Consideraciones en torno al problema del desacoplamiento

Josep Clotet, Albert Compta

Departament de Matemàtica Aplicada I.
E.T.S. d'Enginyeria Industrial de Barcelona. UPC
Diagonal 647. 08028 Barcelona. Spain
e-mails: josep.clotet@upc.edu, albert.compta@upc.edu

1 Prerrequisitos

Definición 1.1 *Un sistema lineal es una ecuación*

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

donde $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ son espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ de dimensiones n y m respectivamente, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$, y

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{X},\ B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$$

son aplicaciones lineales. También indicaremos simplemente el par (A, B) de aplicaciones lineales (o matrices)

Observación 1.2 *Todas las aplicaciones serán lineales y en lo sucesivo no lo indicaremos. También, todos los subconjuntos que consideramos, si no se indica lo contrario son subespacios vectoriales.*

Dado $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ indicaremos $\langle A \mid \mathcal{S} \rangle = \mathcal{S} + A\mathcal{S} + A^2\mathcal{S} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{S}$

Definición 1.3 $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ *es (A, B) − invariante si existe $F : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ tal que $(A + BF)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$*

Siendo $\mathcal{B} = \operatorname{Im} B$

Proposición 1.4 $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ *es (A, B) − invariante si y sólo si*

$$A(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S} + \mathcal{B}$$

Demostración.

Si $\mathcal{S}$ es $(A,B)-$ invariante

$$\forall x \in \mathcal{S} \text{ existe } F : \mathcal{X} \to \mathcal{U} \text{ tal que } Ax + BFx \in \mathcal{S}$$

Como $BFx \in \mathcal{B}$, resulta $Ax \in \mathcal{S} + \mathcal{B}$.

Recíprocamente, si $A(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S} + \mathcal{B}$, tomamos una base $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de $\mathcal{S}$

$$Av_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j + Bu_i\,, \quad u_i \in \mathcal{U}\,, \quad 1 \leq i \leq k$$

definimos $F(v_i) = -u_i,\ 1 \leq i \leq k$ y extendemos por linealidad a $\mathcal{X}$.

Tendremos

$$Av_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j - BFv_i$$

$$(A + BF)v_i \in \mathcal{S}\,, \quad 1 \leq i \leq k$$

y por tanto $(A + BF)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$. ■

Vamos a ver otra descripción de un sistema lineal que nos permitirá simplificar algunas demostraciones y definiciones.

Consideramos las cuaternas $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, f, \pi)$ con $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$ espacios vectoriales de dimensión $n+m$ y n respectivamente, $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, π exhaustiva.

Si en $\mathcal{Y}$ tomamos una base formada por una base de un complementario $\mathcal{X}'$ de $\operatorname{Ker}\pi$ y una base de $\operatorname{Ker}\pi$, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ respectivamente, y en $\mathcal{X}$ tomamos la base $\{\pi(v_1), \dots, \pi(v_n)\}$, definiendo $\mathcal{U} := \operatorname{Ker}\pi$, tendremos que

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}' \oplus \mathcal{U} \simeq \mathcal{X} \times \mathcal{U}$$

donde la identificación de $\mathcal{X}'$ con $\mathcal{X}$ la hacemos a través de las bases $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{\pi(v_1), \dots, \pi(v_n)\}$.

La matriz del par (f, π) en estas bases será

$$\begin{pmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ con } A \in M_n(\mathbb{C})\,,\ B \in M_{n,m}(\mathbb{C})$$

y la de f, (A, B).

Podremos escribir

$$\begin{aligned} f(x,u) &= Ax + Bu \\ \pi(x,u) &= x \end{aligned}$$

abusando del lenguaje, entendiendo por x, u como $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$ o sus componentes en las bases indicadas según convenga.

Definición 1.5 *Dos pares de matrices (A, B) y (A', B') serán equivalentes si dan lugar a la misma cuaterna $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, f, \pi)$, esto es, si existe un cambio entre bases de las descritas que las relacione, es decir:*

Deben existir P, Q invertibles y R tal que

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP + P^{-1}BR \\ B' &= P^{-1}BQ \end{aligned}$$

esto es, que sean feedback equivalentes.

Acabamos de ver que

Proposición 1.6 *Existe una correspondencia biyectiva entre las cuaternas $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, f, \pi)$ del tipo anterior, que también indicaremos por (f, π) cuando no haya confusión posible, y las clases de equivalencia por feedback de los pares de matrices (A, B).*

Veamos la traducción en este lenguaje de subespacio $(A, B) -$ invariante.

Proposición 1.7 *$\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ es $(A, B) -$ invariante si y sólo si $\mathcal{S} \subset \pi(f^{-1}(\mathcal{S}))$*

Demostración.

$$\begin{aligned} &\text{Tenemos que} \quad f^{-1}(\mathcal{S}) = \{y \in \mathcal{Y} : f(y) \in \mathcal{S}\} = \{(x, u) : Ax + Bu \in \mathcal{S}\}\,, \\ &\text{por tanto} \quad \pi(f^{-1}(\mathcal{S})) = \{x \in \mathcal{X} : \exists u \in \mathcal{U} \quad Ax + Bu \in \mathcal{S}\}\,. \end{aligned}$$

Evidentemente, si $\mathcal{S}$ es $(A, B) -$ invariante,

$$\begin{gathered} \text{como} \quad A(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S} + \mathcal{B}\,, \\ \text{resulta que} \quad \mathcal{S} \subset \pi(f^{-1}(\mathcal{S}))\,. \end{gathered}$$

Recíprocamente, si $\mathcal{S} \subset \pi(f^{-1}(\mathcal{S}))$

tendremos que

$$\forall x \in \mathcal{S} \text{ existirá } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } Ax + Bu \in \mathcal{S}$$

con lo que

$$Ax \in \mathcal{S} + \mathcal{B} \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

■

Veamos el significado geométrico de la condición de $(A, B) -$ invariante:

Corolario 1.8 *Dada una cuaterna* $(\mathcal{Y},\mathcal{X},f,\pi)$ *con* π *exhaustiva. Un subespacio* $\mathcal{S}\subset\mathcal{X}$ *es* $(A,B)-$ *invariante si y sólo si la cuaterna* $(\pi^{-1}(\mathcal{S})\cap f^{-1}(\mathcal{S}),\mathcal{S},\overline{f},\overline{\pi})$ *, donde* $\overline{f}$ *y* $\overline{\pi}$ *son las restricciones de* f *y* π *respectivamente, es del mismo tipo (*$\overline{\pi}$ *exhaustiva).*

Demostración.

$\overline{\pi}$ es exhaustiva si y sólo si

$$\mathcal{S}\subset\pi(\pi^{-1}(\mathcal{S})\cap f^{-1}(\mathcal{S}))$$

que es equivalente a

$$\mathcal{S}\subset\pi(f^{-1}(\mathcal{S}))$$

■

Proposición 1.9 *La suma de dos subespacios* $(A,B)-$ *invariantes es* $(A,B)-$ *invariante.*

Demostración.

Sean $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ $(A,B)-$ invariantes; esto quiere decir que $\mathcal{S}_i\subset\pi(f^{-1}(\mathcal{S}_i))\quad i=1,2$.

$$\begin{aligned}\text{como}\quad & f^{-1}(\mathcal{S}_1)+f^{-1}(\mathcal{S}_2)\subset f^{-1}(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2)\\ \text{resulta que}\quad & \pi(f^{-1}(\mathcal{S}_1))+\pi(f^{-1}(\mathcal{S}_2))\subset\pi(f^{-1}(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2))\\ \text{de donde}\quad & \mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2\subset\pi(f^{-1}(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2))\end{aligned}$$

■

El conjunto de los subespacios $(A,B)-$ invariantes lo indicaremos $\mathcal{I}(A,B)$.

2 Subespacios de Controlabilidad

Definición 2.1 *Dado el sistema* $\dot{x}=Ax+Bu$*,* $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$*,* $B:\mathcal{U}\to\mathcal{X}$*. Diremos que un subespacio* $\Re\subset\mathcal{X}$ *es de controlabilidad (s.c.) si existen* $F:\mathcal{X}\to\mathcal{U}$ *y* $G:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ *tal que*

$$\Re=\langle A+BF\mid Im(BG)\rangle$$

En particular, diremos que el sistema es controlable si $\mathcal{X}$ *es de controlabilidad.*

Obsérvese que $\widehat{\mathcal{B}}=\mathrm{Im}\,(BG)$ es un subespacio de $\mathcal{B}$.

Podemos eliminar G usando la siguiente proposición:

Proposición 2.2 *Si* $\widehat{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ *y* $\Re=\langle A\mid\widehat{\mathcal{B}}\,\rangle$ *, entonces*

$$\Re=\langle A\mid\mathcal{B}\cap\Re\rangle\,.$$

Recíprocamente, si

$$\Re=\langle A\mid\mathcal{B}\cap\Re\rangle\,,\ \textit{existe } G:\mathcal{U}\to\mathcal{U}\ \textit{tal que}$$

$$\Re=\langle A\mid Im(BG)\rangle$$

Demostración.

Por la definición de $\Re$, es evidente que $\widehat{\mathcal{B}} \subset \Re$.

Por tanto $\widehat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B} \cap \Re$, con lo que $\Re = \langle A \mid \widehat{\mathcal{B}} \rangle \subset \langle A \mid \mathcal{B} \cap \Re \rangle$.
Por otra parte, como $\Re$ es $A-$invariante, tenemos

$$\langle A \mid \mathcal{B} \cap \Re \rangle = \mathcal{B} \cap \Re + A(\mathcal{B} \cap \Re) + A^2(\mathcal{B} \cap \Re) + \cdots + A^{n-1}(\mathcal{B} \cap \Re) \subset \Re \,.$$

Para ver el recíproco consideramos $\{b_1, \dots, b_r\}$ una base de $\mathcal{B} \cap \Re$. Entonces, $b_i = Bu_i \quad (u_i \in \mathcal{U})$ donde los u_i, $1 \leq i \leq r$, son linealmente independientes. Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base de $\mathcal{U}$, y definimos

$$\begin{aligned} Gu_i &= u_i \,, \quad 1 \leq i \leq r \\ Gu_i &= 0 \,, \quad r+1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathrm{Im}(BG) = \mathcal{B} \cap \Re$$

■

Si denotamos por $\mathcal{C}(A,B;\mathcal{X})$ o $\mathcal{C}(A,B)$ o $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ (siempre que no cause confusión), el conjunto de los s.c. del sistema (A,B), tenemos que

Proposición 2.3 *$\Re \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ si y sólo si $\exists\, F : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$, tal que $\Re = \langle A + BF \mid \mathcal{B} \cap \Re \rangle$.*

En particular, el sistema es controlable si y sólo si $\mathcal{X} = \langle A \mid \mathcal{B} \rangle$.

Demostración.

Basta aplicar la proposición 2.2 tomando $A + BF$ en lugar de A. ■

Corolario 2.4 *Todo subespacio de controlabilidad es $(A,B)-$invariante.*

Demostración.

La aplicación F de la proposición 2.3 cumple que $(A + BF)\Re \subset \Re$. ■

Dado un subespacio ξ, denotamos $\mathbf{F}(\xi) := \{F : \mathcal{X} \to \mathcal{U} \;/\; (A+BF)\xi \subset \xi\}$.

Con esta notación, es obvio que

Proposición 2.5 *Dado un sistema (A,B), ξ es $(A,B)-$invariante si y sólo si $\mathbf{F}(\xi) \neq \emptyset$*

Proposición 2.6 *Dado un sistema (A,B). Si $\Re \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, entonces $\Re = \langle A + BF \mid \mathcal{B} \cap \Re \rangle$ $\forall F \in \mathbf{F}(\Re)$*

Demostración.

Si $\Re \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, existe $F_0 \in \mathbf{F}(\Re)$ tal que

$$\Re = \langle A + BF_0 \mid \mathcal{B} \cap \Re \rangle\,.$$

Si $F_1 \in \mathbf{F}(\Re)$, consideramos $\Re_1 = \langle A + BF_1 \mid \mathcal{B} \cap \Re \rangle\,.$

Es evidente que $\Re_1 \subset \Re$.

Veamos la inclusión contraria demostrando, por inducción sobre k, que

$$(A + BF_0)^{k-1}(\mathcal{B} \cap \Re) \subset \Re_1$$

Para $k = 1$ es consecuencia de la definición. Supongamos que es cierto para k ; entonces

$$\begin{aligned}&(A + BF_0)^k(\mathcal{B} \cap \Re) \subset (A + BF_0)\Re_1 \subset \\ &\subset (A + BF_1)\Re_1 + B(F_0 - F_1)\Re_1,\end{aligned}$$

$$\text{pero } B(F_0 - F_1)\Re_1 \subset \mathcal{B} \text{ y además}$$

$$B(F_0 - F_1)\Re_1 \subset (A + BF_0)\Re_1 - (A + BF_1)\Re_1 \subset \Re \text{ con lo que}$$

$$(A + BF_0)^k(\mathcal{B} \cap \Re) \subset \Re_1 + \Re \cap \mathcal{B} \subset \Re_1$$

■

Proposición 2.7 (f, π) *controlable si y sólo si* $(f \circ \pi^{-1})^n\,(0) = \mathcal{X}$

Demostración.

Basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned}&(f \circ \pi^{-1})(0) = f(\operatorname{Ker} \pi) = f(\mathcal{U}) = \mathcal{B} \\ &(f \circ \pi^{-1})(\mathcal{B}) = f(\mathcal{B} + \mathcal{U}) = A\mathcal{B} + \mathcal{B} \\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

■

Proposición 2.8 $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ *es de controlabilidad si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es* $(A, B) -$ *invariante y* $(\overline{f}, \overline{\pi})$ *es controlable.*

Demostración.

Veremos que $(\overline{f} \circ \overline{\pi}^{-1})^n(0) = \langle A + BF \mid \mathcal{B} \cap \mathcal{S} \rangle$ para cualquier $F \in \mathbf{F}(\mathcal{S})$. Lo demostraremos por inducción.

$$(\overline{f} \circ \overline{\pi}^{-1})(0) = f\left[\operatorname{Ker} \pi \cap \pi^{-1}(\mathcal{S}) \cap f^{-1}(\mathcal{S})\right] = f\left[\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{S})\right]$$

$$\text{pero} \quad f\left[\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{S})\right] = f(\mathcal{U}) \cap \mathcal{S} = \mathcal{B} \cap \mathcal{S}$$

$$\text{porque} \quad f(M) \cap N = f(M \cap f^{-1}(N)) \quad \forall M \subset \mathcal{Y},\ \forall N \subset \mathcal{X}\,. \qquad (*)$$

con lo que

$$(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})(0)=\mathcal{B}\cap\mathcal{S}$$

Supongamos que

$$(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)=\mathcal{B}\cap\mathcal{S}+(A+BF)(\mathcal{B}\cap\mathcal{S})+\cdots+(A+BF)^{k-1}(\mathcal{B}\cap\mathcal{S})\quad\forall F\in\mathbf{F}(\mathcal{S})$$

entonces

$$(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k+1}(0)=f\left[(\mathcal{U}+(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0))\cap\pi^{-1}(\mathcal{S})\cap f^{-1}(\mathcal{S})\right]=f\left[(\mathcal{U}+(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0))\cap f^{-1}(\mathcal{S})\right]$$

porque $\mathcal{U}+(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)\subset\pi^{-1}(\mathcal{S})$ por hipótesis de inducción.

Además, por $(*)$, $f\left[(\mathcal{U}+(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0))\cap f^{-1}(\mathcal{S})\right]=f\left[\mathcal{U}+(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)\right]\cap\mathcal{S}$.

De ahí,

$$\begin{aligned}(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k+1}(0)&=\left[A(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)+\mathcal{B}\right]\cap\mathcal{S}=\\&=\left[(A+BF)(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)+\mathcal{B}\right]\cap\mathcal{S}\end{aligned}$$

y como, por hipótesis de inducción,

$$(A+BF)(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)=(A+BF)(\mathcal{B}\cap\mathcal{S})+\cdots+(A+BF)^{k}(\mathcal{B}\cap\mathcal{S})$$

y está contenido en $\mathcal{S}$ por ser $F\in\mathbf{F}(\mathcal{S})$, resulta que

$$\left[(A+BF)(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)+\mathcal{B}\right]\cap\mathcal{S}=(A+BF)(\overline{f}\circ\overline{\pi}^{-1})^{k}(0)+\mathcal{B}\cap\mathcal{S}$$

y la proposición está demostrada. ■

Proposición 2.9 *La suma de dos subespacios de controlabilidad es un subespacio de controlabilidad.*

Demostración.

Sean $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2\in\mathcal{C}(A,B)$; esto quiere decir que existen k_1, $k_2\in\mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{S}_i=(f\circ{\pi_i}^{-1})^{k_i}(0)\quad\text{donde}\quad{\pi_i}^{-1}(M)=\pi^{-1}(M\cap\mathcal{S}_i)\cap f^{-1}(\mathcal{S}_i)\quad\forall M\subset\mathcal{X}\,.$$

Por la proposición 1.9, $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$ es $(A,B)-$ invariante. Bastará demostrar que

$$\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2=(f\circ\overline{\pi}^{-1})^{\max(k_1,k_2)}(0)\,,$$
$$\text{donde}\quad\overline{\pi}^{-1}(M)=\pi^{-1}(M\cap(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2))\cap f^{-1}(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2)\quad\forall M\subset\mathcal{X}\,.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}(f\circ\overline{\pi}^{-1})(0)&=\mathcal{B}\cap(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2)\supset\mathcal{B}\cap\mathcal{S}_1+\mathcal{B}\cap\mathcal{S}_2=\\&=(f\circ{\pi_1}^{-1})(0)+(f\circ{\pi_2}^{-1})(0)\end{aligned}$$

Supongamos que

$$(f\circ\overline{\pi}^{-1})^{j}(0)\supset(f\circ{\pi_1}^{-1})^{j}(0)+(f\circ{\pi_2}^{-1})^{j}(0)$$

para $j\leq k$.

Entonces

$$\left(f\circ\overline{\pi}^{-1}\right)^{k+1}(0)\supset\left(f\circ\overline{\pi}^{-1}\right)\left[\left(f\circ{\pi_1}^{-1}\right)^{k}(0)+\left(f\circ{\pi_2}^{-1}\right)^{k}(0)\right]\supset$$
$$\supset\left(f\circ{\pi_1}^{-1}\right)^{k+1}(0)+\left(f\circ{\pi_2}^{-1}\right)^{k+1}(0)$$

porque $\overline{\pi}^{-1}(M)=\pi^{-1}(M)\cap f^{-1}(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2)\supset\pi^{-1}(M)\cap f^{-1}(\mathcal{S}_i)={\pi_i}^{-1}(M)\quad\forall M\subset\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$

con lo que queda demostrada la proposición ■

Corolario 2.10 *Cualquier conjunto no vacío de subespacios de controlabilidad cerrado por la adición tiene un supremo que es un subespacio de controlabilidad.*

Demostración.

Puesto que $\mathcal{X}$ tiene dimensión finita, consideramos un subespacio del conjunto de entre los de dimensión máxima. Éste los contiene a todos porque su suma está contenida en él. ■

3 Problema del Desacoplamiento Restringido (R.D.P.)

Consideramos un sistema lineal

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu & A\in\mathbb{R}^{n\times n}\qquad B\in\mathbb{R}^{n\times m}\\ z=Dx & D\in\mathbb{R}^{p\times n}\end{cases}$$

con el espacio de salidas $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^p=\mathcal{Z}_1\oplus\mathcal{Z}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{Z}_k$.

Si $D_i:=\pi_i\circ D$, siendo $\pi_i:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}_i$ la proyección natural, tenemos $D=D_1\oplus\cdots\oplus D_k$.

El problema que pretendemos resolver es saber si existen una realimentación y un cambio de variables de entrada

$$u=Fx+\sum_{i=1}^{k}G_iv_i\quad\text{con}\quad\begin{cases}F\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ G_i\in\mathbb{R}^{m\times m}\end{cases}$$
$$\dot{x}=(A+BF)x+\sum_{i=1}^{k}BG_iv_i$$

de forma que la variación de cada v_i afecte sólo a la salida $z_i=\pi_i(z)$ y se puedan obtener todos los valores de z_i variando v_i.

Vamos a concretar qué significa esto:

El subespacio de controlabilidad relativo a la entrada v_i es

$$\Re_i=\langle A+BF\mid \operatorname{Im}(BG_i)\rangle$$

queremos que $\forall\ i,j=1,2,\ldots,k$

$$D_j\Re_i = 0\,,\; j \neq i\,,\text{ es decir},\; \Re_i \subset \bigcap_{j\neq i} \operatorname{Nuc} D_j$$

y que

$$D_i\Re_i = \operatorname{Im} D_i \quad \forall\; i = 1, 2, \dots, k\,.$$

Como ya sabemos (proposición 2.6) que $\Re_i = \langle A + BF \mid \mathcal{B} \cap \Re_i\rangle$, $1 \leq i \leq k$, si $\mathcal{K}_i := \operatorname{Nuc} D_i$, $1 \leq i \leq k$, es inmediato que $D_i\Re_i = \operatorname{Im} D_i$, $1 \leq i \leq k$, equivale a que $\Re_i + \mathcal{K}_i = \mathcal{X}$, $1 \leq i \leq k$.

En resumen el problema RDP (restricted decoupling problem) podemos formularlo:

Dados A, B, D_i, $1 \leq i \leq k$, encontrar, si es posible, $F : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ y subespacios de controlabilidad $\Re_i$, $1 \leq i \leq k$, tales que:

RDP 1) $\Re_i = \langle A + BF \mid \mathcal{B} \cap \Re_i\rangle$, $1 \leq i \leq k$ [condición de compatibilidad]

RDP 2) $\Re_i \subset \bigcap_{j\neq i} \mathcal{K}_j$, $1 \leq i \leq k$

RDP 3) $\Re_i + \mathcal{K}_i = \mathcal{X}$, $1 \leq i \leq k$

Lema 3.1 *Si* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$ *son subespacios* $(A, B)-$ *invariantes independientes,*

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{F}(\mathcal{V}_i) \neq \emptyset$$

Demostración.

Por ser $(A, B)-$ invariantes existen $F_1, F_2, \dots, F_k : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ tales que $(A + BF_i)\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_i$.

Si $\overline{F_i} = F_{i|\mathcal{V}_i}$, consideramos la aplicación $F : \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}$ definida por

$$F = \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{F_i}$$

y la extendemos a $\mathcal{X}$ de forma arbitraria. ■

Notaremos

$$\widehat{\mathcal{K}_i} = \bigcap_{j\neq i} \mathcal{K}_j\,.$$

Teorema 3.2 *Dado un sistema* $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \; B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}, \; D : \mathcal{X} \to \mathcal{Z},$ *con*

$$D = \bigoplus_{i=1}^{k} D_i \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{K}_i = 0 \, ,$$

RDP tiene solución si y sólo si $\Re_i^* + \mathcal{K}_i = \mathcal{X}$, $1 \leq i \leq k$, *siendo*

$$\Re_i^* = sup \, \{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{C}(A,B), \, \mathcal{S} \subset \widehat{\mathcal{K}_i}\}, \; 1 \leq i \leq k \, .$$

Demostración.

Si se cumple la condición, tomamos $\Re_i = \Re_i^*$, $1 \leq i \leq k$. Por definición cumplen las condiciones RDP 2 y RDP 3.

Por ser s.c. existirán $F_i : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ tales que

$$\Re_i^* = \langle A + BF_i \mid \Re_i^* \cap \mathcal{B} \rangle \, .$$

Vamos a ver que los $\Re_i^*$ son independientes. Efectivamente, los subespacios $\widehat{\mathcal{K}_i}$ son independientes porque

$$\widehat{\mathcal{K}_i} \cap \sum_{j \neq i} \widehat{\mathcal{K}_j} = \left(\bigcap_{r \neq i} \mathcal{K}_r \right) \cap \sum_{j \neq i} \left(\bigcap_{s \neq j} \mathcal{K}_s \right) \subset \left(\bigcap_{r \neq i} \mathcal{K}_r \right) \cap \mathcal{K}_i = \bigcap_{r=1}^{k} \mathcal{K}_r = 0 \, ,$$

y como $\Re_i^* \subset \widehat{\mathcal{K}_i}$, los subespacios $\Re_i^*$, $1 \leq i \leq k$, también lo son.

Aplicando el lema 3.1, existe

$$F \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{F}(\Re_i^*)$$

y, por la proposición 2.6 resulta que

$$\Re_i^* = \langle A + BF \mid \Re_i^* \cap \mathcal{B} \rangle$$

y RDP tiene solución.

Recíprocamente si RDP tiene solución, como la solución $\Re_i$, $1 \leq i \leq k$, cumple

$$\Re_i + \widehat{\mathcal{K}_i} = \mathcal{X},$$

con mayor razón lo cumplirá $\Re_i^*$ que es el supremo entre los subespacios de controlabilidad contenidos en $\widehat{\mathcal{K}_i}$. ∎

Teorema 3.3 *(Asignación de valores propios). Dado un sistema controlable* $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $D : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, *con*

$$D = \bigoplus_{i=1}^{k} D_i \ \textit{y} \ \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{K}_i = 0 \ \textit{y conjuntos simétricos} \ \Lambda_i = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{\rho_i}}\} \subset \mathbb{C}\,, \ 0 \leq i \leq k\,,$$

$$\textit{siendo} \ \rho_i = dim \Re_i^*, \ 1 \leq i \leq k \ \textit{y} \ \rho_0 = n - \sum_{i=1}^{k} \rho_i\,.$$

Existe $F : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ *tal que*

$$F \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{F}(\Re_i^*)$$

con

$$\sigma\left[(A+BF)_{|\Re_i^*}\right] = \Lambda_i\,, \quad 1 \leq i \leq k$$

y

$$\sigma(A+BF) = \bigcup_{i=0}^{k} \Lambda_i$$

Demostración.

Como la restricción a $\Re_i^*$ es controlable, existen $F_i \in \mathbf{F}(\Re_i^*)$ tal que $(A+BF_i)\,\Re_i^* \subset \Re_i^*$ y $\sigma\left[(A+BF_i)_{|\Re_i^*}\right] = \Lambda_i\,, \ 1 \leq i \leq k\,.$

Dado que los $\Re_i^*$ son independientes (teorema 3.2), podemos construir según (lema 3.1) $F_0 : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ tal que

$$F_0 \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{F}(\Re_i^*), \quad F_{0|\Re_i^*} = F_{i|\Re_i^*}.$$

Si

$$\Re := \bigoplus_{i=1}^{k} \Re_i^*$$

tenemos que $(A+BF_0)\,\Re \subset \Re$ y según [1] (prop. 4.1 pág. 88), existe $F : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ tal que $F_{|\Re} = F_{0|\Re}$ con $\sigma(A+BF) = \Lambda_0 \cup \sigma\left[(A+BF)_{|\Re}\right]$. ■

4 PROBLEMA DEL DESACOPLAMIENTO EXTENDIDO (E.D.P.)

Se trata de resolver el problema anterior eliminando la restricción

$$\mathcal{K} = \operatorname{Nuc} D = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{K}_i = 0$$

Abordaremos el problema ampliando el sistema. Añadimos las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}_{a_i} = u_{a_i} \quad i = 1, 2, \dots, n_a$$

y el sistema extendido queda

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + B_e u_e \\ z_e = D_e x_e \end{cases}$$

siendo

$$x_e = \begin{pmatrix} x \\ x_a \end{pmatrix},\ u_e = \begin{pmatrix} u \\ u_a \end{pmatrix},\ A_e = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_e = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ D_e = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En lenguaje de aplicaciones lineales escribiremos

$$\mathcal{Y}_e = \mathcal{X} \times \mathcal{X}_a \times \mathcal{U} \times \mathcal{U}_a \underset{\pi_e}{\overset{f_e}{\rightrightarrows}} \mathcal{X} \times \mathcal{X}_a$$

con $\mathcal{X}_a \simeq \mathcal{U}_a \simeq \mathbb{R}^{n_a}$. Notaremos $\mathcal{X} \times \mathcal{X}_a = \mathcal{X}_e$, $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_a = \mathcal{U}_e$

$$f_e(x, x_a, u, u_a) = (f(x, u), u_a)$$
$$\pi_e(x, x_a, u, u_a) = (x, x_a)$$

y definimos

$$P : \mathcal{X} \times \mathcal{X}_a \times \mathcal{U} \times \mathcal{U}_a \to \mathcal{X} \times \mathcal{U}$$
$$P(x, x_a, u, u_a) = (x, u)$$

Veamos las siguientes propiedades:

Proposición 4.1 $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}_e \quad (A_e, B_e)-$ *invariante* $\Rightarrow P(\mathcal{S}) \subset \mathcal{X} \quad (A, B)-$ *invariante*

Demostración.

Que $\mathcal{S}$ sea $(A_e, B_e) -$ invariante quiere decir que

$$\mathcal{S} \subset \pi_e({f_e}^{-1}(\mathcal{S})),$$

por tanto

$$P(\mathcal{S}) \subset P \circ \pi_e \circ {f_e}^{-1}(\mathcal{S}).$$

Como

$$P \circ \pi_e\,(x, x_a, u, u_a) = P(x, x_a) = x = \pi(x, u) = \pi \circ P\,(x, x_a, u, u_a)$$

resulta que

$$P(\mathcal{S}) \subset \pi \circ P \circ {f_e}^{-1}(\mathcal{S})\,.$$

$$(x,u) \in P \circ {f_e}^{-1}(\mathcal{S}) \quad \text{quiere decir que existe}$$

$$(x_a,u_a) \in \mathcal{X}_a \times \mathcal{U}_a \text{ tal que } f_e(x,x_a,u,u_a) \in \mathcal{S} \text{ y, por tanto, } f(x,u) \in P(\mathcal{S})$$

$$\text{con lo que} \quad P \circ {f_e}^{-1}(\mathcal{S}) \subset f^{-1} \circ P(\mathcal{S})$$

$$\text{y} \quad P(\mathcal{S}) \subset \pi\left[f^{-1}(P(\mathcal{S}))\right]$$

■

Lema 4.2 *Si* $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$ *y* $\mathcal{S}$ *es* $(A_e,B_e)-$ *invariante, se verifica que*

$$P \circ {\overline{\pi}_e}^{-1}(\mathcal{M}) \subset \overline{\pi}^{-1} \circ P(\mathcal{M})$$

Demostración.

$$(x,u) \in P \circ {\overline{\pi}_e}^{-1}(\mathcal{M}) \quad \text{quiere decir que existe} \quad (x_a,u_a) \in \mathcal{X}_a \times \mathcal{U}_a$$

$$\text{tal que } (x,x_a,u,u_a) \in {\pi_e}^{-1}(\mathcal{M}) \cap {f_e}^{-1}(\mathcal{S}).$$

$$\text{Equivale a} \quad (x,x_a) \in \mathcal{M} \quad \text{y} \quad (f(x,u),u_a) \in \mathcal{S}\,.$$

En consecuencia $x \in P(\mathcal{M})$ y $f(x,u) \in P(\mathcal{S})$.

$$(x,u) \in \overline{\pi}^{-1} \circ P(\mathcal{M}) = \pi^{-1}\left[P(\mathcal{M})\right] \cap f^{-1}(P(\mathcal{S}))\,,$$

es decir, $x \in P(\mathcal{M})$ y $f(x,u) \in P(\mathcal{S})$. ■

Proposición 4.3 $\mathcal{S} \in \mathcal{C}(A_e,B_e) \;\Rightarrow\; P(\mathcal{S}) \in \mathcal{C}(A,B)$

Demostración.

Según la proposición 4.1, $P(\mathcal{S})$ es $(A,B)-$ invariante

Sabemos que

$$\mathcal{S} = (f_e \circ {\overline{\pi}_e}^{-1})^{n+n_a}\,(0)$$

Aplicando P, reiterando el lema 4.2 y usando que $P \circ \pi_e = \pi \circ P$

resulta

$$\begin{aligned} P(\mathcal{S}) &\subset (f \circ \overline{\pi}^{-1})^{n+n_a}\,(P(0)) = \\ &= (f \circ \overline{\pi}^{-1})^{n}\,(0) \end{aligned}$$

■

Proposición 4.4 *Sea* $\Re \in \mathcal{I}(A,B)$, $E \in End(\mathcal{X}_e,\mathcal{X}_e)$, $Im\,E \subset \mathcal{X}_a$. *Entonces,*

$$(P+E)(\Re) \in \mathcal{I}(A_e,B_e)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} &{f_e}^{-1}\,[(P+E)(\Re)] = \{(x,x_a,u,u_a) : f(x,u)\in\Re\,,\; u_a\in E(\Re)\}\,. \\ &(\pi_e\circ {f_e}^{-1})\,[(P+E)(\Re)] = \{(x,x_a) : \exists\, u\in\mathcal{U} \text{ t.q. } f(x,u)\in\Re\} = \\ &= \pi\circ f^{-1}(\Re)\oplus\mathcal{X}_a \supset (P+E)(\Re) \end{aligned}$$

■

Proposición 4.5 *Sea* $\Re \in \mathcal{C}(A,B)$, $E\in End(\mathcal{X}_e,\mathcal{X}_e)$, $Im\,E\subset\mathcal{X}_a$. *Entonces,*

$$(P+E)(\Re)\,\in\,\mathcal{C}(A_e,B_e)$$

Demostración.

Será controlable si existe $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$(P+E)(\Re)\,\subset\,(f_e\circ{\overline{\pi}_e}^{-1})^k\,(0)\,.$$

Sabemos que por ser $\Re$ de controlabilidad

$$\Re\subset(f\circ\overline{\pi}^{-1})^k\,(0)\,\subset\,(f_e\circ{\overline{\pi}_e}^{-1})^k\,(0)$$

para algún $k\in\mathbb{N}$.

Hace falta ver que $E(\Re)$ también está contenido ahí. Tenemos que

$${\overline{\pi}_e}^{-1}(0) = \{(0,0,u,u_a) : f(0,u)\in\Re\,,\; u_a\in E(\Re)\}$$

por lo tanto

$$(f_e\circ{\overline{\pi}_e}^{-1})\,(0) = \mathcal{B}\cap\Re\,+\,E(\Re)$$

y, por lo tanto,

$$E(\Re)\,\subset\,(f_e\circ{\overline{\pi}_e}^{-1})^k\,(0)\quad\text{para } k\geq 1\,.$$

■

Definición 4.6 *Diremos que* $\mathcal{S}\subset\mathcal{X}_e$ *es un subespacio extendido de controlabilidad (s.e.c.) si* $\mathcal{S}\in\mathcal{C}(A_e,B_e)$

Si ξ es un subespacio vectorial de $\mathcal{X}_e$, denotamos

$$\mathbf{F}_e(\xi) := \{F:\mathcal{X}_e\to\mathcal{U}_e\;/\;(A_e+B_eF)\xi\subset\xi\}\,.$$

Podemos enunciar el problema extendido de la siguiente forma:

<u>Problema EDP</u> (extended decoupling problem): Dados

$$A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}\,,\ B:\mathcal{U}\to\mathcal{X}\,,\ D_i:\mathcal{X}\to\mathcal{Z}_i\,,\ 1\le i\le k\,.$$

Encontrar, si es posible, $n_a\in\mathbb{N}$, $\mathcal{S}_i\in\mathcal{C}(A_e,B_e)$, $1\le i\le k$, tales que:

$$\begin{aligned}
&\text{EDP 1)}\ \ \bigcap_{i=1}^{k}\mathbf{F}_e(\mathcal{S}_i)\neq\emptyset\\
&\text{EDP 2)}\ \ \mathcal{S}_i\subset\bigcap_{j\neq i}(\mathcal{K}_j\oplus\mathcal{X}_a)\,,\ 1\le i\le k\\
&\text{EDP 3)}\ \ \mathcal{S}_i+(\mathcal{K}_i\oplus\mathcal{X}_a)=\mathcal{X}_e\,,\ 1\le i\le k
\end{aligned}$$

Teorema 4.7 *Dado un sistema* $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, $B:\mathcal{U}\to\mathcal{X}$, $D:\mathcal{X}\to\mathcal{Z}$ *con*

$$D=\bigoplus_{i=1}^{k}D_i\,,$$

EDP tiene solución si y sólo si $\Re_i^*+\mathcal{K}_i=\mathcal{X}\quad\forall\ i=1,2,\dots,k$

Demostración.

Si EDP tiene solución, EDP 2) implica que

$$P(\mathcal{S}_i)\ \subset\ P\left[\bigcap_{j\neq i}(\mathcal{K}_j\oplus\mathcal{X}_a)\right]\ \subset\ \bigcap_{j\neq i}\mathcal{K}_j=\widehat{\mathcal{K}_i}$$

Por la proposición 4.3, $P(\mathcal{S}_i)\in\mathcal{C}(A,B)$, con lo que por la definición de $\Re_i^*$ resulta $P(\mathcal{S}_i)\subset\Re_i^*$. Además, EDP 3) implica que $P(\mathcal{S}_i)+\mathcal{K}_i=\mathcal{X}$ con lo que

$$\Re_i^*+\mathcal{K}_i=\mathcal{X}\quad\forall\ i=1,2,\dots,k$$

Recíprocamente, si esta última condición es cierta, definimos isomorfismos $E_i:\Re_i^*\to\mathcal{X}_{a_i}$ donde $\mathcal{X}_{a_i}$ es un espacio vectorial de la misma dimensión que $\Re_i^*$.

$$\mathcal{X}_a=\bigoplus_{i=1}^{k}\mathcal{X}_{a_i}\,,\quad n_a=\sum_{i=1}^{k}\dim\Re_i^*$$

Extendemos E_i a una aplicación lineal $\mathcal{X}_e\to\mathcal{X}_e$ que sea nula sobre un complementario de $\Re_i^*$.

Los subespacios

$$\mathcal{S}_i=(P+E_i)(\Re_i^*)$$

por la proposición 4.5 cumplen $\mathcal{S}_i\in\mathcal{C}(A_e,B_e)\quad\forall\ i=1,2,\dots,k\,.$

Además, son independientes porque si

$$\sum_{i=1}^{k}(P+E_i)x_i=0\quad x_i\in\Re_i^*\quad\forall\ i=1,2,\dots,k$$

tendremos

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = -\sum_{i=1}^{k} E_i x_i$$

pero

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \in \mathcal{X} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k} E_i x_i \in \mathcal{X}_a$$

entonces, por ser $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_a$, resulta

$$\sum_{i=1}^{k} E_i x_i = 0$$

y al ser

$$\mathcal{X}_a = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{X}_{a_i}$$

tenemos que $E_i x_i = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k$. Finalmente, como $E_{i|\Re_i^*}$ es un isomorfismo, resulta $x_i = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, k$.

Según el lema 3.1 se cumple EDP 1).

EDP 2) se verifica porque

$$\mathcal{S}_i \subset (P + E_i)(\widehat{\mathcal{K}_i}) \subset \bigcap_{j \neq i} (\mathcal{K}_j \oplus \mathcal{X}_a).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_i + (\mathcal{K}_i \oplus \mathcal{X}_a) = (P + E_i)(\Re_i^*) + (\mathcal{K}_i \oplus \mathcal{X}_a) = \\ &= (\Re_i^* + \mathcal{K}_i) \oplus \mathcal{X}_a = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_a = \mathcal{X}_e \quad \text{que es EDP 3)} \end{aligned}$$

■

Veamos que se puede reducir la dimensión de la extensión.

Lema 4.8 *Sean* $\{\Re_i\}_{1 \leq i \leq k}$ *subespacios vectoriales de* $\mathcal{X}$*,*

$$n_a = \sum_{i=1}^{k} dim\, \Re_i \,-\, dim \left(\sum_{i=1}^{k} \Re_i \right).$$

Si $dim\, \mathcal{X}_a = n_a$ *y definimos* $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_a$*, existen homomorfismos* $E_i : \mathcal{X}_e \to \mathcal{X}_e$, $1 \leq i \leq k$*, tales que* $Im\, E_i \subset \mathcal{X}_a$, $1 \leq i \leq k$, *y* $\{\mathcal{S}_i := (P + E_i)\Re_i\}$, $1 \leq i \leq k$, *son independientes.*

Demostración.

Consideramos los subespacios $\mathcal{T}_i$ de $\mathcal{X}$ definidos por

$$\mathcal{T}_1 = \{0\}$$

$$\mathcal{T}_i = \Re_i \bigcap \left(\sum_{j=1}^{i-1} \Re_j \right) \quad i = 2, 3, \ldots, k$$

Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(\mathcal{T}_i) = \sum_{i=2}^{k} \dim \Re_i + \sum_{i=2}^{k} \dim \left[\sum_{j=1}^{i-1} \Re_j\right] - \sum_{i=2}^{k} \dim \left[\sum_{j=1}^{i} \Re_j\right] =$$

$$= \sum_{i=2}^{k} \dim \Re_i + \sum_{i=1}^{k-1} \dim \left(\sum_{j=1}^{i} \Re_j\right) - \sum_{i=2}^{k} \dim \left(\sum_{j=1}^{i} \Re_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \dim \Re_i - \dim \left(\sum_{i=1}^{k} \Re_i\right)$$

Consideramos isomorfismos $E_i : \mathcal{T}_i \to \mathcal{X}_{a_i}$ y los extendemos a $E_i : \mathcal{X}_e \to \mathcal{X}_e$ con la aplicación nula en un complementario de $\mathcal{T}_i$ en $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_a$ y

$$\mathcal{X}_a = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{X}_{a_i}.$$

Los subespacios $\mathcal{S}_i$ son independientes. En efecto, si

$$x \in \mathcal{S}_i \bigcap \left(\sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{S}_j\right)$$

tendremos que

$$x = (P + E_i) r_i = \sum_{j=1}^{i-1} (P + E_j) r_j \quad \text{con} \quad r_j \in \Re_j \quad 1 \le j \le i$$

de donde, por ser $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_a$, resulta

$$r_i = \sum_{j=1}^{i-1} r_j$$

$$E_i r_i - \sum_{j=1}^{i-1} E_j r_j = 0$$

la primera igualdad dice que $r_i \in \mathcal{T}_i$ y la segunda, por ser

$$\mathcal{X}_a = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{X}_{a_i},$$

que

$$E_j r_j = 0 \quad 1 \le j \le i$$

por tanto $r_i \in \mathcal{T}_i \cap \operatorname{Nuc} E_i = \{0\}$ con lo que $x = 0$. ■

Teorema 4.9 *Si EDP tiene solución, podemos reducir la ampliación a*

$$n_a = \sum_{i=1}^{k} dim\,(\Re_i^*) \; - \; dim \left(\sum_{i=1}^{k} \Re_i^*\right)$$

Demostración.

La demostración del teorema 4.7 se basa en que los espacios $\mathcal{S}_i = (P+E_i)(\Re_i^*)$ son independientes y según el lema 4.8 también es así con las E_i definidas allí. El resto de la demostración vale de la misma forma. ∎

Ejemplo 4.10 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^5,\ \ \mathcal{U} = \mathbb{R}^2,\ \ \mathcal{Z} = \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si denotamos por $\{e_i\}_{1\leq i\leq 5}$ la base natural de $\mathcal{X} = \mathbb{R}^5$ y $\{u_1, u_2\}$ la base natural de $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$. Tendremos que

$$\mathcal{K}_1 = \operatorname{Nuc} D_1 = [e_2, e_3, e_4, e_5] = \widehat{\mathcal{K}_2}$$
$$\mathcal{K}_2 = \operatorname{Nuc} D_2 = [e_1, e_2, e_3, e_4] = \widehat{\mathcal{K}_1}$$

$$\mathcal{K}_1 = (f \circ \overline{\pi}^{-1})^4\,(0) \quad \text{ya que}$$

$$\begin{aligned}
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\,(0) &= \mathcal{B} \cap \mathcal{K}_1 = [e_2] \\
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\ [e_2] &= f\left([e_2, u_1, u_2] \cap f^{-1}(\mathcal{K}_1)\right) = f\left([e_2, u_1, u_2] \cap [e_1, e_3, e_4, e_5, u_1, e_2 - u_2]\right) = \\
&= [e_2, e_5] \\
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\ [e_2, e_5] &= f\left([e_2, e_5, u_1, u_2] \cap f^{-1}(\mathcal{K}_1)\right) = [e_2, e_5, e_4] \\
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\ [e_2, e_5, e_4] &= f\left([e_2, e_5, e_4, u_1, u_2] \cap f^{-1}(\mathcal{K}_1)\right) = \mathcal{K}_1\,.
\end{aligned}$$

Por ello, $\mathcal{K}_1$ es de controlabilidad y $\Re_2^* = \mathcal{K}_1$.

$$\mathcal{K}_2 = (f \circ \overline{\pi}^{-1})^4\,(0) \quad \text{ya que}$$

$$\begin{aligned}
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\,(0) &= \mathcal{B} \cap \mathcal{K}_2 = [e_2] \\
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\ [e_2] &= f\left([e_2, u_1, u_2] \cap f^{-1}(\mathcal{K}_2)\right) = f\left([e_2, u_1, u_2] \cap (\mathcal{X} \oplus [u_1])\right) = [e_1, e_2] \\
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\ [e_1, e_2] &= f\left([e_1, e_2, u_1, u_2] \cap (\mathcal{X} \oplus [u_1])\right) = [e_4, e_1, e_2] \\
(f \circ \overline{\pi}^{-1})\ [e_4, e_1, e_2] &= f\left([e_4, e_1, e_2, u_1, u_2] \cap (\mathcal{X} \oplus [u_1])\right) = [e_3, e_4, e_1, e_2] = \mathcal{K}_2\,.
\end{aligned}$$

Por ello, $\mathcal{K}_2$ es de controlabilidad y $\Re_1^* = \mathcal{K}_2$.

Tenemos que $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \neq \{0\}$ pero $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{X}$ con lo que EDP tiene solución ampliando el sistema con

$$n_a = \dim(\mathcal{K}_2) + \dim(\mathcal{K}_1) - \dim(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) = 4 + 4 - 5 = 3$$

ecuaciones.

Agradecimientos

Los autores desean hacer constar su gratitud al Dr. Ferran Puerta por sus sugerencias.

Bibliografía

[1] W. Murray Wonham, *Linear Multivariable Control*, Springer-Verlag New York Inc, 1985.