第31卷第3期
2014年3月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol. 31 No. 3
Mar. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.30464

挠性卫星姿态非线性局部镇定控制

周燕茹, 黄文超, 曾建平†

(厦门大学 信息科学与技术学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 本文针对挠性卫星姿态机动和振动抑制问题, 给出一种基于多项式平方和(sum of squares, SOS)的非线性局部镇定控制方法. 根据姿态系统结构特征, 在此基础上, 采用SOS结合S-procedure理论, 得出相应的非线性局部可镇定条件. 该条件可借助有效凸优化工具进行检验, 当优化问题可解时, 可构造非线性姿态控制器的解析解. 最后, 将文中方法应用于某型挠性卫星姿态控制. 仿真结果表明, 在实现大角度姿态快速机动的同时, 有效抑制了挠性附件振动.

关键词: 挠性卫星; 姿态控制; 非线性控制; 降维观测器; 平方和

中图分类号: V448.22　　**文献标识码**: A

Nonlinear local stabilization control of flexible satellite attitude system

ZHOU Yan-ru, HUANG Wen-chao, ZENG Jian-ping†

(College of Information Science and Technology, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005, China)

Abstract: Based on the polynomial sum of squares (SOS) techniques, a nonlinear local stabilization control approach is proposed for the problem of flexible satellite attitude maneuver and vibration suppression. According to the structural features of attitude system, a nonlinear local stabilization controller is developed and the complexity of attitude control design is reduced effectively by employing a separation principle for the reduced-order observer and state feedback. On this basis, the corresponding conditions of nonlinear local stabilization, which can be checked through convex optimization algorithms, are presented by using the SOS and S-procedure theory, and the analytical solution of nonlinear attitude controller can be constructed if the optimization problem is solvable. Finally, this method is applied to the attitude control of a flexible satellite and the simulation results show that both the fast large angle attitude maneuver and the vibration suppression are well realized.

Key words: flexible satellite; attitude control; nonlinear control; reduced-order observer; sum of squares

1 引言(Introduction)

现代卫星通常安装有诸如太阳能帆板、天线和液体箱等大型挠性附件. 当卫星快速大角度姿态机动时, 会激发星体姿态/挠性附件的耦合运动, 严重影响姿态稳定性和运行安全. 对挠性振动抑制, 有主动控制和被动控制两条途径, 前者需额外安装振动运动测量传感器和执行机构, 代价巨大, 工程实践中应尽量避免. 因此, 挠性振动的被动抑制控制, 仍然是当前卫星姿态控制研究和航天工程应用的主要方法[1–6]. 对挠性卫星姿态机动和振动抑制控制, 多采用智能控制类方法, 如滑模[1,5,7–8]、自适应[1,5–6]、变结构[2,4,7–8]和神经网络[2–4]等. 这些控制方法可视为“隐式”的非线性控制, 且多采用线性化方法设计[1–2,4,8]. 由于非线性控制设计工具的缺乏, 直接基于挠性卫星非线性模型的“显式”非线性设计研究结果还很少见.

近年来, 多项式平方和(sum of squares, SOS)技术取得重要进展, 极大地促进了非线性控制理论研究[9–13]. SOS可为多项式非负性判断提供有效的凸松弛算法, 是多项式非线性系统研究的有力工具. 挠性卫星姿态模型本质上是一类有特定结构的多项式非线性系统, 因此可利用SOS来解决这类系统的分析与综合问题. 目前, SOS方法已被初步应用于卫星姿态控制研究[14–22]. Zeng等人[14]基于SOS研究了导弹预警卫星姿态控制问题. 陈琦等人[15]提出一种基于SOS的飞行器姿态镇定控制策略, 用消去法建立控制器与Lyapunov 函数间的关系, 减少了求解迭代次数. 通过引入稠密函数方法, Prajna等人[16]研究了非线性状态反馈综合问题, 并对刚体航天器进行数值仿真验证. Narendra等人[17–18]给出基于SOS的刚体卫星大角度姿态机动控制和切换控制方法. Zheng和Wu[19–20]研究了一类轴对称航天器的姿态控制问题, 提出了非线性H_∞控制的可解条件. 对于刚体卫星姿态系统, 文[21–22] 给出了基于SOS的非线性H_∞和自适应反步LPV控制方案.

收稿日期: 2013–05–11; 录用日期: 2013–10–21.
†通信作者. E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61374037); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20110121110017).

从现有成果来看, SOS在卫星姿态控制的研究成果还很不充分, 当前多限于解决刚体卫星姿态系统控制问题. 受此激励, 本文针对挠性卫星的姿态机动和振动抑制问题, 根据姿态系统结构特征, 采用SOS结合S-procedure理论, 给出一种基于降维观测器的非线性局部镇定控制设计方法. 由于降维观测和非线性状态反馈设计满足分离原理, 降低了姿态控制设计算法的复杂性. 另外, 在SOS框架下, 可获得非线性姿态局部镇定控制器的解析解, 且其仅是关于输出变量的多项式或有理式函数, 不过分增加工程实现难度.

文中符号规定说明如下, $I_n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m\times n}$和$S^n$分别表示$n$维单位矩阵、$m$维实向量、$m\times n$维实矩阵和$n$维实对称矩阵空间. 对方阵$A$, $\mathrm{He}(A):=A+A^{\mathrm{T}}$. 假定所有矩阵具有合适维数, 多项式和单项式均在实数域内.

2 预备知识(Preliminaries)

定义 1[23] 设$f(x)$是一个关于$x\in\mathbb{R}^n$的多项式, 若存在一组多项式$f_1(x),\cdots,f_m(x)$, 使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}f_i^2(x),$$

则称$f(x)$为SOS多项式.

显然, SOS多项式是非负的, 反之则不一定成立. 已有学者对SOS多项式和非负多项式之间的差距(gap)问题进行了研究, 在某些情况下两者是等价的[24]. 检验一个多项式是否为SOS是凸优化问题, 因而将多项式非负性检验放宽为SOS检验, 为多项式非线性控制问题研究提供了一条有效的途径.

后续讨论需要如下引理和定理.

引理 1[12] 关于x的$2m$阶多项式$f(x)$是SOS, 当且仅当存在$Q\geqslant 0$使得

$$f(x)=Z^{\mathrm{T}}(x)QZ(x),$$

其中$Z(x)$是关于x的阶数不大于m的单项式向量.

引理 2[12] 设$P(x)$为对称多项式矩阵, 若其对所有$x\in\mathbb{R}^n$都非奇异, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)=-P(x)\frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i}(x)P(x),\ i=1,2,\cdots,n.$$

引理 3[25] 对$\sigma_1(x)=x^{\mathrm{T}}Q_1x\geqslant 0$, 假定存在一个$\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$, 使得$\sigma_1(\tilde{x})>0$, 则以下两个条件等价:

i) 对使得$\sigma_1(x)\geqslant 0$的所有非零$x\in\mathbb{R}^n$, $x^{\mathrm{T}}Q_0x>0$;

ii) 存在$m\geqslant 0$, 使得$Q_0-mQ_1>0$.

定理 1 设$\alpha\subset\mathbb{R}^n$为有界闭集, $F\in S^q$, $D(x)\in S^p$和$E(x)\in\mathbb{R}^{p\times q}$的元素均是关于$x\in\alpha$的连续函数, 则下列陈述等价:

i) $D(x)<0, F<0$;

ii) 存在标量$\mu>0$, 使得$\begin{bmatrix}D(x) & E(x)\\ E^{\mathrm{T}}(x) & \mu F\end{bmatrix}<0$.

证 ii) $\Rightarrow$ i), 显然成立.

i)$\Rightarrow$ii). 记$G(x)=E^{\mathrm{T}}(x)D^{-1}(x)E(x)$, 易知$G(x)\leqslant 0$且其特征值是关于$x$的连续函数, 故在$x\in\alpha$上存在最小特征值$\underline{\lambda}_{\mathrm{G}}\leqslant 0$满足

$$\underline{\lambda}_{\mathrm{G}}I_{\mathrm{q}}\leqslant E^{\mathrm{T}}(x)D^{-1}(x)E(x),\ \forall x\in\alpha. \tag{1}$$

记$F<0$的最大特征值为$\bar{\lambda}_{\mathrm{F}}<0$, 则

$$F\leqslant\bar{\lambda}_{\mathrm{F}}I_{\mathrm{q}}. \tag{2}$$

取$\mu_0=\underline{\lambda}_{\mathrm{G}}\bar{\lambda}_{\mathrm{F}}^{-1}\geqslant 0$, 结合式(1)–(2), 当$\mu>\mu_0$时, 有$\mu F<\underline{\lambda}_{\mathrm{G}}I_{\mathrm{q}}\leqslant E^{\mathrm{T}}(x)D^{-1}(x)E(x)$, $\forall x\in\alpha$.

最后, 由Schur补引理, 可知ii)成立. 证毕.

3 挠性卫星姿态系统数学模型(Mathematical model of flexible satellite attitude system)

基于有限元离散化方法, 挠性卫星姿态动力学方程可表为

$$\begin{cases}J\dot{\omega}+S(\omega)J\omega+F_{\mathrm{s}}\ddot{\eta}=T_{\mathrm{c}},\\ \ddot{\eta}+2\xi\Omega\dot{\eta}+\Omega^2\eta+F_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\dot{\omega}=0,\end{cases} \tag{3a}$$

其中: $J=\begin{bmatrix}J_1 & -J_{12} & -J_{13}\\ -J_{12} & J_2 & -J_{23}\\ -J_{13} & -J_{23} & J_3\end{bmatrix}$为惯量矩阵, $S(\omega)=[\omega\times]$为叉乘矩阵, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^{\mathrm{T}}$和$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_N)^{\mathrm{T}}$分别为姿态角速度和挠性模态坐标向量, T_{c}为控制力矩, ξ和Ω分别为挠性模态阻尼和频率矩阵, F_{s}为整星振动对卫星中心体转动的柔性耦合系数矩阵, N为截取的挠性模态阶数.

采用Rodrigues参数描述, 卫星姿态运动学方程为

$$\dot{\sigma}=\rho(\sigma)\omega, \tag{3b}$$

其中:

$$\rho(\sigma)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2-\sigma_3 & \sigma_2+\sigma_1\sigma_3\\ \sigma_3+\sigma_1\sigma_2 & 1+\sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3-\sigma_1\\ \sigma_1\sigma_3-\sigma_2 & \sigma_1+\sigma_2\sigma_3 & 1+\sigma_3^2\end{bmatrix},$$

$\sigma=[\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3]^{\mathrm{T}}$为Rodrigues参数.

引入辅助变量$\varphi=\dot{\eta}+F_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\omega$[26], 并记

$$n=6+2N,\ R_{\mathrm{s}}=(J-F_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}})^{-1},\ x_1=\sigma,$$

$$x_2=\omega,\ x_3=\eta,\ x_4=\varphi,\ x_{\mathrm{a}}=[x_1^{\mathrm{T}}\ \ x_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

和$x_{\mathrm{b}}=[x_3^{\mathrm{T}}\ \ x_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 则可得到挠性卫星姿态系统的非线性状态空间方程为

$$\dot{x}=A(x_{\mathrm{a}})x+Bu, \tag{4a}$$

其中:

$$A(x_{\mathrm{a}})=\begin{bmatrix}A_{11}(x_{\mathrm{a}}) & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$B_1:=\begin{bmatrix}0\\ R_{\mathrm{s}}\end{bmatrix},\ A_{21}:=\begin{bmatrix}0 & -F_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\\ 0 & 2\xi\Omega F_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$A_{22} := \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -\Omega^2 & -2\xi\Omega \end{bmatrix},$$

$$A_{11}(x_{\rm a}) := \begin{bmatrix} 0 & \rho(x_1) \\ 0 & R_{\rm s}\left(-S(x_2)J - 2F_{\rm s}\xi\Omega F_{\rm s}^{\rm T}\right) \end{bmatrix},$$

$$A_{12} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R_{\rm s}F_{\rm s}\Omega^2 & 2R_{\rm s}F_{\rm s}\xi\Omega \end{bmatrix},$$

$x = \begin{bmatrix} x_{\rm a} \\ x_{\rm b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$是状态向量, $u = T_{\rm c} \in \mathbb{R}^3$是控制输入.

挠性卫星姿态系统中可直接测量的量是姿态角和姿态角速度, 故系统输出方程为

$$y = x_{\rm a} = Cx,\ C = [I_6\ \ 0]. \tag{4b}$$

显见, 上述挠性卫星姿态状态空间模型(4)仅在系统矩阵的左上角含有部分状态变量耦合, 是一类有特定结构的多项式非线性系统.

记$\rho(x_1)$的第i行为$\rho_i(x_1)$, 采用Lyapunov方法, 可先建立该系统的一个稳定性判据.

引理 4　如果存在对x_1具有连续一阶偏导数的矩阵$P(x_1) > 0$使得

$$\Sigma(x_{\rm a}) := {\rm He}(P(x_1)A(x_{\rm a})) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial P}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2) < 0,$$

则系统(4)渐近稳定.

证　沿用文[12]思路, 选取Lyapunov函数$V(x) = x^{\rm T}P(x_1)x$, 易知结论成立.　　证毕.

由于状态$x_{\rm b}$不能直接测量, 为实现大角度姿态快速机动并有效抑制挠性附件振动的控制目标, 本文根据系统(4)的结构特征, 采用SOS研究基于降维观测器的挠性卫星姿态非线性局部镇定控制问题.

4 非线性局部镇定控制(Nonlinear local stabilization control)

考虑系统(4), 易于验证(A_{22}, A_{12})完全能观测, 故可对$2N$维挠性子系统构造如下观测器:

$$\begin{cases} \dot{z} = (A_{22} - LA_{12})z + [(A_{22} - LA_{12})L + \\ \qquad A_{21} - LA_{11}(y)]y - LB_1u, \\ \hat{x}_{\rm b} = z + Ly, \end{cases} \tag{5}$$

其中L为观测器增益矩阵.

注 1　由极点配置定理, 可选取L使得$(A_{22} - LA_{12})$的极点配置在任意位置.

基于降维观测器(5), 设计非线性状态反馈控制器

$$u = K(x_{\rm a})\hat{x}, \tag{6}$$

其中:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_{\rm a} \\ \hat{x}_{\rm b} \end{bmatrix} = \bar{L}x_{\rm a} + Qz,\ \bar{L} := \begin{bmatrix} I_6 \\ L \end{bmatrix},\ Q := [0\ \ I_{2N}]^{\rm T},$$

$K(x_{\rm a})$为控制器增益矩阵.

结合式(4)−(6), 可得相应闭环系统

$$\dot{\tilde{x}}_{\rm cl} = \tilde{A}_{\rm cl}(x_{\rm a})\tilde{x}_{\rm cl}, \tag{7}$$

其中:

$$\tilde{x}_{\rm cl} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix},\ \tilde{A}_{\rm cl}(x_{\rm a}) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(x_{\rm a}) & \tilde{A}_{12}(x_{\rm a}) \\ \tilde{A}_{21}(x_{\rm a}) & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{22} := A_{22} - L(A_{12} + B_1K(x_{\rm a})Q),$$

$$\tilde{A}_{12}(x_{\rm a}) := BK(x_{\rm a})Q,$$

$$\tilde{A}_{21}(x_{\rm a}) := [A_{21} + (A_{22} - LA_{12})L - L(B_1K(x_{\rm a})\bar{L} + A_{11}(x_{\rm a}))]C,$$

$$\tilde{A}_{11}(x_{\rm a}) := A(x_{\rm a}) + BK(x_{\rm a})\bar{L}C.$$

取变换矩阵$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ [-L\ \ I_{2N}] & -I_{2N} \end{bmatrix}$, 注意到

$$T\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -Lx_{\rm a} + x_{\rm b} - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_{\rm b} - \hat{x}_{\rm b} \end{bmatrix}.$$

令$e = x_{\rm b} - \hat{x}_{\rm b}$, 则式(7)可写为

$$\dot{x}_{\rm cl} = A_{\rm cl}(x_{\rm a})x_{\rm cl}, \tag{8}$$

其中:

$$A_{\rm cl}(x_{\rm a}) = \begin{bmatrix} A(x_{\rm a}) + BK(x_{\rm a}) & -BK(x_{\rm a})Q \\ 0 & A_{22} - LA_{12} \end{bmatrix},$$

$$x_{\rm cl} = [x^{\rm T}\ \ e^{\rm T}]^{\rm T}.$$

对于挠性卫星姿态系统(4), 其非线性局部镇定控制问题具体指, 设计一个基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6), 保证当状态$x_{\rm a}$在指定区域内时, 闭环系统(8)渐近稳定. 为了研究此问题, 先定义如下集合:

$$\alpha = \{x_{\rm a} | |\sigma_i| \leqslant \delta_i,\ |\omega_i| \leqslant \delta_j,\ \delta_i > |\sigma_{0i}|,\ \delta_j > |\omega_{0i}|,\ j = 3+i,\ i = 1,2,3\},$$

其中$\sigma_0 = [\sigma_{01}\ \ \sigma_{02}\ \ \sigma_{03}]^{\rm T}$和$\omega_0 = [\omega_{01}\ \ \omega_{02}\ \ \omega_{03}]^{\rm T}$分别表示$\sigma$和$\omega$的初始值.

定理 2　对系统(8), 给定多项式矩阵$P_1(x_1) > 0$和$Y(x_{\rm a})$, 常数矩阵$P_2 > 0$和W, 当$x_{\rm a} \in \alpha$时, 如下陈述等价:

i) $\Sigma_2 := {\rm He}(P_2A_{22} - WA_{12}) < 0$,

$$\Sigma_1(x_{\rm a}) := {\rm He}(A(x_{\rm a})P_1(x_1) + BY(x_{\rm a})) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial P_1}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2) < 0;$$

ii) 存在标量$\mu > 0$, 矩阵$L = P_2^{-1}W$, $K(x_{\rm a}) = Y(x_{\rm a})P_1^{-1}(x_1)$和$P_0(x_1) = {\rm diag}\{P_1^{-1}(x_1), \mu P_2\}$使得

$$\Sigma_0(x_{\rm a}) := \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial P_0}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2) + {\rm He}(P_0(x_1)A_{\rm cl}(x_{\rm a})) < 0.$$

证　ii)⇒i). 由$\Sigma_0(x_{\rm a}) < 0$可得

$$\begin{bmatrix} D(x_{\rm a}) & E(x_{\rm a}) \\ E^{\rm T}(x_{\rm a}) & \mu F \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

其中:

$$E(x_{\mathrm{a}}) = -P_1^{-1}(x_1)BY(x_{\mathrm{a}})P_1^{-1}(x_1)Q,$$
$$F = \mathrm{He}(P_2A_{22} - WA_{12}),$$
$$D(x_{\mathrm{a}}) =$$
$$\mathrm{He}(P_1^{-1}(x_1)(A(x_{\mathrm{a}}) + BY(x_{\mathrm{a}})P_1^{-1}(x_1))) +$$
$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial P_1^{-1}}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2).$$

对式(9)左边矩阵分别左乘和右乘$\mathrm{diag}\{P_1(x_1), I_{2N}\}$, 根据引理2和Schur补引理, 就可得出$\varSigma_1(x_{\mathrm{a}})<0$和$\varSigma_2<0$.

i)⇒ ii). 定义

$$K(x_{\mathrm{a}}) = Y(x_{\mathrm{a}})P_1^{-1}(x_1)\text{和}L = P_2^{-1}W,$$

则由$\varSigma_1(x_{\mathrm{a}})<0$和$\varSigma_2<0$, 可得

$$D(x_{\mathrm{a}})<0,\ F<0. \tag{10}$$

对$x_{\mathrm{a}}\in\alpha$, 根据定理1和式(10), 易知存在标量$\mu>0$, 使得

$$\begin{bmatrix} D(x_{\mathrm{a}}) & E(x_{\mathrm{a}}) \\ E^{\mathrm{T}}(x_{\mathrm{a}}) & \mu F \end{bmatrix} < 0.$$

最后, 令$P_0(x_1)=\mathrm{diag}\{P_1^{-1}(x_1), \mu P_2\}$, 就有$\varSigma_0(x_{\mathrm{a}})<0$. 证毕.

推论 1 对姿态系统(4)的非线性局部镇定控制, 当$x_{\mathrm{a}}\in\alpha$时, 基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6)的设计满足分离原理, 即观测器(5)和控制器(6)的设计可独立进行. 观测器(5)可通过期望极点配置, 也可通过求解$\varSigma_2<0$来构造. 控制器(6)则可通过求解$\varSigma_1(x_{\mathrm{a}})<0$来构造.

证 由(A_{22}, A_{12})完全能观测、定理2和引理4, 易知这一结论显然成立. 证毕.

在前述工作基础上, 下面借助S–procedure理论结合SOS方法, 给出挠性卫星非线性姿态系统(4)的局部可镇定条件.

定理 3 考虑系统(4), 给定标量$\tau>0$, $\varepsilon>0$, δ_i和$\delta_j(j=3+i,\ i=1,2,3)$, 若下面两个条件成立:

i) 存在多项式矩阵$P_1(x_1)$和$Y(x_{\mathrm{a}})$, 标量$p_i\geqslant 0$, $q_i\geqslant 0$和$q_j\geqslant 0$使得表达式

$$v^{\mathrm{T}}(P_1(x_1)-\tau I_n)v - \varXi(x_1,\vartheta), \tag{11a}$$
$$-\varsigma^{\mathrm{T}}(\varSigma_1(x_{\mathrm{a}})+\varepsilon I_n)\varsigma - \varLambda(x_{\mathrm{a}},\psi) \tag{11b}$$

是SOS, 其中: $v\in\mathbb{R}^n$, $\varsigma\in\mathbb{R}^n$, $\vartheta=[\vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3$和$\psi=[\psi_1\ \cdots\ \psi_6]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^6$的元素分别均为$v$和$\varsigma$中的元素,

$$\varXi(x_1,\vartheta)=\sum_{i=1}^{3}p_i\vartheta_i^{\mathrm{T}}(\delta_i^2-\sigma_i^2)\vartheta_i,$$
$$\varLambda(x_{\mathrm{a}},\psi)=\sum_{i=1}^{3}(q_i\psi_i^{\mathrm{T}}(\delta_i^2-\sigma_i^2)\psi_i + q_j\psi_j^{\mathrm{T}}(\delta_j^2-\omega_i^2)\psi_j).$$

ii) 存在常数矩阵P_2和W使得$\varSigma_2<0$.

则存在一个基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6), 使得当$x_{\mathrm{a}}\in\alpha$时, 闭环系统(8)渐近稳定, 且相应观测器和控制器增益矩阵为$L=P_2^{-1}W$, $K(x_{\mathrm{a}})=Y(x_{\mathrm{a}})P_1^{-1}(x_1)$.

证 对系统(4), 给定$\tau,\varepsilon,\delta_i$和$\delta_j(j=3+i,\ i=1,2,3)$, 并定义多项式

$$\ell(x_1,v)=v^{\mathrm{T}}(P_1(x_1)-\tau I_n)v-\varXi(x_1,\vartheta). \tag{12}$$

将式(12)的前后两项对应分解为

$$\ell(x_1,v)=h^{\mathrm{T}}(x_1,v)(G_0-\sum_{i=1}^{3}p_iG_i)h(x_1,v), \tag{13}$$

其中: G_0和G_i为常数矩阵, $h(x_1,v)$是关于x_1和v的单项式向量.

由式(11a)是SOS、引理1和式(13), 可得

$$G_0-\sum_{i=1}^{3}p_iG_i\geqslant 0. \tag{14}$$

再根据引理3, 当$x_{\mathrm{a}}\in\alpha$时, 有$v^{\mathrm{T}}(P_1(x_1)-\tau I_n)v\geqslant 0$, 即$P_1(x_1)>0$. 同理, 由式(11b)是SOS、引理1和3, 可知当$x_{\mathrm{a}}\in\alpha$时, $\varSigma_1(x_{\mathrm{a}})<0$.

最后, 根据定理2和引理4, 易知存在一个基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6), 使得当$x_{\mathrm{a}}\in\alpha$时, 闭环系统(8)渐近稳定, 相应观测器和控制器的增益矩阵为$L=P_2^{-1}W$, $K(x_{\mathrm{a}})=Y(x_{\mathrm{a}})P_1^{-1}(x_1)$.

证毕.

注 2 上述定理的条件ii)也可转化为相应的SOS凸优化条件.

注 3 对于定理3, 基于降维观测器的非线性状态反馈存在条件可进一步减弱, 即对系统(4), 条件ii)自然满足, 故可去掉.

5 数值仿真(Numerical simulation)

以文[26]中的挠性卫星姿态系统为仿真实例, 为了设计方便, 仅取前2阶挠性模态(即$N=2$), 相关参数如下:

$$J=\begin{bmatrix}350 & 3 & 4\\ 3 & 280 & 10\\ 4 & 10 & 190\end{bmatrix},\ F_{\mathrm{s}}=\begin{bmatrix}6.45637 & -1.25619\\ 1.27814 & 0.91756\\ 2.15629 & -1.67264\end{bmatrix},$$

$$\xi=\begin{bmatrix}5.607 & 0\\ 0 & 8.62\end{bmatrix}\times 10^{-3},\ \varOmega=\begin{bmatrix}0.7681 & 0\\ 0 & 1.1038\end{bmatrix}.$$

考虑该卫星为实现某项任务需进行160°的姿态快速机动, 要完成的任务是从初始状态$\sigma_0=[-1.5157\ \ 4.5471\ \ -3.0314]^{\mathrm{T}}$和$\omega_0=[0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$机动到期望状态$\sigma_{\mathrm{d}}=[0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$和$\omega_{\mathrm{d}}=[0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

给定仿真参数$\tau=1\times10^{-6}$, $\varepsilon=1\times10^{-5}$, $p_i=q_i=q_j=1\times10^{-5}$, $\delta_i=5$和$\delta_j=1(j=3+i,\ i=1,2,3)$. 根据定理3, 分别采用SOSTOOLS和LMI工具箱进行求解, 可得到一个基于降维观测器的非线性状态反馈控制器, 相应观测器增益矩阵为

$$L=\begin{bmatrix}0&0&0&72.2876&53.9425&-19.9216\\0&0&0&21.7847&58.0738&-66.3071\\0&0&0&55.3492&39.8056&-12.9929\\0&0&0&0.4287&4.4714&-5.6309\end{bmatrix}.$$

鉴于篇幅限制, 只给出非线性状态反馈增益矩阵 $K(x_{\mathrm{a}})=(k_{ij}(x_{\mathrm{a}}))\in\mathbb{R}^{3\times10}$的第1列:

$$\begin{aligned}&k_{11}(x_{\mathrm{a}})=\\&-11.30+6\times10^{-3}\sigma_1+0.205\sigma_2-8.35\times10^{-2}\sigma_3-\\&3\times10^{-3}\omega_1-0.62\omega_2+0.36\omega_3+1.9\times10^{-2}\sigma_1\sigma_2+\\&3\times10^{-2}\sigma_1\sigma_3+2\times10^{-3}\sigma_1\omega_1+2\times10^{-2}\sigma_1\omega_2+\\&9.1\times10^{-2}\sigma_1\omega_3+5.7\times10^{-2}\sigma_2\sigma_3-11.3\sigma_1^2-\\&7.5\times10^{-3}\sigma_2\omega_1+0.2\sigma_2\omega_2-11.0\sigma_2^2-\\&1.61\times10^{-2}\sigma_2\omega_3+0.28\sigma_3\omega_3-10.93\sigma_3^2-\\&1.01\times10^{-2}\sigma_3\omega_1-1.62\times10^{-2}\sigma_3\omega_2-10.98\omega_1^2+\\&3.7\times10^{-2}\omega_1\omega_2+8.7\times10^{-2}\omega_1\omega_3-11.62\omega_2^2+\\&5.7\times10^{-2}\omega_2\omega_3-12.07\omega_3^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&k_{21}(x_{\mathrm{a}})=\\&-1.016-2.5\times10^{-2}\sigma_1-4.3\times10^{-4}\sigma_2+\\&1.02\sigma_3+0.51\omega_1+6.8\times10^{-2}\omega_2-0.503\sigma_1\sigma_2-\\&4.06\omega_3+2.3\times10^{-2}\sigma_1\sigma_3+1.44\times10^{-2}\sigma_1\omega_1-\\&0.17\sigma_1\omega_2+1.3\times10^{-3}\sigma_1\omega_3-9.4\times10^{-2}\sigma_2\omega_1-\\&0.96\sigma_1^2-0.17\sigma_2\sigma_3-1.1\times10^{-2}\sigma_2\omega_2-1.09\sigma_2^2+\\&9.2\times10^{-2}\sigma_2\omega_3+1.2\times10^{-2}\sigma_3\omega_1-\sigma_3^2-\\&1.31\times10^{-2}\sigma_3\omega_2-5.2\times10^{-3}\sigma_3\omega_3+0.41\omega_1\omega_2-\\&2.4\times10^{-2}\omega_1\omega_3-1.041\omega_1^2-1.00\omega_2^2-1.14\omega_3^2+\\&9.8\times10^{-3}\omega_2\omega_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&k_{31}(x_{\mathrm{a}})=\\&-1.1+9.9\times10^{-3}\sigma_1-1.20\sigma_2-0.29\omega_1-\\&4.6\times10^{-3}\sigma_3+4.24\omega_2-8.1\times10^{-2}\omega_3+\\&1.35\times10^{-2}\sigma_1\sigma_2-0.6\sigma_1\sigma_3-2.72\times10^{-2}\sigma_1\omega_1+\\&9.2\times10^{-3}\sigma_1\omega_2-0.22\sigma_1\omega_3-1.3\sigma_1^2+\\&2\times10^{-2}\sigma_2\omega_1-9.5\times10^{-2}\sigma_2\sigma_3-0.11\sigma_2\omega_2-\\&2.3\times10^{-2}\sigma_2\omega_3-1.34\sigma_2^2+2.21\times10^{-2}\sigma_3\omega_2-\\&0.15\sigma_3\omega_1-5.04\times10^{-2}\sigma_3\omega_3-1.54\sigma_3^2-\\&5.5\times10^{-2}\omega_1\omega_2-1.5\omega_1^2+0.9\omega_1\omega_3+\\&0.12\omega_2\omega_3-1.43\omega_2^2-1.42\omega_3^2.\end{aligned}$$

取状态初始值

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{cl0}}=[&-1.5157\ \ 4.5471\ \ -3.0314\ \ 0\ \ 0\\&0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ -1]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

相应闭环系统响应如图1−4所示.

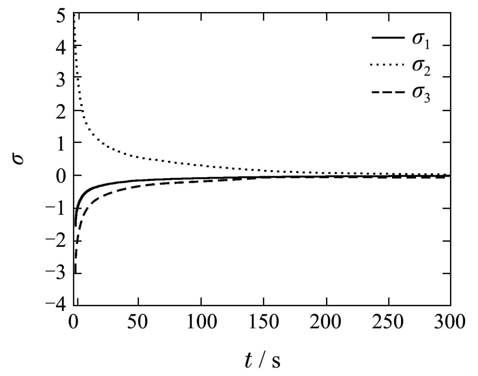

图 1　σ的响应曲线

Fig. 1　Response curve of σ

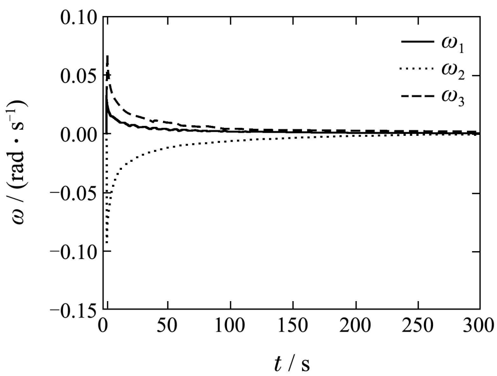

图 2　ω的响应曲线

Fig. 2　Response curve of ω

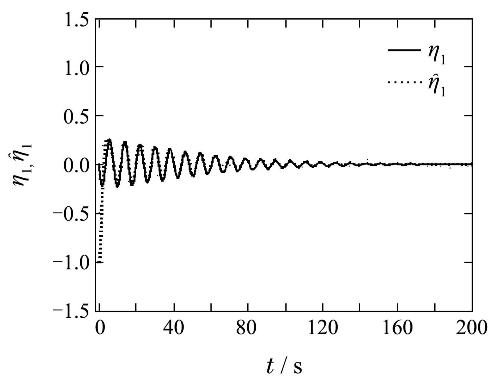

图 3　η_1和$\hat{\eta}_1$的响应曲线

Fig. 3　Response curves of η_1 and $\hat{\eta}_1$

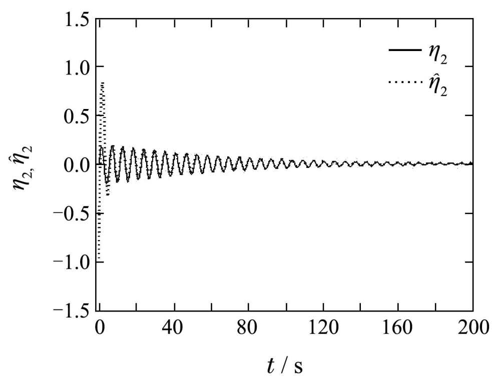

图 4　η_2和$\hat{\eta}_2$的响应曲线

Fig. 4　Response curves of η_2 and $\hat{\eta}_2$

从这些图可以看出, 文中方法设计的非线性镇定控制器能保证相应闭环系统渐近稳定, 在实现大角度姿态快速机动的同时有效抑制了挠性附件振动.

6 结论(Conclusions)

根据姿态系统结构特征, 通过证明挠性模态观测和状态反馈设计满足分离原理, 设计出基于降维观测器的非线性镇定控制器, 并降低了姿态控制设计算法的复杂性. 以此为基础, 采用SOS结合S–procedure理论, 给出挠性卫星非线性姿态系统的局部可镇定条件, 该条件可借助有效凸优化工具进行检验, 从而可构造出非线性姿态控制器的解析解. 仿真算例验证了该方法的正确性和可行性. 在本文工作基础上, 下一步可考虑挠性卫星姿态系统存在的不确定因素, 研究基于SOS的非线性鲁棒控制问题.

参考文献(References):

[1] DONG C Y, XU L J, CHEN Y, et al. Networked flexible spacecraft attitude maneuver based on adaptive fuzzy sliding mode control [J]. *Acta Astronautica*, 2009, 65(11/12): 1561 – 1570.

[2] 耿云海, 吴炜平, 马玉海. 神经网络补偿的挠性卫星敏捷姿态机动 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2012, 44(5): 31–35.
(GENG Yunhai, WU Weiping, MA Yuhai. Neural network compensation of flexible satellite rapid maneuver [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2012, 44(5): 31 – 35.)

[3] HU Q L, XIAO B. Intelligent proportional-derivative control for flexible spacecraft attitude stabilization with unknown input saturation [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2012, 23(1): 63 – 74.

[4] 王岩, 唐强, 陈兴林. 挠性卫星姿态快速稳定智能控制 [J]. 北京科技大学学报, 2012, 34(1): 85 – 89.
(WANG Yan, TANG Qiang, CHEN Xinglin. Intelligent control for attitude rapid stabilization of flexible satellites [J]. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2012, 34(1): 85 – 89.)

[5] SHAHRAVI M, KABGANIAN M, ALASTY A. Adaptive robust attitude control of a flexible spacecraft [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(6): 287 – 302.

[6] LEE K W, SINGH S N. L_1 adaptive control of flexible spacecraft despite disturbances [J]. *Acta Astronautica*, 2012, 80(11/12): 24 – 35.

[7] 胡庆雷, 马广富, 姜野, 等. 三轴稳定挠性卫星姿态机动时变滑模变结构和主动振动控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 122 – 126.
(HU Qinglei, MA Guangfu, JIANG Ye, et al. Variable structure control with time-varying sliding mode and vibration control for flexible satellite [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 122 – 126.)

[8] 胡庆雷, 刘亚秋, 马广富. 挠性航天器姿态机动的变结构主动振动抑制 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 329 – 336.
(HU Qinglei, LIU Yaqiu, MA Guangfu. Active vibration suppression in flexible spacecraft with mismatched uncertainty via variable structure control [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 329 – 336.)

[9] XU J, XIE L H, WANG Y Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1892 – 1897.

[10] NGUANG S K, SAAT S, KRUG M. Static output feedback controller design for uncertain polynomial systems: an iterative sum of squares approach [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(9): 1079 – 1084.

[11] ICHIHARA H. Optimal control for polynomial systems using matrix sum of squares relaxations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(5): 1048 – 1053.

[12] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, WU F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach [C] //*Proceedings of the 5th Asian Control Conference*. Melbourne: IEEE, 2004: 157 – 165.

[13] MA H J, YANG G H. FTC synthesis for nonlinear systems: sum of squares optimization approach [C] //*Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans: IEEE, 2007: 2645 – 2650.

[14] ZENG M, WANG J, YU Z W, et al. Induced L_2 norm control for missile early-warning satellite attitude maneuver [C] //*Proceedings of the 3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics*. Harbin: IEEE, 2010: 610 – 615.

[15] 陈琦, 蔡宗平, 马清亮, 等. 一种基于平方和优化的飞行器大角度机动镇定控制器设计方法 [J]. 弹箭与制导学报, 2011, 31(6): 47 – 50.
(CHEN Qi, CAI Zongping, MA Qingliang, et al. A new approach for stabilizing controller design of spacecraft large angle attitude maneuver based on sum of squares optimization [J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2011, 31(6): 47 – 50.)

[16] PRAJNA S, PARRILO P A, RANTZER A. Nonlinear control synthesis by convex optimization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(2): 310 – 314.

[17] NARENDRA G, LUIS R. Control of large angle attitude maneuvers for rigid bodies using sum of squares [C] //*Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York: IEEE, 2007: 3156 – 3161.

[18] NARENDRA G. Switched control of satellites for global stabilization and local performance: a sum of squares approach [C] //*Proceedings of the 2008 American Control Conference*. Washington: IEEE, 2008: 2987 – 2992.

[19] ZHENG Q, WU F. Nonlinear H_∞ control design with axisymmetric spacecraft control [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(3): 850 – 859.

[20] ZHENG Q, WU F. Generalized nonlinear H_∞ synthesis condition with its numerically efficient solution [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(18): 2079 – 2100.

[21] 王佳, 曾鸣, 苏宝库. 基于平方和的卫星大角度姿态机动非线性H_∞控制 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(5): 1024 – 1028.
(WANG Jia, ZENG Ming, SU Baoku. Nonlinear H_∞ control of large angle attitude maneuvers for satellites using sum of squares [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(5): 1024 – 1028.)

[22] WANG J, ZENG M, YU Z W, et al. Adaptive back-stepping LPV control of satellite attitude maneuvers with sum of squares [C] //*Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Jinan: IEEE, 2010: 1747 – 1752.

[23] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, SEILER P, et al. SOSTOOLS: sum of squares optimization toolbox for matlab: user's guide version 2.0 [DB/OL]. *available: http://www.cds.caltech.edu/sostool/*, March 31, 2012.

[24] CHESI G, GARULLI A, TESI A, et al. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

[25] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control–Linear Matrix Inequality Approach* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[26] GENNARO S D. Output stabilization of flexible spacecraft with active vibration suppression [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(3): 747 – 759.

作者简介:

周燕茹 (1986–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、姿态控制, E-mail: zhouyr1986@126.com;

黄文超 (1985–), 男, 讲师, 目前研究方向为鲁棒控制、非线性控制, E-mail: ehwenc@gmail.com;

曾建平 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、非线性控制、复杂系统控制, E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.