Familias diferenciables de inversas de Drazin

Josep Clotet, M. Dolors Magret
Departament de Matemàtica Aplicada I, ETSEIB-UPC
Av. Diagonal, 647 08028 Barcelona, Spain
E-mail: Josep.Clotet@upc.edu; M.Dolors.Magret@upc.edu

Resumen.- Las inversas de Drazin son una clase de inversa generalizada entre cuyas aplicaciones podemos mencionar la resolución de ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias, estudio de cadenas de Markov, etc. En esta presentación se caracterizan las matrices cuyas inversas de Drazin tienen misma forma reducida de Jordan y se estudia la partición del espacio de matrices cuadradas correspondiente a la relación de equivalencia derivada. Finalmente, se encuentra una condición suficiente para que una familia de inversas de Drazin de una familia diferenciable de matrices sea a su vez una familia diferenciable.

1 Introducción

En los últimos años, el estudio de generalizaciones del concepto de inversa para transformaciones lineales no inversibles se ha convertido en un tema que ha atraído el interés de gran nḿero de investigadores.

Así, en el caso de matrices no regulares (cuadradas o no) se han definido distintas "pseudo-inversas". La más comúnmente utilizada es la inversa de Moore-Penrose, que fue definida independientemente por Moore (1920) y por Penrose (1955). En [2] puede encontrarse un interesante resumen sobre las inversas generalizadas, así como sobre sus aplicaciones.

En este texto nos ocuparemos de las inversas de Drazin, introducidas a partir de una definición algebraica por este autor en el año 1958, y entre cuyas aplicaciones podemos mencionar la resolución de ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias, estudio de cadenas de Markov, etc.

En la secció n §2 nos ocuparemos de recordar la definición y algunas de las propiedades de las inversas de Drazin.

En la sección §3 se caracterizan las matrices cuyas inversas de Drazin son semejantes (es decir, tienen la misma forma reducida de Jordan) y se estudia la partición del espacio de matrices cuadradas correspondiente a la relación de equivalencia derivada. Para $n = 2$ se demuestra que a partir de esta partición se obtiene una estratificación del espacio.

Finalmente, en la sección §4, se encuentra una condición suficiente para que una familia de inversas de Drazin de una familia diferenciable de matrices sea a su vez una familia diferenciable.

2 Inversas de Drazin

La generalización del concepto de inversa de una matriz al caso de matrices no regulares conduce a la aparición de "pseudo-inversas", matrices que tienen algunas de las propiedades de las inversas.

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, con K un cuerpo conmutativo, se denomina *inversa generalizada* de la matriz A a una matriz X tal que:

$$AXA = A, \quad XAX = X$$

Entre las inversas generalizadas, la inversa de Moore-Penrose es posiblemente la más utilizada. Otras aproximaciones al concepto de inversa son las denominadas 1-matrices y las inversas de Drazin.

Dada una matriz $A \in M_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, denotaremos por $i(A) \in \mathbb{N}$ al mínimo número natural tal que se verifica:

$$\dim \operatorname{Im} A^{i(A)} = \dim \operatorname{Im} A^{i(A)+1}$$

Para este valor también se verifica

$$\dim \operatorname{Ker} A^{i(A)} = \dim \operatorname{Ker} A^{i(A)+1}$$

y

$$K^n = \operatorname{Im} A^{i(A)} + \operatorname{Ker} A^{i(A)}$$

Definición 1. El número $i(A)$ se denomina *índice de nilpotencia* de la matriz A.

Denotaremos por d la dimensión de $\operatorname{Im} A^{i(A)}$. Sea $v : (v_1, \ldots, v_d, v_{d+1}, \ldots, v_n)$ una base de K^n obtenida reuniendo sendas bases de $\operatorname{Im} A^{i(A)}$ y de $\operatorname{Ker} A^{i(A)}$. Si f_A es el endomorfismo de K^n cuya matriz, en la base natural de K^n, es A, la matriz del endomorfismo f_A en la base v es, puesto que los subespacios $\operatorname{Im} A^{i(A)}$ y $\operatorname{Ker} A^{i(A)}$ son invariantes por f_A, de la forma:

$$\begin{pmatrix} C & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & N \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que C es una matriz inversible y que N es una matriz nilpotente. Si S es la matriz del cambio de base, entre la base v y la base natural de K^n,

$$A = S \begin{pmatrix} C & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & N \end{pmatrix} S^{-1}$$

Definición 2. Se llama *inversa de Drazin* de la matriz A a la matriz

$$A^D = S \begin{pmatrix} C^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Propiedades. A partir de la propia definición, las siguientes propiedades pueden ser deducidas fácilmente.

(1) $A^D A A^D = A^D$.

(2) $AA^D = A^D A$.

(3) $A^{k+1} A^D = A^k,\ k \geq i(A)$.

(4) $\left(A^D\right)^{k+1} A = \left(A^D\right)^k,\ k \geq 0$.

(5) Si $i(A) \leq 1$, entonces: $AA^D A = A$.

(6) $\left(A^D\right)^D = AA^D A$.

(7) $\left(\left(A^D\right)^D\right)^D = A^D$.

Observación 1. Si la matriz A es inversible, entonces $A^D = A$.

En efecto. Sólo es necesario observar que, en este caso, $i(A) = 0$ y $d = n$.

Observación 2. La inversa de Drazin es única.

En efecto. Supongamos que $w : (w_1, \ldots, w_d, w_{d+1}, \ldots, w_n)$ es otra base de K^n obtenida reuniendo bases de $\operatorname{Im} A^{i(A)}$ y de $\operatorname{Ker} A^{i(A)}$, y llamemos T a la matriz del cambio de base, entre la base w y la base natural de K^n. Puesto que $K^n = \operatorname{Im} A^{i(A)} + \operatorname{Ker} A^{i(A)}$, la matriz del cambio de base, entre las bases w y v es de la forma:

$$\begin{pmatrix} R_1 & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & R_2 \end{pmatrix}$$

Llamemos R a esta matriz. Obviamente, es $T = SR$ y, además,

$$\begin{pmatrix} C_1 & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & N_1 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} C_2 & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & N_2 \end{pmatrix} R$$

de donde se deduce, en particular, que $C_1 = R_1 C_2 R_1^{-1}$.

Si

$$A_1^D = S \left(\begin{array}{ccc} C_1^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{array} \right) S^{-1}, \ A_2^D = T \left(\begin{array}{ccc} C_2^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{array} \right) T^{-1}$$

son las inversas de Drazin obtenidas a partir de estas dos bases, entonces:

$$\begin{aligned} A_2^D &= T \left(\begin{array}{ccc} C_2^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{array} \right) T^{-1} = T \left(\begin{array}{ccc} R_1^{-1} C_1^{-1} R_1 & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{array} \right) T^{-1} = \\ &= T R^{-1} \left(\begin{array}{ccc} C_1^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{array} \right) R T^{-1} = S R R^{-1} \left(\begin{array}{ccc} C_1^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{array} \right) R R^{-1} S^{-1} = A_1^D \end{aligned}$$

Observación 3. Podemos obtener la inversa de Drazin de una matriz a partir de la forma reducida de Jordan de dicha matriz.

En efecto, basta con separar los bloques correspondientes a los valores propios distintos de cero y los correspondientes al valor propio cero, obteniéndose así las matrices C y N, respectivamente.

Observación 4. El índice de nilpotencia $i(A)$ de una matriz coincide con la multiplicidad del valor propio cero en el polinomio anulador mínimo de la matriz A y $\dim \operatorname{Im} A^{i(A)}$ es igual a $n - n_0$, siendo n_0 la multiplicidad del valor propio cero en el polinomio característico de la matriz A.

En efecto, $i(A)$ coincide con la caja de Jordan de mayor tamaño con el valor propio cero y $d = \dim \operatorname{Im} A^{i(A)} = n - \dim \operatorname{Ker} A^{i(A)} = n - n_0$.

Es decir, las matrices A con un índice de nilpotencia $i(A)$ fijado y $d = \dim \operatorname{Im} A^{i(A)}$ también fijado son exactamente aquéllas cuyos polinomios característico y anulador mínimo son de la forma:

$$Q_A(t) = t^{n-d} Q_1(t), \ Q_1(0) \neq 0$$
$$p_A(t) = t^{i(A)} p_1(t), \ p_1(0) \neq 0$$

También es posible dar una definición algebraica de la inversa de Drazin, distinta de la definición funcional vista anteriormente. En efecto, la inversa de Drazin de una matriz $A \in M_n(K)$ es la única matriz X que satisface las tres siguientes propiedades:

(1) $XAX = X$.

(2) $AX = XA$.

(3) $A^{k+1} X = A^k, \ k \geq i(A)$.

3 Caracterización de las matrices con inversas de Drazin semejantes

Las observaciones del apartado anterior permiten obtener una condición necesaria y suficiente para que dos matrices tengan la inversas de Drazin semejantes.

Proposición 1. *Las matrices $A, B \in M_n(K)$ tienen inversas de Drazin con igual forma reducida de Jordan si, y sólo si,* $\dim \operatorname{Im} A^{i(A)} = \dim \operatorname{Im} B^{i(B)}$ *y, si C_A, C_B son las restricciones de los endomorfismos asociados a las matrices A y B a los subespacios* $\operatorname{Im} A^{i(A)}$, $\operatorname{Im} B^{i(B)}$, *respectivamente, se verifica $J_{C_A} = J_{C_B}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que las inversas de Drazin de las matrices A y B son equivalentes. Entonces también lo son las matrices

$$\begin{pmatrix} C_A & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & N_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_B & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & N_B \end{pmatrix}$$

En particular, las matrices C_A y C_B tienen el mismo rango; es decir, $\operatorname{Im} A^{i(A)}$, $\operatorname{Im} B^{i(B)}$ y las matrices C_A y C_B tienen la misma forma reducida de Jordan (es consecuencia de un razonamiento absolutamente análogo a la justificación de la Observación 1 del apartado anterior), por lo que también la tienen las matrices C_A^{-1} y C_B^{-1}.

Recíprocamente. Si

$$A^D = S \begin{pmatrix} J^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} S^{-1}, \ B^D = T \begin{pmatrix} J^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

se verifica: $B^D = (TS^{-1})A^D(ST^{-1})$ de donde se concluye que $J_{A^D} = J_{B^D}$. $\diamond$

Consideremos la siguiente relación de equivalencia.

Definición 3. Diremos que dos matrices $A, B \in M_n(K)$ son *Drazin equivalentes* cuando sus inversas de Drazin tienen la misma forma reducida de Jordan.

La caracterización anterior, así como las observaciones 2 y 3 del apartado 1, nos permiten encontrar las distintas clases de equivalencia. Así, para $n = 2$, tenemos:

$d \backslash i$	1	2
0	$\left\{ S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \mid S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$	$\left\{ S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \mid S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$
1	$\left\{ S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \mid \lambda_1 \neq 0, S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$	
2	$\left\{ S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} S^{-1} \mid \lambda_1 \neq 0, S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$ $\left\{ S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1} \mid \lambda_1\lambda_2 \neq 0, S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$	

Agrupando las clases de equivalencia anterior según que tengan formas reducidas de Jordan del mismo tipo, obtenemos una partición de $M_n(K)$. En el caso $n=2$, esta partición es:

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_1 = \left\{ S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \,\middle|\, S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$E_2 = \left\{ S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \,\middle|\, \lambda_1 \neq 0, S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$E_3 = \left\{ S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1} \,\middle|\, S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$$

$$E_4 = \left\{ S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} S^{-1} \,\middle|\, \lambda_1 \neq 0, S \in Gl_n(\mathbb{C}) \right\}$$

Proposición 2. *Los conjuntos E_i son variedades diferenciables regulares.*

Demostración. E_3 y E_4 son variedades por ser abiertos de estratos de la partición de $M_2(K)$ dada en [Gi76].

Por otra parte, E_1 y E_2 puede comprobarse directamente que son variedades regulares, reescribiendo estos conjuntos de la forma siguiente:

$$E_1 = \{A \in M_2(K) \,|\, \mathrm{tr}(A) = 0, \det A = 0\}$$

$$E_2 = \{A \in M_2(K) \,|\, \mathrm{tr}(A) \neq 0, \det A = 0\}$$

En el segundo caso, E_2 es un abierto de la subvariedad

$$V_2 = \{A \in M_2(K) \,|\, \det A = 0\} \quad \diamond$$

De aquí se deduce de forma inmediata, puesto que la partición es finita, que esta partición es una estratificación.

Teorema 1. *$\cup E_i$ constituye una partición de $M_2(K)$.*

4 Familias diferenciables de inversas de Drazin

Consideremos una variedad diferenciable regular X.

Supongamos que $\{A(x)\}_{x\in X}$ es una familia diferenciable de matrices cuadradas de orden n.

Proposición 3. *Si para cada $x \in X$, es $i(A(x)) = i$ y, además,* $\dim \mathrm{Im}A(x)^i = d$, *entonces, para cada $x \in X$ existe un entorno en el cual* $\{\dim \mathrm{Im}A(x)^{i(x)}\}_{x\in X}$ *y* $\{\dim \mathrm{Ker}A(x)^{i(x)}\}_{x\in X}$ *definen familias diferenciables de subespacios de $\mathbf{Gr}_d(K^n)$ y de $\mathbf{Gr}_{n-d}(K^n)$, respectivamente* (véase [6]).

Demostración. En las hipótesis del enunciado, la aplicación $x \longrightarrow A(x)^i$ es diferenciable (obsérvese que la aplicación $A(x) \longrightarrow A(x)^{i(x)}$ no es, en general, continua si no se cumple $i(x) = i$ para todo $x \in X$).

Como consecuencia, podemos elegir una familia diferenciable de matrices $\{S(x)\}_{x\in X}$ (matrices del cambio de base entre la base local y la base natural) de modo que las familias

$$\left\{ S(x) \begin{pmatrix} C(x) & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & N(x) \end{pmatrix} S(x)^{-1} \right\}_{x\in X}$$

y

$$\left\{ A^D(x) = S(x) \begin{pmatrix} C(x)^{-1} & | & 0 \\ -- & \cdot & -- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} S(x)^{-1} \right\}_{x\in X}$$

constituyen también familias diferenciables de matrices.

En el caso en que la variedad X sea contráctil, tenemos familias diferenciables globales.

Observación 5. El hecho de que $\{A(x)\}_{x\in X}$ sea una familia diferenciable de matrices no implica necesariamente que los índices de nilpotencia de las matrices $A(x)$ sea el mismo. Podemos considerar, por ejemplo, la familia diferenciable de matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

cuyas inversas de Drazin constituyen también una familia diferenciable de matrices

$$A(x)^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los índices de nilpotencia son: 2 si $x \neq 0$ y 1 para $x = 0$.

Observación 6. Existen familias diferenciables de matrices $\{A(x)\}_{x\in X}$ con los mismos índices de nilpotencia pero que, sin embargo, $\dim \mathrm{Im}A(x)^i$ no es constante. Como ejemplo, puede tomarse

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & \frac{1}{x+1} & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}, \; x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty \right)$$

que es una familia diferenciable de matrices cuyas inversas de Drazin

$$A(x)^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{(1+x)^2} & \frac{1}{(1+x)^2} & \frac{1}{(1+x)^3} \\ \frac{x^2}{1+x} & \frac{x}{1+x} & \frac{x}{(1+x)^2} \end{pmatrix}$$

El índice de nilpotencia es 1 para todo $x \in X$ pero, sin embargo, dim Im$A(x)^i = 2$ excepto para $x = 0$, en que dim Im$A(0)^i = 1$.

Referencias

[1] S. L. Campbell, Continuity of the Drazin inverse, Linear and Multilinear Algebra, 8 (1980), pp. 265-268.

[2] S. L. Campbell and C. D. Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London (1979).

[3] S. L. Campbell and C. D. Meyer, Continuity properties of the Drazin pseudoinverse, Linear Algebra Appl., 10 (1975), pp. 77-83.

[4] J. Ferrer, M. I. García-Planas, F. Puerta, Differentiable Families of Subspaces, Linear Algebra Appl., 199 (1994), pp. 159-168.

[5] J. J. Koliha and V. Rakocevic, Continuity of the Drazin inverse II , Studia Math., 131 (1998), pp. 167-177.

[6] J. J. Koliha and I. Straskraba, Power bounded and exponentially bounded matrices, Appl. Math., 44 (1999), pp. 289-308.

[7] V. Rakocevic, Continuity of the Drazin inverse, J. Operator Theory, 41 (1999), pp. 55-68.

[8] G. Rong, The error bounds for the perturbation of the Drazin inverse, Linear Algebra Appl., 47 (1982), pp. 159-168.

[9] G. W. Stewart and J. Sun, Matrix Perturbation Theory, Academic Press, Boston (1990).

[10] Y. Wei and G. Wang, The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications, Linear Algebra Appl., 258 (1997), pp. 179-186.