Sistemas singulares y matrices polinomiales

M. Dolors Magret
Departament de Matemàtica Aplicada I, ETSEIB-UPC
Av. Diagonal, 647 08028 Barcelona, Spain
E-mail: `M.Dolors.Magret@upc.edu`

Resumen

Los sistemas lineales singulares (DAEs) y su control han sido extensamente estudiados a partir de la década de 1970 (véanse, por ejemplo, [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [15]). Estos sistemas aparecen de forma natural al proponer modelos para distintos tipos de sistemas: mecánicos, eléctricos, económicos, etc.

En esta exposición se aborda el problema de estudiar la biyección que existe entre los sistemas lineales singulares invariantes en el tiempo con la relación de equivalencia que denominaremos "equivalencia por realimentación" (y que generaliza la equivalencia por bloques en el caso de parejas de matrices) y la "equivalencia estricta" extendida a matrices polinomiales de orden cualquiera, probándose que esta correspondencia preserva las relaciones de equivalencia introducidas en ambos conjuntos.

1 Introducción

Se han estudiado muchas relaciones de equivalencia entre los sistemas dinámicos atendiendo a su interés en teoría de control. Entre ellas se encuentran las que conservan la matriz de transferencia (H. H. Rosenbrock, 1974; P. Fuhrmann, 1977), las que conservan la estructura de ceros, pero no la de polos (Kouvaritakis i MacFarlane, 1976; Owens, 1978), etc.

De todas las relaciones de equivalencia que conservan la matriz de transferencia la más común es la de semejanza (que se corresponde con cambios de base en el espacio de estados) y para la que son invariantes los valores propios y propiedades cualitativas del sistema como la controlabilidad y la observabilidad. En el caso de las matrices cuadradas, la forma canónica clásica por esta relación de equivalencia es la forma reducida de Jordan.

En el caso de parejas, esta relación se generaliza a la relación de semejanza por bloques, para la que se ha obtenido una forma canónica, la forma reducida de Brunovsky, y de la que J. Ferrer i F. Puerta (1992) hacen una descripción geométrica, considerando las parejas como aplicaciones lineales definidas sobre un subespacio. Véanse [13], [14], [16] para más detalles.

Al ser los polos de un sistema completamente controlable modificables arbitrariamente por realimentación, provoca la introducción de realimentaciones en el sistema. Es a principios de la década de 1970 cuando R. E. Kalman y A. S. Morse (1972 y 1973, respectivamente) introducen una nueva relación de equivalencia, permitiendo la realimentación de estados (el último de estos autores también admite la inyección externa).

Dado un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo, que puede definirse por una terna de matrices (A, B, C) con $A \in M_n$, $B \in M_{n\times m}$, $C \in M_{p\times n}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

la relación de equivalencia que resulta tras aplicar una o más de las transformacions siguientes: cambios de base en los espacios de estados, entradas y salidas, realimentación de estado e inyección externa, se corresponde con la relación de equivalencia estricta de los haces de matrices asociados al sistema. Esta relación ha sido estudiada, entre otros, por B. P. Molinari, 1978; I. de Hoyos, 1990. Es decir, dos sistemas definidos por ternas de matrices (A, B, C), (A', B', C') son equivalentes si, y sólo si, los haces de matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son estrictamente equivalentes (J. S. Thorp, 1972; I. de Hoyos, 1990).

Esta caracterización es la que ha permitido utilizar la teoría de Kronecker de haces singulares para la obtención de una forma reducida canónica, la llamada forma reducida de Brunovsky-Kronecker. Así, A. S. Morse (1973), suponiendo B, C de rango máximo, obtiene una forma canónica, que no conserva la partición interna del haz de matrices, com sería deseable a la hora de estudiar sistemas dinámicos. Independientemente, el mismo año, J. S. Thorp obtiene una forma canónica con la misma relación de equivalencia, que coincide con la anterior con las necesarias restricciones, y con la que sí se conserva la partición interna (véanse [9], [14], [16], por ejemplo, para más detalles).

Caso aparte es el de los sistemas singulares de primer orden

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

$E, A \in M_n$, $B \in M_{n\times m}, C \in M_{p\times n}$, $\operatorname{rango} E < n$.

Una generalización natural de las relaciones de equivalencia anteriores es considerar que dos sistemas son equivalentes cuando se permiten una o más de las siguientes transformaciones: cambios de base en los espacios de estado, de entradas o de salidas, realimentación de estados, realimentación derivativa e inyección externa. Matricialmente, estas transformaciones se corresponden con las siguientes tranformaciones en la cuaterna de matrices que define el sistema:

i) $(E, A, B, C) \longrightarrow (P^{-1}EP,\ P^{-1}AP, P^{-1}B, CP)$
ii) $(E, A, B, C) \longrightarrow (E, A, BR, C)$
iii) $(E, A, B, C) \longrightarrow (E, A, B, SC)$
iv) $(E, A, B, C) \longrightarrow (E, A + BU, B, C)$
v) $(E, A, B, C) \longrightarrow (E + BV, A, B, C)$
vi) $(E, A, B, C) \longrightarrow (E, A + WC, B, C)$

para unas ciertas matrices $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $R \in Gl_m(\mathbb{C})$, $S \in Gl_p(\mathbb{C})$, $W \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$, $U, V \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Llamaremos semejanza por realimentación a esta relación de equivalencia.

De forma similar al caso de los sistemas no singulares, existe una correspondencia, que preserva las relaciones de equivalencia, entre el conjunto de cuaternas que definen los sistemas singulares, con la relación de semejanza por realimentación, y un subconjunto del conjunto de las matrices polinomiales de grado dos con la relación de equivalencia estricta (generalización natural de la relación de equivalencia estricta entre haces de matrices): diremos que las matrices polinomiales $M(\lambda)$ y $M'(\lambda)$ son estrictamente equivalentes cuando existen matrices inversibles L y R tales que

$$LM(\lambda)R = M'(\lambda)$$

Más concretamente, a cada cuaterna de matrices (E, A, B, C) se le puede asociar la matriz polinomial de grado dos

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y se tiene entonces la siguiente biyección entre ambos conjuntos.

Teorema 1. ([5]) *Los sistemas definidos por las cuaternas* (E, A, B, C) *y* (E', A', B', C') *son equivalentes por la relación de semejanza por realimentación si, y sólo si, las matrices polinomiales de grado dos asociadas a estos sistemas*

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} E & A & B \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M'(\lambda) = \begin{pmatrix} E' & A' & B' \\ 0 & C' & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son estrictamente equivalentes.

En el próximo apartado se verá una generalización de este resultado al caso de los sistemas singulares de orden superior. Más concretamente, a un sistema de orden ℓ con la relación de equivalencia derivada de la considerada para los sistemas singulares de orden uno le podemos asociar una matriz polinomial de grado $\ell + 1$, y de forma análoga al caso anterior, los sistemas equivalentes se corresponden con aquéllos que tienen matrices polinomiales asociadas estrictamente equivalentes.

A pesar de que en muchos casos el estudio de estos sistemas se realiza a partir de la reducción a sistemas de primer orden, hay casos en los que esto no es adecuado: si la función de control $u(t)$ no cumple determinados requisitos de diferenciabilidad, es posible que ambos sistemas no sean equivalentes, en el sentido de que, mientras el sistema inicial admite soluciones continuas, el sistema de orden uno asociado no las tiene. Por otra parte, son frecuentes las modelizaciones matemáticas que dan lugar, de forma natural, a sistemas de orden superior. Es por ello que un estudio directo de estos sistemas es conveniente.

2 Sistemas singulares de orden superior y matrices polinomiales

Consideremos un sistema singular de orden ℓ ($\ell \geq 1$)

$$\left\{ \begin{array}{rl} E_\ell x^{(\ell)}(t) + E_{\ell-1}x^{(\ell-1)}(t) + \ldots + E_1\dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) \end{array} \right.$$

con $E_1, \ldots, E_\ell, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C})$, $\operatorname{rg} E_\ell < n$.

En primer lugar precisaremos la relación de equivalencia (mencionada en la Introducción) que vamos a considerar entre estos sistemas singulares o, equivalentemente, en el conjunto de $(\ell + 3)$-tuplas de matrices que los definen, y a la que nos referiremos como semejanza por realimentación.

En segundo lugar, estableceremos una correspondencia entre el conjunto de las $(\ell+3)$-tuplas de matrices que definen estos sistemas y un subconjunto del conjunto de matrices polinomiales, recordando la generalización de la relación de equivalencia estricta para las mismas que ya se utiliza en [5].

Finalmente, demostraremos que la correspondencia anterior conserva las relaciones de equivalencia consideradas en ambos conjuntos: la *semejanza por realimentación* y la *equivalencia estricta*. Es decir, dos cuaternas de matrices son *semejantes por realimentación* si, y sólo si, las matrices polinomiales asociados a ellas son *estrictamente equivalentes*.

Dado un sistema singular, lineal e invariante en el tiempo, de orden ℓth-order ($\ell \geq 1$), consideraremos las siguientes transformaciones, para las que mostramos su traducción matricial referida a las matrices que definen el sistema:

(1) cambios de base en el espacio de estados:

$(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C) \longrightarrow (P^{-1}E_\ell P, \ldots, P^{-1}E_1P, P^{-1}AP, P^{-1}B, CP)$;

(2) cambios de base en el espacio de entradas:

$(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C) \longrightarrow (E_\ell, \ldots, E_1, A, BR, C)$;

(3) cambios de base en el espacio de salidas:

$(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C) \longrightarrow (E_\ell, \ldots, E_1, A, B, SC)$;

(4) realimentación externa:

$(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C) \longrightarrow (E_\ell, \ldots, E_1, A + WC, B, C)$;

(5) realimentación de estados:

$(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C) \longrightarrow (E_\ell, \ldots, E_1, A + BU, B, C)$;

(6) realimentación derivativa de orden $i \geq 1$:

$(E_\ell, \ldots, E_i, \ldots, E_1, A, B, C) \longrightarrow (E_\ell, \ldots, E_i + BV_i, \ldots, E_1, A, B, C)$

para unas ciertas matrices $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $R \in Gl_m(\mathbb{C})$, $S \in Gl_p(\mathbb{C})$, $U, V_1, \ldots, V_r \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $W \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$. Estas transformaciones conducen a la definición de la siguiente relación de equivalencia.

Definición 1. Diremos que los sistemas definidos por las ℓ+3-tuplas de matrices $(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C)$, $(E'_\ell, \ldots, E'_1, A', B', C')$ son *semejantes por realimentación* si, y6 sólo si, existen matrices $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $R \in Gl_m(\mathbb{C})$, $S \in Gl_p(\mathbb{C})$, $U, V_1, \ldots, V_\ell \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $W \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ tales que:

$$
\begin{array}{rl}
E'_\ell & = P^{-1}E_\ell P + P^{-1}BV_\ell, \ldots, E'_1 = P^{-1}E_1P + P^{-1}BV_1, \\
A' & = P^{-1}AP + WCP + P^{-1}BU, B' = P^{-1}BR, C' = SCP
\end{array}
$$

Es decir, dos $(\ell+3)$-tuplas de matrices son semejantes por realimentación cuando pueden obtenerse una a partir de la otra mediante una o más de las transformaciones (1) - (6) citadas anteriormente.

A cada $(\ell+3)$-tupla $(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C)$ podemos asociarle la matriz polinomial:

$$
M(\lambda) = \begin{pmatrix} E_\ell & \ldots & E_1 & A & B \\ 0 & \ldots & 0 & C & 0 \end{pmatrix} + \lambda M_1(\lambda) + \ldots + \lambda^\ell M_\ell(\lambda) + \lambda^{\ell+1} M_{\ell+1}(\lambda)
$$

$$
\begin{array}{c}
M_1(\lambda) = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
M_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\ldots \\
M_\ell(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
M_{\ell+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La relación de equivalencia estricta para haces de matrices se generaliza de forma inmediata a matrices polinomiales cualesquiera.

Definición 2. Diremos que dos matrices polinomiales $M(\lambda)$ y $N(\lambda)$ son *estrictamente equivalentes* cuando existen matrices constantes regulares L y R tales que $LM(\lambda)R = N(\lambda)$.

Estamos ya en condiciones de establecer la relación entre sistemas singulares de orden superior con la relación de semejanza por realimentación y matrices polinomiales con la relación de equivalencia estricta.

Teorema 2. *Dos $\ell+3$-tuplas de matrices $(E'_\ell, \ldots, E'_1, A', B', C')$ y $(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C)$ son equivalentes por la relación de semejanza por realimentación si, y sólo si, las matrices polinomiales asociadas a ellos, $M(\lambda)$ y $M'(\lambda)$ son estrictamente equivalentes.*

Demostración. Supongamos que $(E_\ell, \ldots, E_1, A, B, C)$ y $(E'_\ell, \ldots, E'_1, A', B', C')$ son equivalentes. Entonces existen $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $R \in Gl_m(\mathbb{C})$, $S \in Gl_p(\mathbb{C})$, $U, V_1, \ldots, V_\ell \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ y

$W \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ tales que

$$\begin{aligned} {E'}_\ell &= P^{-1}E_\ell P + P^{-1}BV_\ell, \dots, {E'}_1 = P^{-1}E_1P + P^{-1}BV_1, \\ A' &= P^{-1}AP + WCP + P^{-1}BU, B' = P^{-1}BR, C' = SCP \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} P & W \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\ell & \dots & E_1 & A & B \\ 0 & \dots & 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P^{-1} & 0 \\ V_\ell & \dots & V_1 & U & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {E'}_\ell & \dots & {E'}_1 & A' & B' \\ 0 & \dots & 0 & C' & 0 \end{pmatrix}$$

Basta con tomar

$$L = \begin{pmatrix} P & W \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} P^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P^{-1} & 0 \\ V_\ell & \dots & V_1 & U & S \end{pmatrix}$$

Se ve fácilmente que

$$LM_i(\lambda)R = M'_i(\lambda) \quad 1 \le i \le \ell + 1$$

y, por lo tanto,

$$LM(\lambda)R = M'(\lambda)$$

Recíprocamente. Supongamos que

$$LM(\lambda)R = M'(\lambda)$$

con

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} R_1^1 & \dots & R_{\ell+2}^1 \\ \dots & & \dots \\ R_1^{\ell+2} & \dots & R_{\ell+2}^{\ell+2} \end{pmatrix}$$

Equivalentemente,

$$L \begin{pmatrix} E_\ell & \dots & E_1 & A & B \\ 0 & \dots & 0 & C & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} {E'}_\ell & \dots & {E'}_1 & A' & B' \\ 0 & \dots & 0 & C' & 0 \end{pmatrix}$$

$$LM_i(\lambda)R = {M'}_i(\lambda) \quad 1 \le i \le \ell + 1$$

De las igualdades anteriores se deduce que L_1 es regular, $R_1^1 = {L_1}^{-1}$, $L_3 = 0$, $R_j^i = 0$ para $1 \le i, j \le \ell + 1$ $(i \neq j)$ y, por consiguiente,

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ 0 & L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\ell & \dots & E_1 & A & B \\ 0 & C & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {L_1}^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {L_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L_1^{-1} & 0 \\ R_1^{\ell+2} & \dots & R_\ell^{\ell+2} & R_{\ell+1}^{\ell+2} & R_{\ell+2}^{\ell+2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} {E'}_\ell & \dots & {E'}_1 & A' & B' \\ 0 & \dots & 0 & C' & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $(E_\ell, \dots, E_1, A, B, C)$ y $({E'}_\ell, \dots, {E'}_1, A', B', C')$ son equivalentes. $\diamond$

Referencias

[**1**] U. Başer, J. M. Schumacher, The equivalence structure of descriptor representations of systems with possibly inconsistent initial conditions. *Lin. Alg. and its Appl.* 318, no. 1-3 (2000), pp. 53-77.

[**2**] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations.* Pitman, Boston (1980).

[**3**] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations II.* Pitman, Boston (1982).

[**4**] L. Dai, *Singular Dynamical Systems.* Lecture Notes in Control and Information Sciences 118. Berlin (1989).

[**5**] Mª I. García-Planas, M. D. Magret, Structural Stability of Polynomial Matrices Related to Linear Time-Invariant Singular Systems. Sometido a *Syst. and Contr. Letters* (2004).

[**6**] Mª I. García-Planas: Controllability of l-order linear systems. Int, Journal of Pure and Applied Maths. vol 6 (2) (2003), pp. 185-191.

[**7**] Mª I. García-Planas: Linearizing l-order generalized systems. Recent advances in Intelligent systems and signal proccessing (2003), pp. 44-46.

[**8**] Mª I. Garca-Planas: Linearizing l-order generalized systems. Controllability of linearized systems. Proceeddings of SIAM Meetings (2003).

[**9**] I. de Hoyos, Points of Continuity of the Kronecker Canonical Form. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 11 (2) (1990), pp. 278-300.

[**10**] M. Kuijper, *First-Order Representations of Linear Systems*, Series on Syst. Contr.: Foundations Appl. Birkhäuser, Boston (1994).

[**11**] M. Kuijper, J. M. Schumacher, Minimality of descriptor representations under external equivalence. *Automatica J. IFAC* 27, no. 6 (1991), pp. 985-995.

[**12**] P. Kunkel, V. Mehrmann, A new look at pencils of matrix valued functions. *Line. Alg. and its Appl.* 212/213 (1994), pp. 215-248.

[**13**] B. P. Molinari, Structural invariants of linear multivariable sustems. *Int. J. Control* 28 (1978), pp. 493-510.

[**14**] A. S. Morse, Structural Invariants of Linear Multivariable Systems. *SIAM J. Contr.* 11 (1973), pp. 446-465.

[**15**] C. Shi, *Linear Differential-Algebraic Equations of Higher-Order and the Regularity or Singularity of Matrix Polynomials.* Doctoral Thesis. Berlin (2004).

[**16**] J.S. Thorp, The Singular Pencil of a Linear Dynamical System. *Int. Journal of Control* **18** (1973), pp. 577-596.