



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA

**Estudio comparativo de estrategias de  
implementación de controladores repetitivos  
para señales de frecuencia variable**

**Enric Xargay Mata, Ramon Costa Castelló**

*IOC-DT-P-2005-12  
Juliol 2005*



# Estudio Comparativo de Estrategias de implementación de controladores Repetitivos para señales de frecuencia variable

Enric Xargay Mata, Ramon Costa Castelló  
Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC)  
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)  
Av.Diagonal 647,11  
08028-Barcelona  
enricx@menta.net,ramon.costa@upc.edu

19 de julio de 2005

## Resumen

En este trabajo se revisan dos algoritmos de control para el seguimiento de referencias y el rechazo de perturbaciones periódicas de frecuencia variable o desconocida. Se discuten las ventajas e inconvenientes de cada uno y se proponen métodos de implementación. Además, se validan experimentalmente ambos algoritmos de control en un problema de rechazo de perturbaciones.

**Palabras clave:** Control repetitivo, principio del modelo interno, frecuencia variable.

## 1. INTRODUCCIÓN

El control repetitivo ha sido utilizado con éxito en diferentes áreas como el control de CDs y discos duros [8] [1] [10], la robótica [16] [9], las máquinas de control numérico [14], la supresión de vibraciones [7] [5], los rectificadores electrónicos [18] o los filtros activos [2] entre otros.

Estos algoritmos de control requieren que el período de muestreo esté sincronizado con el período de la señal de referencia o de perturbación. En muchas aplicaciones, sin embargo, este último período no es conocido o varía con el tiempo. Los sistemas giratorios, por ejemplo, pueden estar afectados por perturbaciones periódicas provocadas por el propio giro de sus componentes; estas perturbaciones están acopladas con la velocidad de rotación del sistema, de modo que si esta velocidad varía, también varía la frecuencia de la perturbación.

Para superar este problema, se han desarrollado di-

ferentes algoritmos de control en que el período de muestreo del controlador se ajusta de forma adecuada a la señal de referencia o de perturbación. Este muestreo a período variable, sin embargo, no siempre armoniza con otros requerimientos del sistema. A menudo, por ejemplo, se utilizan diferentes lazos de control en un mismo sistema para conseguir diferentes propósitos, y el control repetitivo únicamente es un módulo para el seguimiento de referencias o el rechazo de perturbaciones periódicas. En estas aplicaciones es obligado el uso de un período de muestreo fijo, y el proceso de obtención de muestras sincronizadas, como requiere el control repetitivo, es complejo.

En este trabajo se analizan dos algoritmos de control, basados en la Teoría del Control Repetitivo, capaces de seguir referencias y rechazar perturbaciones periódicas de frecuencia variable o desconocida usando un período de muestreo fijo. El estudio se extiende en la descripción y la comparativa de ambos algoritmos y propone algunos métodos de implementación, de modo que el lector podrá valorar las ventajas y los inconvenientes de cada controlador, así como los compromisos de diseño que se deben resolver.

### 1.1. CONTROL REPETITIVO

### 1.2. FUNDAMENTOS

El control repetitivo es una técnica de control lineal que utiliza el Principio del Modelo Interno [4] para el diseño de controladores capaces de seguir referencias periódicas y rechazar perturbaciones periódicas.

Originalmente, el control repetitivo se desarrolló como un controlador en tiempo continuo de dimensión infinita. Sin embargo, la implementación analógica de este tipo de controladores resulta extremadamente com-

pleja. Afortunadamente, su implementación en tiempo discreto es más sencilla, de modo que, si el período de la señal de referencia o perturbación  $T_p$  es un múltiplo entero del período de muestreo  $T_s$  ( $T_p = N \cdot T_s$ ), basta incluir en el lazo de control la siguiente función de transferencia:

$$R(z) = \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}} \quad (1)$$

donde  $N$  es el orden del controlador.

Este bloque presenta  $N$  polos uniformemente distribuidos sobre el círculo unidad y, por lo tanto, una ganancia infinita en todas aquellas frecuencias que son múltiplos de  $\frac{1}{T_p}$ , empezando por frecuencia cero (con lo cual también realiza la función de integrador puro). Cabe mencionar que, con esta implementación en tiempo discreto, sólo se pueden seguir o rechazar con error nulo aquellas componentes frecuenciales de la señal que están por debajo de la frecuencia de Nyquist del sistema ( $\frac{1}{2 \cdot T_s}$ ).

Desde un punto de vista intuitivo, se puede afirmar que, en tareas de seguimiento de referencias periódicas, el controlador repetitivo utiliza en cada momento los valores del error del período anterior para acumular información y reducir el error de seguimiento en el régimen permanente. El caso de rechazo de perturbaciones periódicas es análogo, pero aquí la información se utiliza para compensar la perturbación. Por este motivo, a menudo, se relaciona el control repetitivo con técnicas de aprendizaje [17]. Como ya se ha hecho notar, este proceso de aprendizaje requiere que el período de muestreo  $T_s$  esté sincronizado con el período de la señal de referencia o perturbación  $T_p$ , de modo que dicha señal sea también periódica en tiempo discreto.

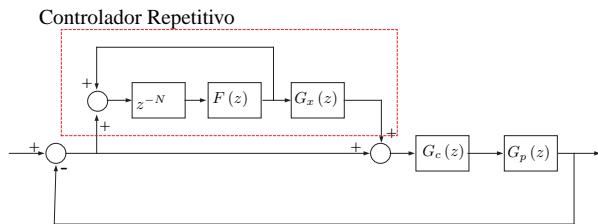


Figura 1: Estructura del controlador repetitivo para frecuencia constante

La figura 1 presenta un esquema habitual del sistema de control, donde se incorpora el controlador repetitivo con el fin de aumentar un compensador ya existente,  $G_c(z)$ , que estabiliza la planta,  $G_p(z)$ , y rechaza perturbaciones en un rango amplio de frecuencias. Este planteamiento fue introducido y estudiado inicialmente por Inoue et al. [6].

En este planteamiento, se introduce un filtro FIR pasabajos de fase nula,  $F(z)$ , encargado de reducir la ganancia en aquellas frecuencias en las que existe incertidumbre en el comportamiento de la planta, y un filtro lineal,  $G_x(z)$ , que garantiza la estabilidad del sistema completo en lazo cerrado. En [12] se describen métodos para el diseño de  $G_x(z)$ . En general, estos métodos utilizan la función de transferencia de la planta (en tiempo discreto), por lo cual es necesario disponer de un modelo fiable para el buen diseño del controlador repetitivo.

### 1.3. Control repetitivo para frecuencia variable (CR-FV)

Como ya se ha comentado, sin embargo, existen aplicaciones en las cuales el período de la señal de referencia o de perturbación no es conocido o varía con el tiempo. En estas aplicaciones, el esquema presentado en el apartado anterior no es válido, ya que éste se diseña para una frecuencia fija conocida.

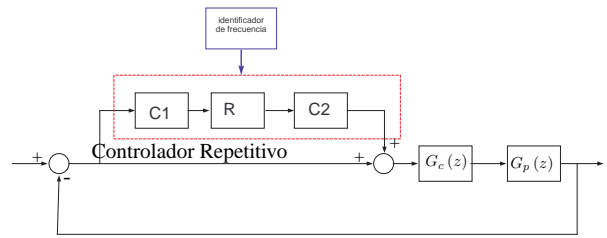


Figura 2: Estructura genérica de los controladores analizados

En este trabajo se revisan dos algoritmos de control digital basados en la Teoría del Control Repetitivo capaces de seguir referencias y rechazar perturbaciones periódicas de frecuencia variable o desconocida usando un período de muestreo fijo. Ambos sistemas de control comparten un mismo diagrama de bloques (figura 2). El diseño de estos dos controladores está basado en el concepto de sistemas multirate: mientras el controlador nominal trabaja a la frecuencia fija de muestreo  $F_s = \frac{1}{T_s}$ , el controlador repetitivo trabaja a una frecuencia  $F_c = \frac{1}{T_c}$  variable.

El sistema de control genérico está formado por el controlador nominal, el controlador repetitivo y los conversores de la tasa de muestreo, que son los encargados de diezmar/interpolan las muestras ficticias necesarias para el controlador repetitivo y interpolar/diezmar la acción de control que debe ser introducida en la planta. Este esquema requiere, además, un nuevo bloque, llamado identificador de frecuencia, que determine la frecuencia de la señal de referencia o de perturbación

y poder, así, sintonizar de forma correcta el algoritmo de control.

En general, el procedimiento de implementación de ambos algoritmos se puede describir de la siguiente forma:

1. el identificador de frecuencia estima el período de la señal de referencia o perturbación  $T_p$ ;
2. a partir de esta información, se diezman/interpolan las muestras ficticias necesarias para el controlador repetitivo, a intervalos  $T_c$ ;
3. se calcula la acción de control a partir de estas muestras ficticias; y
4. se interpola/diezma la acción de control, a la frecuencia fija de muestreo  $F_s$ , que se debe introducir en la planta.

Diseñar correctamente estos procesos de conversión de la tasa de muestreo es fundamental para el buen funcionamiento del controlador. Como se ha discutido en la sección anterior, es fundamental mantener el período de trabajo del controlador  $T_c$  sincronizado con el período de la señal de referencia o perturbación  $T_p$ , de modo que:

$$T_p = N \cdot T_c \quad (2)$$

La principal diferencia entre los dos algoritmos analizados reside en el criterio de elección de  $N$ . En el primer algoritmo, el valor de  $N$  es fijo e independiente del período  $T_p$ . En el segundo caso, en cambio, se determina  $N$  de modo que el valor de  $T_c$  sea, en cada momento, el más próximo posible a  $T_s$ .

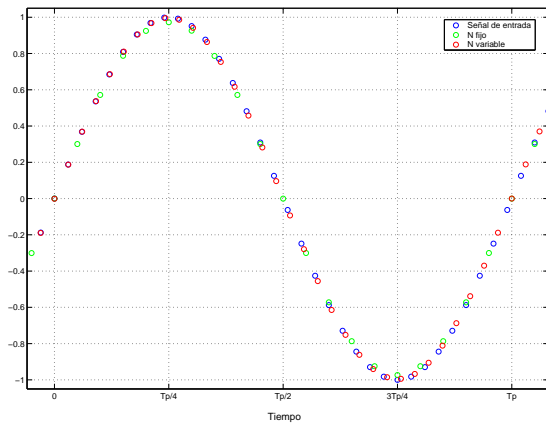


Figura 3: Reconstrucción de la señal según ambos algoritmos

La figura 3 ilustra la reconstrucción de una posible señal de error con las muestras necesarias para cada algoritmo. Para este ejemplo se supone una señal de

error sinusoidal de frecuencia 6Hz ( $T_p = 0,166s$ ) y un período de muestreo  $T_s$  de 5ms. Las muestras en verde representan las nuevas muestras para el algoritmo de  $N$  fijo, donde se ha tomado  $N = 20$  ( $T_c = 8,33ms$ ). En rojo, se representan las nuevas muestras para el algoritmo de  $N$  variable, donde se ha tomado  $N = 33$  ( $T_c = 5,05ms$ ) de modo que la variación entre  $T_s$  y  $T_c$  sea mínima. Se puede observar que ambas reconstrucciones están sincronizadas con  $T_p$ .

Si bien ambos algoritmos comparten el procedimiento de implementación descrito anteriormente, las características de esta implementación y las prestaciones del controlador dependen en gran medida de la elección de un algoritmo o el otro.

#### 1.4. CR-FV: controlador de orden fijo

En este primer algoritmo, el orden  $N$  del controlador se fija a priori a partir del mínimo período  $T_p^{min}$  de la señal de referencia o de perturbación que se quiera seguir o rechazar:

$$N = \frac{T_p^{min}}{T_s} \quad (3)$$

y se ajusta el período  $T_c$  del controlador repetitivo como:

$$T_c = \frac{T_p}{N} \quad (4)$$

Una característica interesante de este controlador es que sólo introduce ganancia en los mismos  $N$  primeros armónicos, de modo que siempre tiene el mismo número de polos sobre el círculo de radio unidad.

El hecho de fijar el orden de este modo, sin embargo, implica que este algoritmo trabaja, en todo el rango de frecuencias de interés, con el mínimo número de muestras. Si  $N$  es suficientemente grande, este hecho no comporta ningún problema; pero en determinados sistemas de control, puede obligar a trabajar con un número de muestras muy pequeño que limite las prestaciones del controlador.

#### 1.5. CR-FV: controlador de orden variable

En este segundo algoritmo, en cambio, el orden  $N$  del controlador se determina, en tiempo real, como el entero más cercano al cociente  $\eta = \frac{T_p}{T_s}$ :

$$N = \text{round}(\eta) \quad (5)$$

y se ajusta el período  $T_c$  del controlador repetitivo como:

$$T_c = \frac{T_p}{N} = \left(\frac{\eta}{N}\right) \cdot T_s \quad (6)$$

Como ya se ha comentado, este segundo algoritmo garantiza, en todo momento, que el valor de  $T_c$  sea el más próximo posible a  $T_s$ . Se puede acotar la desviación relativa máxima  $\delta$  de la tasa de muestreo  $T_c$  del controlador repetitivo respecto a la tasa de muestreo fija  $T_s$ :

$$\delta = \left| \frac{T_s - T_c}{T_s} \right| \leq \frac{1}{2 \cdot N} \quad (7)$$

de modo que, si el orden  $N$  del controlador es suficientemente elevado, no existen variaciones significativas del período  $T_c$  del controlador repetitivo respecto a  $T_s$ . Por ejemplo, para  $N = 25$ ,  $\delta = 2\%$ .

A diferencia del anterior, este algoritmo no garantiza que  $T_s < T_c$ . Sin embargo, como se ha demostrado, las variaciones entre ambos períodos no son significativas, de modo que se puede suponer que, si  $T_s$  está bien definido, la señal de referencia o de perturbación está bien muestreada también a  $T_c$ .

Con este algoritmo, además, se aprovecha la máxima información disponible de la señal de referencia o de perturbación, ya que el número de muestras ficticias con que se calcula la acción de control se adapta, en cada momento, al período de la perturbación. De este modo, las prestaciones de este controlador son, en general, mejores.

## 1.6. Identificador de frecuencia

Se elija el algoritmo que se elija, es fundamental que el sistema de control sea capaz de determinar el período de la señal de referencia o de perturbación con una precisión suficiente. Como ya se ha comentado, el identificador de frecuencia es el bloque responsable de determinarla. Cabe remarcar que es necesario conocer sólo la frecuencia de la señal, y no su forma.

En el caso de seguimiento de referencias, este bloque puede utilizar la propia señal de referencia para determinar su período. En cambio, en el caso de rechazo de perturbaciones, el controlador impide ver la señal de perturbación en la salida del sistema, de modo que el identificador de frecuencia debe trabajar conjuntamente con la señal de control y la salida del sistema. En [13] se presenta un método para identificar la frecuencia de perturbaciones periódicas a partir de la señal de control.

En su implementación, este identificador puede ser tratado como una tarea paralela al algoritmo de control y no es necesario que trabaje a la misma frecuencia de muestreo  $F_s$ .

## 1.7. Conversores de la tasa de muestreo

Los conversores de la tasa de muestreo son los encargados de:

1. generar, a una frecuencia  $F_c$ , la muestras ficticias necesarias para el controlador repetitivo; y
2. a partir de la acción de control calculada, interpolar/diezmar la acción de control que debe ser introducida en la planta a una frecuencia  $F_s$ .

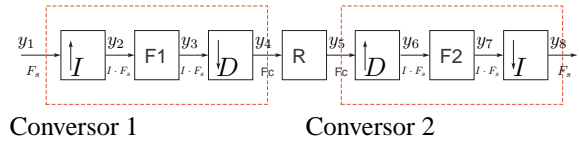


Figura 4: Estructura de los conversores de tasa

La figura 4 muestra el diagrama de bloques básico del controlador repetitivo con los dos conversores de frecuencia y los correspondientes diezmadores/interpoladores.

El conversor 1 es el responsable de generar la muestras ficticias para el controlador repetitivo, cambiando la tasa de muestreo  $T_s$  a una nueva tasa de muestreo  $T_c$ , definida a partir de la información proporcionada por el identificador de frecuencia y del controlador implementado. Así pues, este primer conversor debe realizar una conversión por un factor  $\frac{I}{D}$  de modo que:

$$\frac{I}{D} = \frac{F_c}{F_s} = \frac{T_s}{T_c} \quad (8)$$

donde  $I$  y  $D$  son dos números naturales primos entre sí.

El conversor 2 realiza la conversión inversa, interpolando/diezmando la acción de control que debe introducirse en la planta a frecuencia  $F_s$ , de modo que la conversión debe ser, en este caso, por un factor  $\frac{D}{I}$ .

En la implementación de estos dos conversores, hay que tener en cuenta los problemas de aliasing en los procesos de interpolación y diezmado. En general, se requiere el uso de un filtro lineal variante en el tiempo para evitar el aliasing. En esta aplicación, los filtros  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$  de ambos conversores trabajan a una frecuencia  $F_x = I \cdot F_s$  y sus frecuencias de corte  $F_{corte}$  coinciden y se determinan como:

$$F_{corte} = \min \left\{ \frac{F_x}{2 \cdot D}, \frac{F_x}{2 \cdot I} \right\} \quad (9)$$

Así pues, ambos filtros comparten la posición (variable) de polos y ceros, y sólo deben diferir en la ganancia, que para el filtro de conversor 1 debe ser  $I$ , mientras que para el filtro del conversor 2 debe ser  $D$ .

El esquema de conversión descrito en este apartado realiza una conversión de la tasa de muestreo exactamente por un número racional  $\frac{I}{D}$ . En nuestra aplicación, sin embargo, usar este esquema exacto de conversión de tasa puede resultar ineficiente (por ejemplo, porque  $I$  es un número muy grande) o imposible (porque la tasa cambia significativamente de forma continua durante el proceso de conversión). En estas circunstancias, se debe recurrir a esquemas de conversión de tasa no exactos.

Por ejemplo, en la implementación del controlador de orden variable, donde las variaciones de la tasa de muestreo  $T_c$  del controlador repetitivo respecto a la tasa de muestreo fija  $T_s$  son pequeñas, se requieren, en general, unos valores de  $I$  y  $D$  muy grandes para realizar una conversión exacta. En este caso, es más apropiado prescindir de los conversores de tasa y utilizar algún método de aproximación, como la interpolación lineal, para calcular las nuevas muestras.

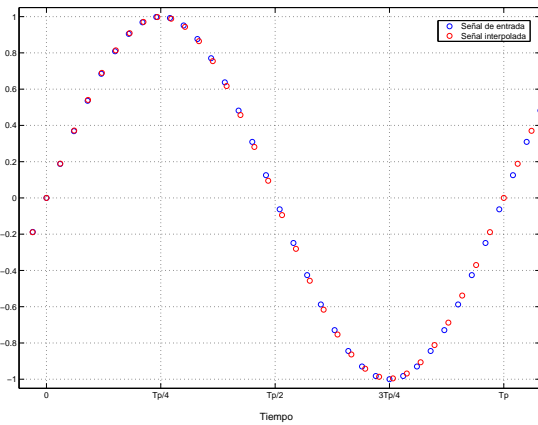


Figura 5: Reconstrucción de la señal por interpolación lineal ( $N$  variable)

Para ilustrar este método se recupera el ejemplo de la figura 3, donde se había utilizado una conversión exacta de tasa para la reconstrucción de la señal, con  $I = 99$  y  $D = 100$ . La figura 5 muestra la reconstrucción (en rojo) de la misma señal utilizando interpolación lineal. Las diferencias entre ambos métodos son inferiores al 1 %.

En el caso del controlador de orden fijo, en cambio, las variaciones entre  $T_c$  y  $T_s$  sí son significativas, de modo que el uso de los conversores de tasa es necesario. Sin embargo, para una conversión exacta, los valores de  $I$  y  $D$  pueden variar de forma considerable en el rango de frecuencias de trabajo, de modo que la implementación exacta de los conversores resulta extremadamente compleja. Una posible estrategia para la implementación de estos conversores consiste en fijar el factor de la interpolación y variar el factor del diezmado de modo que la nueva tasa sea, en cada momento, la más

próxima posible a  $T_c$ . A continuación, se puede utilizar un método de aproximación para calcular las muestras necesarias.

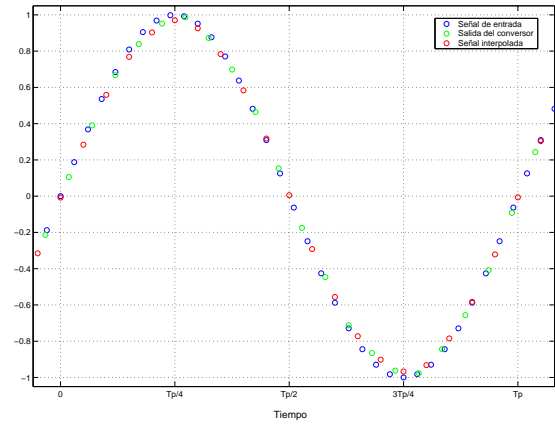


Figura 6: Reconstrucción de la señal por conversión de tasa más interpolación lineal ( $N$  fijo)

La figura 6 muestra la reconstrucción de la señal del mismo ejemplo anterior para el algoritmo de orden fijo con  $N = 20$  y un factor de interpolación fijo  $I = 10$ . En este caso, se ajusta el factor de diezmado a  $D = 17$  de modo que el período de la señal de salida del conversor (en verde) sea lo más próximo posible a  $T_c = 8,33\text{ms}$ . A continuación, se utiliza la interpolación lineal para calcular las muestras necesarias para el controlador (en rojo). Las diferencias entre este método y la conversión exacta también son inferiores al 1 %.

## 1.8. Implementación de los controladores

La figura 7 muestra el esquema de bloques del controlador repetitivo analizado. La principal dificultad en la implementación de este controlador es el diseño del bloque  $G_x(z)$ . En general, este bloque es no causal, de modo que no puede implementarse de forma directa y se deben aprovechar  $d$  retardos de la cadena directa de la celda del controlador repetitivo para conseguir la causalidad del bloque. De esta forma, ambos sistemas se vuelven inseparables a la hora de implementar el controlador.

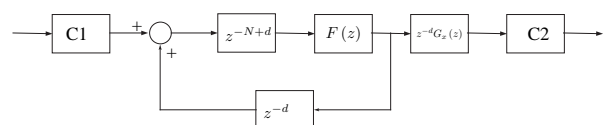


Figura 7: Estructura del controlador repetitivo para frecuencia variable

Como ya se ha comentado, los métodos de diseño de  $G_x(z)$  utilizan la función de transferencia de la planta en tiempo discreto  $G_p(z)$ . En esta aplicación, sin embargo, el período de trabajo  $T_c$  del controlador repetitivo es variable, de modo que el diseño de  $G_x(z)$  debe realizarse en tiempo real a partir del modelo en tiempo continuo de la planta y el período  $T_c$ . Una posible estrategia para la solución de este problema consiste en disponer de modelos (en tiempo discreto) de parametrización por el período de trabajo  $T_c$  del controlador, de modo que se pueda estimar el modelo  $G_p(z)$  adecuado para la frecuencia  $T_c$  real de trabajo.

Este esquema permite realizar las tareas de seguimiento de referencias o de rechazo de perturbaciones en un rango amplio de frecuencias y con variaciones significativas del período de trabajo  $T_c$  del controlador repetitivo respecto a  $T_s$ .

Si, para una determinada aplicación, estas variaciones entre  $T_c$  y  $T_s$  no son significativas en el rango de frecuencias de interés, es posible un diseño fijo para el bloque  $G_x(z)$  a partir de la función de transferencia de la planta  $G_p(z)$  muestreada a una tasa  $T_s$ . Este hecho permite separar este bloque  $G_x(z)$ , junto con los  $d$  retardos que lo convierten en un sistema causal, de la celda básica del controlador repetitivo, de modo que es posible implementarlo fuera de los conversores y hacerlo trabajar a una frecuencia fija  $F_s$  (figura 8). Esto supone una simplificación notable de la implementación del controlador.

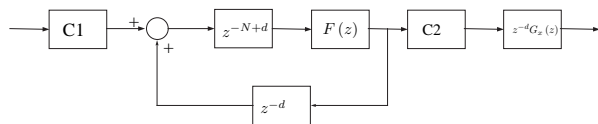


Figura 8: Estructura alternativa del controlador repetitivo para frecuencia variable

Este último esquema es aplicable, por ejemplo, en la implementación del controlador repetitivo de orden variable. Como se ha demostrado en el apartado 2.4, para este controlador, la desviación relativa  $\delta$  de la tasa de muestreo  $T_c$  del controlador repetitivo respecto a la tasa de muestreo fija  $T_s$  es pequeña, si se toma un número de muestras  $N$  suficientemente grande.

En cambio, para el controlador de orden fijo, donde las variaciones entre  $T_c$  y  $T_s$  sí son significativas, se debe implementar el primer esquema.

## 2. ESTUDIO EXPERIMENTAL

En este apartado validan los dos algoritmos de control analizados, en un problema de rechazo de perturbaciones periódicas de frecuencia variable. Se presentan los resultados experimentales obtenidos de la implementación del controlador de orden variable, y las simulaciones realizadas del controlador de orden fijo.

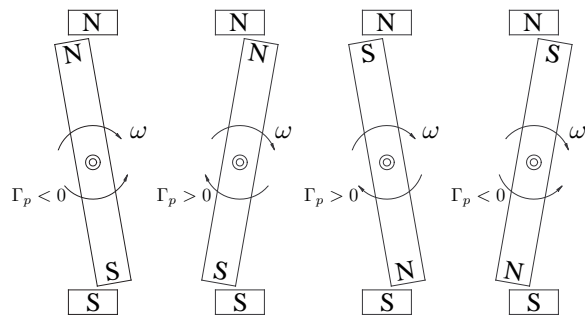


Figura 9: Esquema de la estructura de la planta

La plataforma de experimentación está formada por un motor de continua al que se ha acoplado un dispositivo magnético [3]: un par de imanes solidarios al eje del motor se mueven en el interior del campo magnético creado por otros dos imanes fijos (figura 9). De este modo, la interacción entre los imanes fijos y los móviles genera un par pulsante sobre el eje del motor. Para un voltaje de alimentación constante, este par pulsante es de naturaleza periódica y su frecuencia fundamental coincide con la velocidad de rotación media del motor. Variando este voltaje, se consiguen generar perturbaciones de diferente frecuencia. El objetivo de control para esta planta es que gire a velocidad constante pese a la existencia de este par de perturbación de frecuencia variable.

Para la realización de las simulaciones, se ha determinado un modelo de la planta basado en las ecuaciones físicas [15] que describe de forma satisfactoria su comportamiento, incluyendo la perturbación generada por el dispositivo magnético y las no-linealidades del sistema.

Para el diseño del controlador repetitivo, es necesario disponer de un modelo lineal de la planta en lazo abierto que prescinda del efecto de la perturbación. Así, se ha identificado un segundo modelo (10), en tiempo continuo, con la ayuda un analizador de señal digital. La figura 10 muestra las curvas de magnitud y fase,

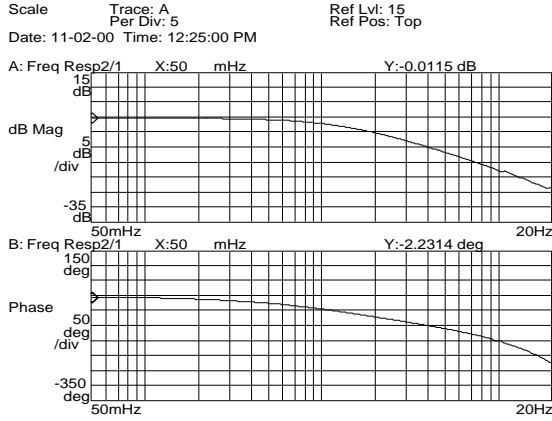


Figura 10: Respuesta frecuencial de la planta

determinadas por senobarrido<sup>1</sup>:

$$G_p(s) = \frac{16,5711}{s + 8,0810} e^{-15,52 \cdot 10^{-3} s} \quad (10)$$

## 2.1. Sistema de control

En este estudio, se cierra el lazo de control con un controlador  $G_c(z)$  proporcional con una ganancia  $kp = 1$ , que trabaja a una frecuencia fija de muestreo  $F_s$  de 200Hz ( $T_s = 5\text{ms}$ ). Además, el sistema incluye un filtro FIR digital pasabajos que atenúa el ruido introducido por el encoder en la señal de salida de la planta. Este filtro trabaja también a la frecuencia fija de 200Hz y tiene una ganancia de  $-3\text{dB}$  a la frecuencia de 50Hz.

Los controladores repetitivos se implementan siguiendo el esquema 'plug-in' explicado en el apartado 2.1. En el diseño de estos controladores, dado que el grupo formado por la planta y el filtro de la salida del encoder presenta ceros fuera del círculo unidad, es necesario utilizar un método de cancelación de fase para el diseño del bloque  $G_x(z)$  [11]. Para el filtro  $F(z)$  del controlador se utiliza el siguiente filtro FIR de fase mínima:

$$F(z) = 0,02z + 0,96 + 0,02z^{-1} \quad (11)$$

Un último aspecto interesante es la implementación del identificador de frecuencia. Dadas las características de la planta, en que la frecuencia de la señal de perturbación está acoplada con la velocidad media de giro del eje del motor, es posible determinar el período de dicha señal  $T_p$  directamente a partir del valor de referencia  $R$  (en  $\frac{rev}{s}$ ), de modo que:

$$T_p = \frac{1}{R} \quad (12)$$

<sup>1</sup>La experiencia de identificación se ha realizado de modo que la ganancia canónica de la planta fuera unitaria. La ganancia canónica real de la planta es de 2,0506)

## 2.2. Presentación de los resultados

El experimento de validación de los algoritmos de control consiste en rechazar las perturbaciones existentes en la planta para unas velocidades de giro del eje del motor de  $8 \frac{rev}{s}$  y  $9 \frac{rev}{s}$ . Los períodos de la señal de perturbación  $T_p$  para estas dos velocidades son de 0,125s y 0,111s, respectivamente. Las figuras 11 y 12 muestran las señales de perturbación en la salida de la planta, normalizadas respecto a la velocidad de referencia. Se proporcionan también los espectros de dichas señales (figuras 13 y 14), donde se observan las componentes fundamentales de 8Hz y 9Hz, respectivamente, y sus armónicos.

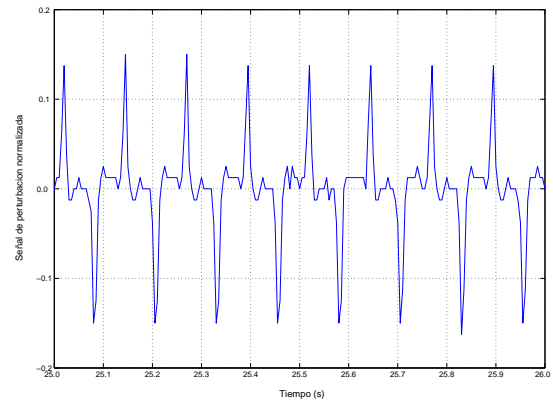


Figura 11: Señal de perturbación normalizada a  $8 \frac{rev}{s}$

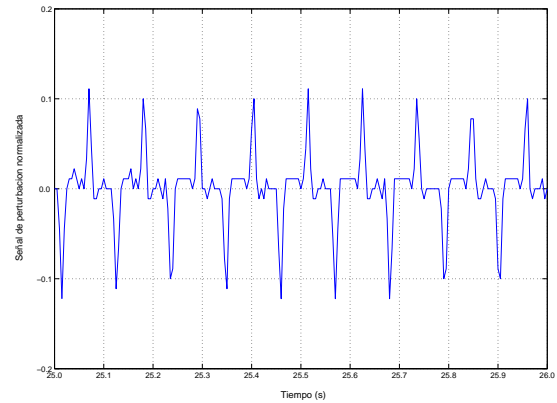


Figura 12: Señal de perturbación normalizada a  $9 \frac{rev}{s}$

### 2.2.1. Controlador de orden variable

El diseño de este controlador se ha realizado siguiendo el procedimiento explicado en el apartado 1.5. El orden del controlador se ajusta en tiempo real según (5) y no se han implementado los conversores de tasa. El cálculo de las muestras ficticias necesarias para el controlador repetitivo, así como el cálculo de la acción



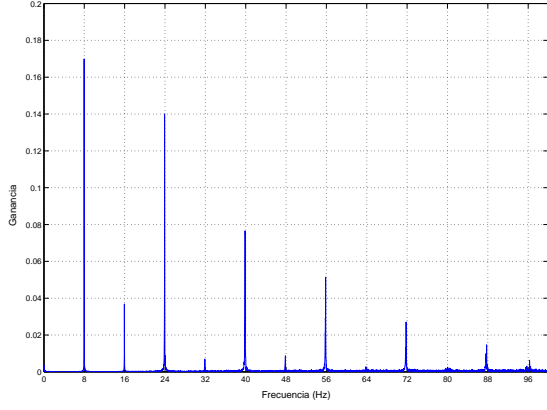


Figura 13: Espectro de la señal de perturbación a  $8 \frac{rev}{s}$

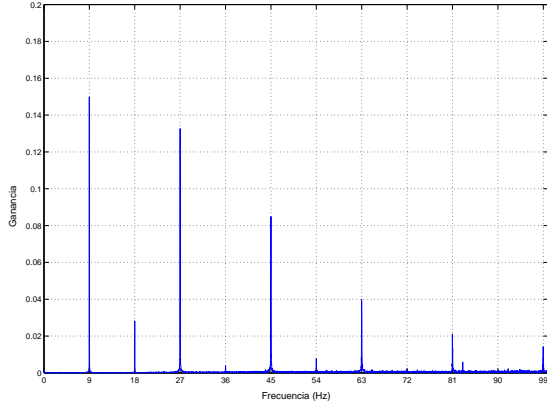


Figura 14: Espectro de la señal de perturbación a  $9 \frac{rev}{s}$

de control que se debe introducir en la planta, se realizan mediante interpolación lineal. La implementación del controlador se basa en el esquema de la figura 8, donde el bloque  $G_x(z)$ , con los  $d$  retardos que lo hacen causal, tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_x(z) = \sum_{k=0}^{12} a_k z^{-k} \quad (13)$$

con  $a_0 = 4,138$ ,  $a_1 = 4,514$ ,  $a_2 = 0,336$ ,  $a_3 = -4,014$ ,  $a_4 = -3,982$ ,  $a_5 = 0,011$ ,  $a_6 = 0,102$ ,  $a_7 = 0,239$ ,  $a_8 = 0,311$ ,  $a_9 = 0,239$ ,  $a_{10} = 0,102$ ,  $a_{11} = 0,011$  y  $a_{12} = -0,007$ .

Para la velocidad de referencia de  $8 \frac{rev}{s}$ , el período de la señal de perturbación  $T_p$  está sincronizado con el período de muestreo  $T_s$ . En este caso,  $\eta = N = 25$  y  $T_s = T_c$ , y el algoritmo no debe realizar ninguna interpolación. La figura 15 muestra la señal de error normalizada. Como se puede observar, la perturbación se ve atenuada aproximadamente un 80 %.

El espectro de la señal de salida para el sistema compensado (figura 16) presenta una fuerte atenuación de

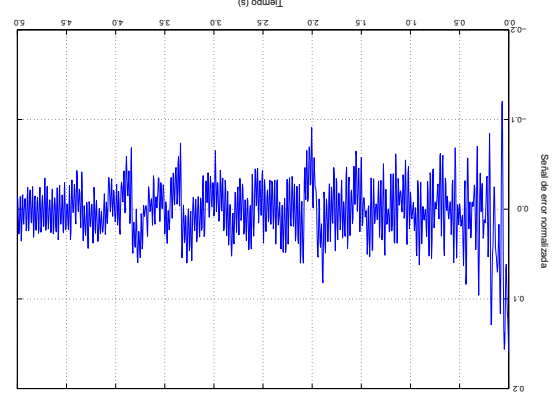


Figura 15: Señal de error normalizada con el controlador de orden variable. ( $8 \frac{rev}{s}$ )

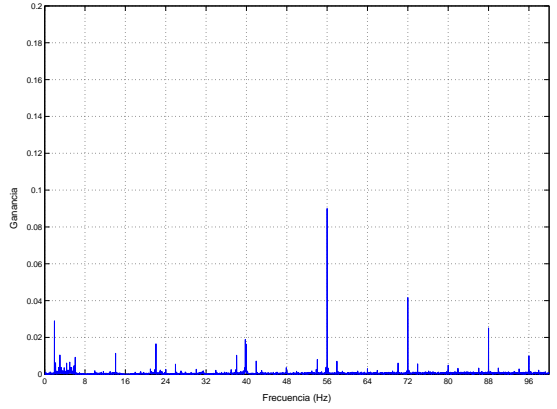


Figura 16: Espectro de la señal de error con el controlador de orden variable. ( $8 \frac{rev}{s}$ )

la perturbación en la frecuencia fundamental y los armónicos. A las frecuencias de 8Hz, 16Hz, 24Hz, 32Hz y 40Hz este espectro se reduce en 55dB, 55dB, 34dB, 24dB y 12dB, respectivamente.

Para la velocidad de referencia de  $9 \frac{rev}{s}$ ,  $T_p$  y  $T_s$  ya no están sincronizados. En este caso,  $\eta = 22,2$ , de modo que el orden del controlador se ajusta a  $N = 22$ . El período de trabajo del controlador repetitivo  $T_c$  es de 5,05ms, lo que supone una desviación relativa respecto a  $T_s$  del 1.01 %.

La figura 17 muestra la señal de error normalizada. Se puede observar que la atenuación de la perturbación es aproximadamente de un 60 %.

El espectro (figura 18) muestra una importante atenuación de la componente fundamental y de los dos primeros armónicos. En concreto, estas componentes de 9Hz, 18Hz y 27Hz se reducen en 22dB, 26dB y 7dB, respectivamente. Este espectro muestra, sin embargo, una amplificación de los armónicos superiores, especialmente de los armónicos de 36Hz y 45Hz, que se

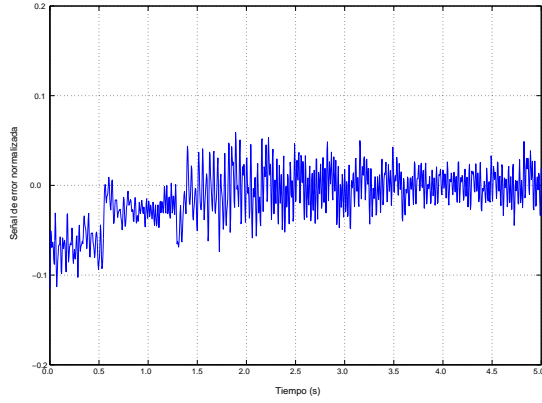


Figura 17: Señal de error normalizada con el controlador de orden variable. ( $9 \frac{rev}{s}$ )

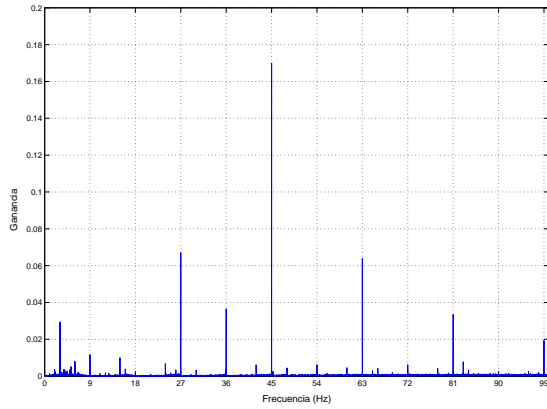


Figura 18: Espectro de la señal de error con el controlador de orden variable. ( $9 \frac{rev}{s}$ )

amplifican en 18dB y 4dB, respectivamente. De estos datos se confirma que la atenuación no es tan fuerte como en el caso anterior, en que no era necesario realizar ninguna interpolación.

### 2.2.2. Controlador de orden fijo

El diseño de este controlador se ha realizado siguiendo el procedimiento explicado en el apartado 1.4. Se supone una frecuencia mínima de la señal de perturbación de 10Hz, de modo que el orden del controlador se fija a  $N = 20$ . Para el cálculo de las muestras ficticias y de la acción de control, se realiza una conversión exacta de tasa. De este modo, para cada frecuencia de la señal de perturbación, se deben calcular los valores de  $I$  y  $D$ , y diseñar los filtros  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$  de estos conversores. La implementación del controlador se basa en el esquema de la figura 7, en que el bloque  $G_x(z)$  se debe ajustar en función de la frecuencia de trabajo del controlador repetitivo.

Para la velocidad de referencia de  $8 \frac{rev}{s}$ , el período de trabajo  $T_c$  del controlador repetitivo es de 6,25ms, lo que supone una desviación relativa respecto a  $T_s$  del 25%. Para realizar la conversión exacta de la tasa de muestreo de  $T_s$  a  $T_c$  y viceversa, los valores de  $I$  y  $D$  se ajustan a 4 y 5, respectivamente. Los filtros  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$  son dos filtros FIR simétricos de orden 10 que trabajan a  $F_x = 800\text{Hz}$  y que tienen una frecuencia de corte  $F_{corte} = 80\text{Hz}$ . La función de transferencia de  $G_x(z)$  utilizada se detalla a continuación:

$$G_x(z) = \sum_{k=0}^4 a_k z^{-k} \quad (14)$$

$$a_0 = 2,985, a_1 = 4,329, a_2 = 0,352, a_3 = -3,829 \text{ y } a_4 = -2,838.$$

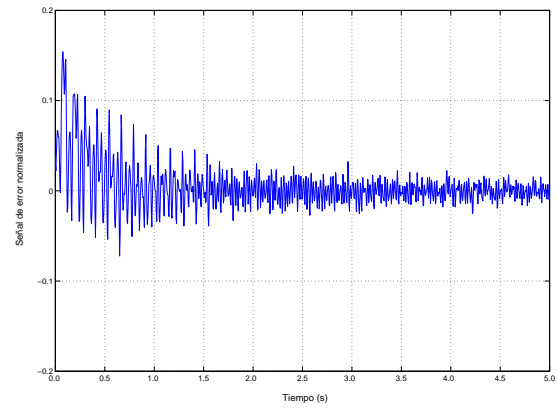


Figura 19: Señal de error normalizada con el controlador de orden fijo. ( $8 \frac{rev}{s}$ )

La figura 19 muestra la señal de error normalizada. Como se puede observar, la perturbación se ve atenuada aproximadamente un 90%.

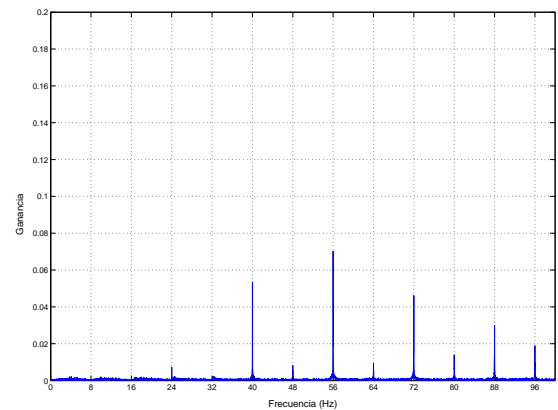


Figura 20: Espectro de la señal de error con el controlador de orden fijo. ( $8 \frac{rev}{s}$ )

El espectro (figura 20) muestra una fuerte atenuación a las frecuencias de 8Hz, 16Hz, 24Hz y 32Hz. En concreto, estas componentes se reducen en 48dB, 30dB,

26dB y 19dB, respectivamente. Este espectro muestra, sin embargo, una amplificación de los armónicos superiores, posiblemente debido al aliasing en los procesos de conversión de tasa.

Para la velocidad de referencia de  $9\frac{rev}{s}$ , el período de trabajo  $T_c$  del controlador repetitivo es de 5,55ms, lo que supone una desviación relativa del 11%. Para realizar la conversión de la tasa de muestreo de  $T_s$  a  $T_c$  y viceversa, los valores de  $I$  y  $D$  se ajustan a 9 y 10, respectivamente. Los filtros  $F_1(z)$  y  $F_2(z)$  son dos filtros FIR simétricos de orden 10 que trabajan a  $F_x = 1800\text{Hz}$  y que tienen una frecuencia de corte  $F_{corte} = 90\text{Hz}$ . La función de transferencia de  $G_x(z)$  utilizada se detalla a continuación:

$$G_x(z) = \sum_{k=0}^4 a_k z^{-k} \quad (15)$$

$a_0 = 3,562$ ,  $a_1 = 4,421$ ,  $a_2 = 0,344$ ,  $a_3 = -3,921$  y  $a_4 = -3,406$ .

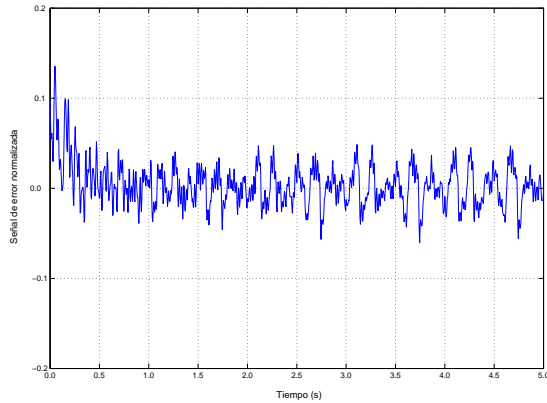


Figura 21: Señal de error normalizada con el controlador de orden fijo. ( $9\frac{rev}{s}$ )

La figura 21 muestra la señal de error normalizada, donde se observa una atenuación de la perturbación de aproximadamente un 70%.

En el espectro (figura 22) se puede observar una significativa atenuación de las componentes de 9Hz, 18Hz, 27Hz y 36Hz, que se reducen en 48dB, 28dB, 28dB y 6dB, respectivamente. Este espectro muestra, sin embargo, una amplificación en las frecuencias intermedias, posiblemente debido al aliasing por un deficiente filtrado en los conversores de tasa.

### 3. CONCLUSIONES

Se han revisado dos algoritmos de control para el seguimiento de referencias y el rechazo de perturbaciones periódicas de frecuencia variable utilizando una tasa de muestreo fija. Se ha probado la validez de ambos

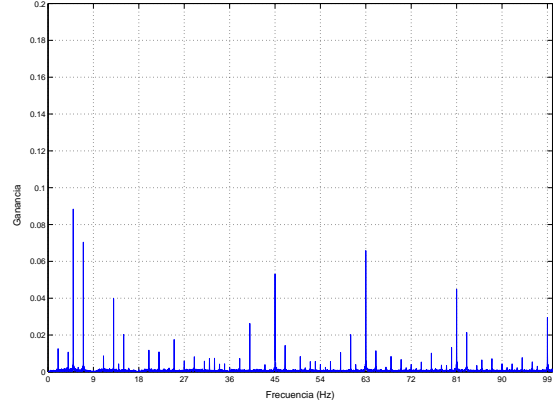


Figura 22: Espectro de la señal de error con el controlador de orden fijo. ( $9\frac{rev}{s}$ )

algoritmos, que se han mostrado eficaces en un problema de rechazo de perturbaciones.

Las prestaciones del controlador de orden variable son, en general, mejores que las del controlador de orden fijo, ya que el primero aprovecha la máxima información disponible de la señal de referencia o de perturbación. Sin embargo, si el número de muestras por período es suficientemente grande en todo el rango de frecuencias de trabajo, las diferencias entre ambos controladores se reducen.

La implementación del controlador de orden variable es más sencilla que la del controlador de orden fijo, ya que este último requiere un modelo de parametrización de la planta en tiempo discreto y, además, el proceso de remuestreo se debe realizar combinando los conversores de tasa con métodos aproximados de interpolación.

### Referencias

- [1] Kok-Kia Chew and Masayoshi Tomizuka. Digital control of repetitive errors in disk drive systems. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 16–19, January 1990.
- [2] Ramon Costa-Castelló, Robert Griñó, and Enric Fossas. Odd-harmonic digital repetitive control of a single-phase current active filter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 19(4):1060–1068, July 2004.
- [3] Ramon Costa-Castelló, Jordi Nebot, and Robert Griñó. Demonstration of the internal model principle by digital repetitive control of an educational laboratory plant. *IEEE Transactions on Education*, 48(1):73–80, February 2005.

- [4] B.A. Francis and W.M. Wonham. Internal model principle in control theory. *Automatica*, 12:457–465, 1976.
- [5] S. Hattori, M. Ishida, and T. Hori. Suppression control method for torque vibration of brushless dc motor utilizing repetitive control with fourier transform. In *Proceedings of the 6th International Workshop on Advanced Motion Control, 2000*, pages 427–432, 2000.
- [6] T. Inoue, M. Nakano, T. Kubo, S. Matsumoto, and H. Baba. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply. In *Proceedings of the 8<sup>th</sup> World Congress of IFAC*, pages 216–220, 1981.
- [7] M. Ishida, T. Su, S. Hattori, and T. Hori. Suppression control method for torque vibration of ac motor utilizing repetitive controller with fourier transformer. In *Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference, 2000*, volume 3, pages 1675–1682, 2000.
- [8] Richard C.H. Lee. *Robust Repetitive Control and Application to a CD Player*. PhD thesis, Cambridge University., February 1998.
- [9] MÑorrlof. An adaptive iterative learning control algorithm with experiments on an industrial robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(2):245–251, April 2002.
- [10] Yoshikazu Onuki and Hideaki Ishioka. Compensation for repeatable tracking errors in hard drives using discrete-time repetitive controllers. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 6(2):132–136, June 2001.
- [11] M. Tomizuka. Zero phase error tracking algorithm for digital control. *SME J. Dynam. Syst., Meas., Contr.*, 109(1):65–68, 1987.
- [12] Masayoshi Tomizuka, Tsu-Chin Tsao, and Kok-Kia Chew. Analysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 111:353–358, September 1989.
- [13] Tsu-Chin Tsao, Yao-Xin Qian, and Mahadevamarthy Nemani. Repetitive control for asymptotic tracking of periodic signals with an unknown period. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122(2):364–369, June 2000.
- [14] Tsu-Chin Tsao and Masayoshi Tomizuka. Adaptive and repetitive digital control algorithms for non-circular machining. In *Proceedings of the 1988 American Control Conference*, 1988.
- [15] Enric Xargay and Ramon Costa Castelló. Modelado de una planta diseñada para ilustrar el principio del modelo interno. In *XXV Jornadas de Automática, 2004*.
- [16] Manabu Yamada, Zaier Riadh, and Yasuyuki Funahashi. Design of discrete-time repetitive control system for pole placement and application. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 4(2):110–118, June 1999.
- [17] Y. Yamamoto. Learning control and related problems in infinite-dimensional systems. In *Proceedings of the 1993 European Control Conference*, pages 191–222, 1993.
- [18] Keliang Zhou, Danwei Wang, and Guangyan Xu. Repetitive controlled three-phase reversible PWM rectifier. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, volume 1, pages 125–129, 2000.