i d)$  el vector entre los orígenes de los sistemas  $\{i\}$  y  $\{n\}$ . Ambos vectores están expresados en coordenadas del sistema  $\{0\}$ .

Los distintos vectores  ${}^0_i d$  tienen la forma

$${}^0_1 d = {}^0_2 d = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ -l_1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$${}^0_3 d = \begin{bmatrix} l_1 s_1 c_2 \\ l_1 s_2 + l_2 \\ l_1 (c_1 c_2 - 1) \end{bmatrix} \quad (84)$$

$${}^0_4 d = {}^0_5 d = {}^0_6 d = \begin{bmatrix} s_1 (l_1 c_2 + l_2 s_3) \\ l_1 s_2 + l_2 (1 - c_3) \\ l_1 (c_1 c_2 - 1) + l_2 c_1 s_3 \end{bmatrix} \quad (85)$$

y finalmente

$$J_{v 1} = \begin{bmatrix} c_1 (l_1 c_2 + l_2 s_3) \\ 0 \\ -s_1 (l_1 c_2 + l_2 s_3) \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$J_{v 2} = \begin{bmatrix} s_1 (-l_1 s_2 + l_2 c_3) \\ l_1 c_2 + l_2 s_3 \\ c_1 (-l_1 s_2 + l_2 c_3) \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$J_{v 3} = \begin{bmatrix} l_2 s_1 c_3 \\ l_2 s_3 \\ l_2 c_1 c_3 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$J_{v 4} = J_{v 5} = J_{v 6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (89)$$

#### 4. ESPACIO DE TRABAJO

Los datos utilizados en los cálculos cinemáticos así como las soluciones obtenidas serán válidos siempre y cuando pertenezcan al espacio de trabajo del manipulador. Este espacio de trabajo viene definido por las longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , y el rango angular de cada una de las articulaciones  $\theta_i$ , con  $i \in \{1, \dots, 6\}$ .

#### REFERENCIAS

- [1] Çavuşoğlu, M. C. & Feygin, D. (2001). *Kinematics and dynamics of PHANToM™ model 1.5 haptic interface* (Tech. Rep.). University of California at Berkley, Electronics Research Laboratory Memo M01/15
- [2] Craig, J. J. (1989). *Introduction to robotics* (Second ed.) Adison-Wesley. Reading, MA.