

# 基于亚像素位移的超分辨率图像重建算法

张东晓<sup>1,2</sup> 鲁林<sup>1</sup> 李翠华<sup>1</sup> 金泰松<sup>1</sup>

**摘要** 针对多帧图像超分辨率重建问题, 利用一阶泰勒展式, 在亚像素级上对图像退化过程进行建模, 并建立极小化能量函数, 选择 Graph-cut 算法进行能量极小化求解. 为了验证本文算法的有效性, 采用模拟图像退化过程和直接用相机拍摄两种方式获得低分辨率图像序列. 从  $4 \times 4$  倍重建结果的比较来看, 本文算法不仅对模拟退化过程产生的低分辨率图像序列有效, 而且在提高真实低分辨率图像的分辨能力方面也有很好的效果. 此外, 实验结果表明本文算法对噪声有较好的抗干扰能力.

**关键词** 超分辨率, 亚像素, 图割,  $\alpha$ -expansion, 图像退化模型

**引用格式** 张东晓, 鲁林, 李翠华, 金泰松. 基于亚像素位移的超分辨率图像重建算法. 自动化学报, 2014, 40(12): 2851–2861

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2014.02851

## Super-resolution Image Reconstruction Algorithm Based on Sub-pixel Shift

ZHANG Dong-Xiao<sup>1,2</sup> LU Lin<sup>1</sup> LI Cui-Hua<sup>1</sup> JIN Tai-Song<sup>1</sup>

**Abstract** This paper studies the problem of multi-frame image super-resolution reconstruction. The process of image degradation is modeled by using the first-order Taylor expansion based on sub-pixel. Then the energy minimization function is established and the graph-cut algorithm is chosen to solve the energy minimization. In order to confirm this algorithm, we obtain the low resolution images by two ways: simulating image degradation and taking photos. By comparing the  $4 \times 4$  times reconstruction results, it is shown that this algorithm is valid not only for simulation of low resolution images but also for real images. Besides, experimental results show that this algorithm possesses good anti-interference ability of noise.

**Key words** Super-resolution, sub-pixel, graph-cut,  $\alpha$ -expansion, image degradation model

**Citation** Zhang Dong-Xiao, Lu Lin, Li Cui-Hua, Jin Tai-Song. Super-resolution image reconstruction algorithm based on sub-pixel shift. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(12): 2851–2861

目前, 医学、安全、娱乐等各个领域对高分辨率图像的需求越来越大. 如医生希望通过高分辨率 CT 图像辨识病症; 公安部门希望通过高分辨率监控图像辨识嫌疑人身份; 娱乐商家希望通过高分辨率视

频, 让观众获得更加逼真、细腻的视觉效果. 提高分辨率最直接的方法是增加数字图像采集系统的硬件分辨率. 但是高成本和技术瓶颈往往让这一方法难以实现. 于是, 如何在现有硬件条件下获得高分辨率图像便成为人们广泛关心的问题. 超分辨率重建技术恰为这一问题提供了有效的解决途径.

超分辨率重建算法大致可以分为两种: 单帧重建和多帧重建. 单帧重建<sup>[1–6]</sup> 主要针对单帧低分辨率图像, 利用预先训练的图像库, 通过学习的方式重建一幅较高分辨率图像, 以期在图像放大若干倍后, 依然保持低分辨率图像的细节信息. 多帧重建主要利用低分辨率图像序列间的互补信息进行重建, 获得一幅较高分辨率的图像, 以分辨原本无法辨识的细节信息. 本文侧重研究细节辨识能力的提升, 只对多帧重建展开讨论.

目前多帧重建研究主要在以下几种框架下展开: 正则化框架<sup>[7–10]</sup>、最大后验估计 (Maximum a posteriori, MAP) 框架<sup>[11–15]</sup>、小波框架<sup>[16–17]</sup>、POCS (Projection onto convex sets)<sup>[18–19]</sup>, 等. 无论在何种框架下讨论, 保证超分辨率重建这个逆问题的良态 (Well condition)<sup>[20]</sup> 性都是必要的. 如文献 [11] 在 MAP 框架下, 对图像进行马尔科夫随机场建模,

收稿日期 2013-02-04 录用日期 2014-09-19

Manuscript received February 4, 2013; accepted September 19, 2014

国家自然科学基金 (61373077), 国防基础科研计划 (B0110155), 国防科技重点实验室基金 (9140C30211ZS8), 高等学校博士学科点专项科研基金 (20110121110020), 福建省自然科学基金 (2011J01365), 福建省重点项目 (2014H0034), 航空科学基金 (20125168001), 黄慧贞集美大学学科建设基金 (ZC2014010) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61373077), National Defense Basic Scientific Research Program of China (B0110155), National Defense Science and Technology Key Laboratory Foundation (9140C30211ZS8), Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher and Education of China (20110121110020), Natural Science Foundation of Fujian Province (2011J01365), Key Program of Fujian Province (2014H0034), Aeronautical Science Foundation of China (20125168001), and Huang Hui-Zhen Discipline Construction Fund of Jimei University (ZC2014010)

本文责任编辑 查红彬

Recommended by Associate Editor ZHA Hong-Bin

1. 厦门大学信息科学与技术学院 厦门 361005 2. 集美大学理学院 厦门 361021

1. School of Information Science and Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005 2. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021

并提出高分辨率像素在低分辨率坐标系中的“影响范围”，以满足良态性要求，利用图割算法进行  $4 \times 4$  倍重建，得到较理想的效果。

文献 [21] 指出，在设计超分辨率重建算法前，首先需要建立准确的数据退化模型，这对有效的超分辨率重建至关重要。在考虑图像退化模型时，需要建立高分辨率像素与低分辨率像素的对应关系。这种关系的建立必然无法回避高、低分辨率坐标系中像素位置与亚像素位置之间的对应问题。现有超分辨率重建方法大多采取近似取整的方式解决这一问题。个别研究将注意力放在如何降低亚像素对超分辨率重建的影响上，如文献 [22–23]。也有研究侧重于在硬件上利用亚像素信息，进行超分辨率重建，如文献 [24–25]。以取整的方式消除亚像素和通过算法降低亚像素的影响都试图抛弃亚像素信息，而将亚像素用于硬件又与“在现有硬件条件下获取高分辨率图像”的宗旨相悖。因此，如何摆脱硬件，并有效地利用亚像素信息，便成为本文关注的重点。

为了充分利用亚像素信息，受文献 [16] 的启发，本文对图像退化模型进行泰勒一阶近似，在文献 [11] 的基础上，重新确定极小化能量函数，并用 Graph-cut 算法进行求解。

### 1 图像退化模型

设  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  为现有硬件设备采集的  $n$  帧低分辨率图像， $f$  为待重建的高分辨率图像。如图 1 所示，图像的退化过程可以描述为：图 1(a) 中高分辨率图像经过几何变换  $T_k$  后变为图 1(b) 中结果，然后对图 1(a) 和 (b) 分别进行模糊（点扩散函数  $H_k$ ）、退化 ( $D$ )、加噪声得到图 1(c) 和 (d)。

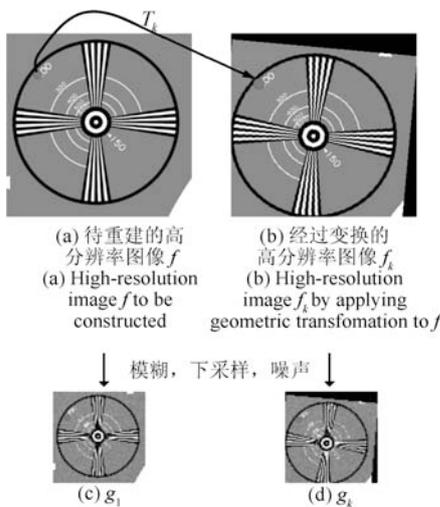


图 1 图像退化过程

Fig. 1 Image degradation process

与文献 [11] 一致，将图像退化模型表示为

$$g_k = DH_k T_k f + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中， $T_k$  为几何变换， $H_k$  为点扩散函数， $D$  为下采样算子， $\eta_k$  是噪声信号。本文考虑  $4 \times 4$  倍重建，所以下采样算子  $D$  为  $4 : 1$  采样。

为了获得更精确的退化模型，有必要研究高分辨率坐标系和低分辨率坐标系之间的对应关系。为此，规定图像左上角为坐标原点，向右为  $x$  轴正方向，向下为  $y$  轴正方向。图 1(a), (b), (d) 中圆点所示像素在对应坐标系中的位置如图 2(a), (b), (d) 所示。图 2(d) 是图 1(d) 中圆点所示像素在低分辨率坐标系中的位置关系，其坐标为  $(s, t)$ ；图 2(b) 是图 1(b) 中圆点所示像素在高分辨率坐标系中的位置关系，其坐标为  $(x', y')$ ，经过下采样以后， $(x', y')$  变为  $(s, t)$ ，即  $(s, t)$  的灰度值由点扩散函数  $H_k$  在  $(x', y')$  处的模糊确定；图 2(a) 是图 1(a) 中圆点所示像素在高分辨率坐标系中的位置关系，其坐标为  $(x + e_x, y + e_y)$ ，经过变换  $f_k = T_k f$  后，变为  $(x', y')$ ；图 2(c) 是图 2(a) 中方框部分的局部放大图，在  $x$  和  $y$  方向上的误差分别为  $e_x$  和  $e_y$ 。此外，由于点扩散函数  $H_k$  并不改变坐标的位置关系，所以从图 2(b) 到 (d) 的过程中，并未体现  $H_k$ 。

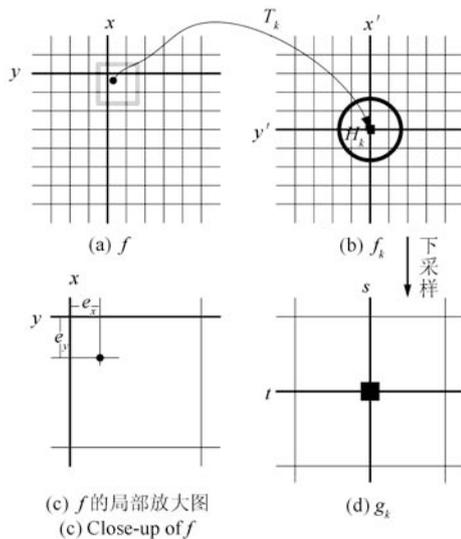


图 2 高、低分辨率坐标系的对应关系

Fig. 2 Correspondence between high and low resolution coordinate systems

因此，准确的退化过程可描述为

$$g_k(s, t) = H_k T_k f(x + e_x, y + e_y) + \eta_k \quad (2)$$

其中， $(s, t) = DT_k(x + e_x, y + e_y)$ 。这里低分辨率网格中  $(s, t)$  位置处的灰度值并非只由高分辨率网格中  $(x + e_x, y + e_y)$  位置处的灰度值决定，而是由该

位置以及周围像素共同确定, 其确定方式取决于点扩散函数  $H_k$ . 考虑到低分辨率图像的采集过程是对同一场景的整体采集, 不妨假设变换  $T_k$  都是整体变换. 此外, 假设点扩散函数  $H_k$  具有平移不变性, 则

$$H_k f_k(x', y') = H_k f(x + e_x, y + e_y)$$

考虑到  $f_k = T_k f$ , 从而

$$g_k(s, t) = H_k f(x + e_x, y + e_y) + \eta_k \quad (3)$$

由于  $|e_x|$  和  $|e_y|$  不会超过半个像素单位, 通常按照四舍五入将以上模型近似为

$$g_k(s, t) \approx H_k f(x, y) + \eta_k \quad (4)$$

假设在图像退化过程中, 点扩散函数均保持不变, 用滤波器  $h$  近似代替, 则由式 (3) 和式 (4) 可得到空域中的两种图像退化模型:

$$g_k(s, t) = h * f(x + e_x, y + e_y) + \eta_k \quad (5)$$

$$g_k(s, t) \approx h * f(x, y) + \eta_k \quad (6)$$

其中, “\*” 为卷积,  $(s, t) = DT_k(x + e_x, y + e_y) \approx DT_k(x, y)$ . 式 (5) 保留亚像素信息, 式 (6) 以四舍五入近似, 忽略该信息.

在超分辨率重建过程中, 文献 [7, 11–14] 均采用式 (6) 作为图像退化模型, 直接丢掉亚像素信息, 这势必影响重建模型的精度. 本文尝试基于退化模型 (5), 建立基于亚像素位移的超分辨率重建模型, 以提高重建模型的精度.

## 2 超分辨率重建的能量函数

### 2.1 新能量函数

为了满足良态性<sup>[20]</sup> 要求, 文献 [11] 引入影响范围的概念. 针对图 2(a) 中的像素  $p(x, y)$  和图 2(d) 中像素  $p'(s, t)$ , 如果  $p$  在低分辨率坐标系中的投影  $p'' = DT_k p$  在  $p'$  的影响范围内, 那么设定  $p'$  和  $p$  满足式 (6), 否则不予建立二者的联系. 影响范围由以下二值函数确定:

$$\alpha_k(p, p') = \begin{cases} 1, & d(p', p'') < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中,  $d(\cdot)$  为欧氏距离,  $\theta$  为阈值, 在实际操作过程中将  $\alpha_k$  归一化使  $\sum_k \alpha_k = 1$ . 在 MRF 中建立极小化能量函数:

$$E(f|g) = \sum_{p \in S} \sum_{k=1} \alpha_k(p, p') (h * f(p) - g_k(p'))^2 + \lambda \sum_{p, q \in N} V_{p, q}(f(p), f(q)) \quad (7)$$

其中, 第一项为似然项, 由图像退化模型确定, 第二项为平滑先验项, 设为  $V_{p, q}(f(p), f(q)) = \min(\Theta, |f(p) - f(q)|)$ ,  $\Theta$  为阈值.  $\lambda$  为正常数, 以调节似然项和先验项的比重. 实验结果表明,  $\lambda$  不宜过大, 否则重建结果会出现过度平滑.

以上能量函数基于退化模型 (6), 直接丢弃了亚像素的信息. 本文将保留亚像素信息, 为此将退化模型 (5) 中的卷积做一阶泰勒近似,

$$h * f(x + e_x, y + e_y) \approx h * f(x, y) + e_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (h * f)(x, y) + e_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (h * f)(x, y) \quad (8)$$

根据卷积的性质,

$$\frac{\partial}{\partial x} (h * f) = \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) * f, \quad \frac{\partial}{\partial y} (h * f) = \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) * f \quad (9)$$

记  $\frac{\partial h}{\partial x} = h_x$ ,  $\frac{\partial h}{\partial y} = h_y$ , 则退化模型 (5) 近似为

$$g_k(s, t) \approx (h + e_x \cdot h_x + e_y \cdot h_y) * f(x, y) + \eta_k \quad (10)$$

简化表示, 令  $h^* = h + e_x \cdot h_x + e_y \cdot h_y$ ,  $f_p = f(p)$ ,  $f_q = f(q)$ , 则可得到新能量函数:

$$E(f|g) = \sum_{p \in S} \sum_{k=1} \alpha_k(p, p') (h^* * f(p) - g_k(p'))^2 + \lambda \sum_{p, q \in N} V_{p, q}(f_p, f_q) \quad (11)$$

与退化模型 (6) 直接舍弃亚像素信息不同, 新退化模型 (10) 利用一阶泰勒展式保留了亚像素信息, 具有更高的精度. 本文所提能量函数 (11) 正是利用了较高精度的退化模型 (10), 因此, 它比文献 [11] 的能量函数 (7) 具有更高的精度.

### 2.2 重写能量函数

与文献 [11] 一致, 本文仍采用 Graph-cut 算法求解能量极小化问题, 因此, 需要将能量函数写为如下标准形式<sup>[26]</sup>:

$$E(f) = \sum_p D_p(f_p) + \sum_{p, q \in N} V_{p, q}(f_p, f_q) \quad (12)$$

其中,  $f$  为赋值给像素点的灰度值.  $\sum_p D_p(f_p)$  是数据项, 表示将  $f_p$  赋值给  $p$  所消耗的能量.  $\sum_{p, q \in N} V_{p, q}(f_p, f_q)$  是先验项, 表示将  $f_p$  和  $f_q$  分别赋值给相邻节点  $p, q$  所消耗的能量.

受滤波器  $h^*$  的影响, 式 (11) 中的第一项涉及到相邻像素间的运算, 还不满足式 (12) 中数据项的要求. 为此, 需要重写式 (11). 根据卷积运算规

则, 可设  $h^* * f(p) = \omega_{pp}^* f_p + \sum_{q \in N_p} \omega_{pq}^* f_q$ . 注意到  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ , 能量函数 (11) 的第一项可写为

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in S} \sum_{k=1}^n \alpha_k (h^* * f(p) - g_k(p'))^2 = \\ & \sum_{p \in S} \sum_{k=1}^n \alpha_k (\omega_{pp}^* f_p - g_k(p'))^2 + \\ & \sum_{p \in S} \sum_{q \in N_p} \sum_{k=1}^n 2\alpha_k (\omega_{pp}^* f_p - g_k(p')) \omega_{pq}^* f_q + \\ & \sum_{p \in S} \left( \sum_{q \in N_p} \omega_{pq}^* f_q \right)^2 \end{aligned}$$

令  $D_p^*(f_p) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\omega_{pp}^* f_p - g_k(p'))^2$ ,  $\Delta_p(k) = \omega_{pp}^* f_p - g_k(p')$ , 则能量函数 (11) 可重写为

$$\begin{aligned} E(f|g) = & \sum_{p \in S} D_p^*(f_p) + \\ & \sum_{p \in S} \sum_{q \in N_p} \sum_{k=1}^n 2\alpha_k \Delta_p(k) \omega_{pq}^* f_q + \\ & \sum_{p \in S} \left( \sum_{q \in N_p} \omega_{pq}^* f_q \right)^2 + \lambda \sum_{p,q \in N} V_{p,q}(f_p, f_q) \end{aligned} \quad (13)$$

上式已经基本具备 Graph-cut 能量函数的标准形式, 但是尚需进一步处理才能使用 Graph-cut 算法.

### 3 能量函数的极小化

针对式 (12) 这种不连续的能量函数, 一种快速、有效的极小化算法要数 Expansion move<sup>[27-28]</sup>. 文献 [26] 对该算法所能求解的能量函数展开研究, 给出能量函数的分类, 其中,  $\mathcal{F}^2$  类的能量函数表示为

$$E = \sum_i E^i(x_i) + \sum_{i < j} E^{i,j}(x_i, x_j) \quad (14)$$

其中,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ . 该能量函数可以图表示 (Graph-representable), 从而可以利用  $\alpha$ -expansion 求解, 当且仅当  $E^{i,j}$  满足如下正则性条件 (Regularity condition):

$$E^{i,j}(0, 0) + E^{i,j}(1, 1) \leq E^{i,j}(0, 1) + E^{i,j}(1, 0) \quad (15)$$

在 Expansion move 算法过程中, 一次  $\alpha$ -expansion 旨在确定哪些像素的灰度值为  $\alpha$  时, 可使能量函数最小. 如果将图像的像素位置标记为  $1, 2, \dots, n$ , 用  $x_i = 1$  表示第  $i$  个像素的灰度值为  $\alpha$ , 而用

$x_i = 0$  表示第  $i$  个像素的灰度值保持不变, 那么,  $\alpha$ -expansion 问题就变为二值能量问题 (14).

#### 3.1 能量函数的近似

超分辨率重建的新能量函数 (13) 不满足式 (14) 的要求, 为此, 只保留  $(\sum_{q \in N_p} \omega_{pq}^* f_q)^2$  的平方项, 则式 (13) 中第三项近似为

$$\sum_{p \in S} \left( \sum_{q \in N_p} \omega_{pq}^* f_q \right)^2 \approx \sum_{p \in S} \sum_{q \in N_p} (\omega_{pq}^* f_q)^2$$

令

$$\phi_{pq}(f_p, f_q) = \sum_{k=1}^n 2\alpha_k \Delta_p(k) \omega_{pq}^* f_q + (\omega_{pq}^* f_q)^2$$

则式 (13) 的第二、三项可以写为

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in S} \sum_{q \in N_p} \sum_{k=1}^n 2\alpha_k \Delta_p(k) \omega_{pq}^* f_q + \sum_{p \in S} \left( \sum_{q \in N_p} \omega_{pq}^* f_q \right)^2 \approx \\ & \sum_{p \in S} \sum_{q \in N_p} \phi_{pq}(f_p, f_q) = \sum_{p,q \in N} \phi_{pq}(f_p, f_q) \end{aligned}$$

从而由式 (13) 可得近似的能量函数为

$$\begin{aligned} E(f|g) = & \sum_{p \in S} D_p^*(f_p) + \\ & \sum_{p,q \in N} (\phi_{pq}(f_p, f_q) + \lambda V_{p,q}(f_p, f_q)) \end{aligned} \quad (16)$$

#### 3.2 重新考虑邻域关系

式 (16) 中第二项涉及的两个相邻像素并没有顺序关系, 究其原因在于像素的相邻是相互的, 即  $q \in N_p$  和  $p \in N_q$  同时成立. 这显然与  $\mathcal{F}^2$  类能量函数 (14) 的第二项  $i < j$  的要求相悖.

为此, 考虑图 3 所示的新邻域关系: 图 3(a) 为针对 8 邻域系统的新邻域关系; 图 3(b) 为针对 4 邻域系统的新邻域关系, 与像素  $p$  相邻的位置用星号表示.

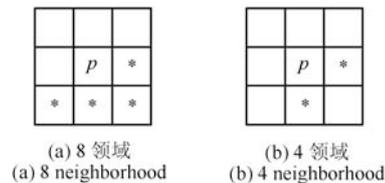


图 3 图像的新邻域系统  $N^*$

Fig. 3 Image new neighborhood systems  $N^*$

用  $q \in N_p^*$  表示  $q$  在  $p$  的新邻域内, 显然  $q \in N_p^*$  与  $p \in N_q^*$  不能同时成立. 注意到  $V_{p,q}(f_p, f_q) = V_{q,p}(f_q, f_p)$ , 那么能量函数 (16) 可

以重写为

$$E(f|g) = \sum_{p \in S} D_p^*(f_p) + \sum_{p \in S} \left\{ \sum_{q \in N_p^*} \phi_{pq}^*(f_p, f_q) + \lambda' \sum_{q \in N_p^*} V_{p,q}(f_p, f_q) \right\} \quad (17)$$

其中,  $\lambda' = 2\lambda$  且  $\phi_{pq}^*(f_p, f_q) = \phi_{pq}(f_p, f_q) + \phi_{qp}(f_q, f_p)$ . 如果令

$$\begin{aligned} E^i(0) &= D_p^*(f_p), E^i(1) = D_p^*(\alpha) \\ E^{i,j}(0,0) &= \phi_{pq}^*(f_p, f_q) + \lambda' V_{p,q}(f_p, f_q) \\ E^{i,j}(0,1) &= \phi_{pq}^*(f_p, \alpha) + \lambda' V_{p,q}(f_p, \alpha) \\ E^{i,j}(1,0) &= \phi_{pq}^*(\alpha, f_q) + \lambda' V_{p,q}(\alpha, f_q) \\ E^{i,j}(1,1) &= \phi_{pq}^*(\alpha, \alpha) + \lambda' V_{p,q}(\alpha, \alpha) \end{aligned} \quad (18)$$

那么式 (17) 便是二值能量函数 (14). 至此, 式 (17) 已经完全具有  $\mathcal{F}^2$  类能量函数的形式 (14).

### 3.3 满足正则性条件 (Regularity condition)

尽管新能量函数 (17) 已经是  $\mathcal{F}^2$  类能量函数, 但是尚需满足正则性条件 (Regularity condition), 才能利用  $\alpha$ -expansion 算法进行极小化求解. 由  $V_{p,q}$  的定义可知, 下式显然成立:

$$\begin{aligned} \lambda' V_{p,q}(f_p, f_q) + \lambda' V_{p,q}(\alpha, \alpha) &\leq \\ \lambda' V_{p,q}(f_p, \alpha) + \lambda' V_{p,q}(\alpha, f_q) & \end{aligned}$$

由式 (18) 可知, 欲满足正则性条件 (15), 只需  $\phi_{pq}^*(f_p, f_q)$  满足如下条件即可,

$$\phi_{pq}^*(f_p, f_q) + \phi_{pq}^*(\alpha, \alpha) \leq \phi_{pq}^*(f_p, \alpha) + \phi_{pq}^*(\alpha, f_q)$$

即

$$\phi_{pq}^*(f_p, f_q) + \phi_{pq}^*(\alpha, \alpha) - \phi_{pq}^*(f_p, \alpha) - \phi_{pq}^*(\alpha, f_q) \leq 0$$

注意到  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ , 经过化简得到:

$$\begin{aligned} \phi_{pq}^*(f_p, f_q) + \phi_{pq}^*(\alpha, \alpha) - \phi_{pq}^*(f_p, \alpha) - \phi_{pq}^*(\alpha, f_q) &= \\ 2(\omega_{pp}^* \omega_{pq}^* + \omega_{qq}^* \omega_{qp}^*)(\alpha - f_q)(\alpha - f_p) & \end{aligned}$$

留意简化过程, 不难发现上式中  $f_p$  和  $f_q$  分别来源于  $\Delta_p(k) = \omega_{pp}^* f_p - g_k(p')$  和  $\Delta_q(k) = \omega_{qq}^* f_q - g_k(q')$ . 在一次  $\alpha$ -expansion 过程中, 由于算法遍历所有 Label, 不可能保证  $(\alpha - f_q)(\alpha - f_p) \leq 0$  恒成立. 为此需要对  $\Delta_p(k) = \omega_{pp}^* f_p - g_k(p')$  近似. 由以上讨论, 只有将  $\Delta_p(k)$  近似为  $\Delta_p(k) = \omega_{pp}^* \alpha - g_k(p')$ , 才能在每次  $\alpha$ -expansion 中保证正则性条件 (15) 成立.

### 3.4 点扩散函数 (PSF) 的近似

高斯点扩散函数具有空间不变性的良好性质, 满足退化模型 (5) 的要求, 本文采用高斯点扩散函数模拟图像退化过程.

二维滤波器可以由一维滤波器的克罗内克积 (Kronecker product) 构造, 所以只需确定一维高斯滤波器和导数滤波器. 将高斯函数  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  和导函数  $d(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x-\mu)$  在  $\mu = 0$  处离散, 将离散结果分别表示为行向量  $p$  和  $d$ . 则高斯点扩散函数的滤波器和导数滤波器分别由如下克罗内克积构造:

$$h = p \otimes p^T, \quad h_x = p^T \otimes d, \quad h_y = p \otimes d^T$$

为了使滤波器中心落在像素位置, 通常选用奇数点离散. 相比  $3 \times 3$  滤波器, 使用  $5 \times 5$  滤波器在计算上的开销很大, 但在重建效果上并没有很多改善, 甚至会使图像整体模糊, 细节辨识能力降低, 所以在具体重建过程中, 我们选用三点离散方式, 即  $3 \times 3$  滤波器.

### 3.5 亚像素位移的确定

图像退化模型 (1) 中的几何变换  $T_k$  通常需由图像配准技术确定, 而图像配准本身又是一个病态问题, 也是一个极具挑战性的课题, 限于本文主要讨论超分辨率图像重建算法, 所以类似于文献 [11], 我们采用一种比较经典的多层次运动估计算法<sup>[29]</sup> 进行图像配准. 当然也可以使用其他比较新的配准技术, 这样可能获得更好的重建效果. 需要注意的是, 利用配准技术只能直接获取各低分辨率图像相对于参考帧的几何变换信息, 至于高分辨率图像之间的几何变换, 尚需根据重建倍数确定.

如图 2 所示, 在从高分辨率网格到低分辨率网格的投影过程中, 会产生亚像素级上的偏差  $e_x$  和  $e_y$ , 该偏差可以利用几何变换  $T_k$  求得. 假设从待重建的高分辨率图像  $f$  到第  $k$  帧低分辨率图像对应的高分辨率图像的变换为  $T_k$ , 则  $f$  中  $(x, y)$  位置处相对于第  $k$  帧的亚像素位移由下式确定:

$$\begin{pmatrix} e_x^{(k)} \\ e_y^{(k)} \end{pmatrix} = T_k^{-1} I T_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

其中,  $e_x^{(k)}$  和  $e_y^{(k)}$  分别表示水平和垂直方向上的亚像素位移,  $I$  为强制取整算子. 显然对于  $k = 1$  来说, 在任意像素处  $e_x^{(1)} = 0$  和  $e_y^{(1)} = 0$ .

亚像素位移的确定依赖于低分辨率图像间的精确配准, 在更精确的配准条件下能够获得更理想的重建效果. 不过, 从第 4.2 节的对比实验来看, 即使在一般的配准技术下, 引入亚像素位移仍然能够获

得较理想的重建效果, 另一方面也说明本文算法对配准误差具有较好的鲁棒性.

### 3.6 算法实现流程

综上所述, 本文考虑了图像退化模型的一阶泰勒展式, 以此为基础确立了基于亚像素位移的能量函数, 并选用 Graph-cut 算法进行极小化求解. 算法流程如图 4 所示.

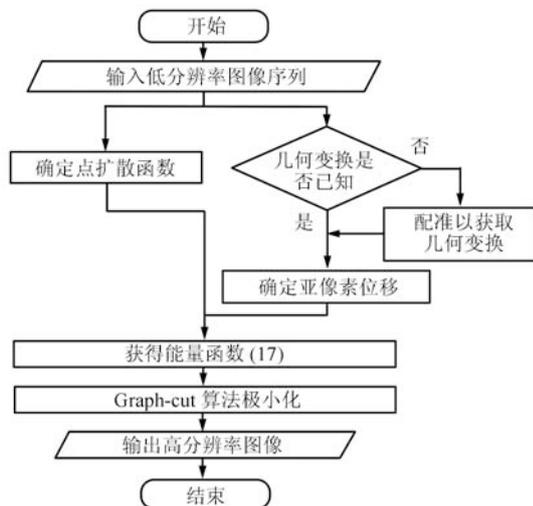


图 4 本文所提算法的流程图

Fig. 4 Flowchart of the proposed algorithm

## 4 实验结果

本文从两个方面给出实验结果. 第一部分模拟图像退化过程, 获取低分辨率图像序列, 然后进行重建, 同时考虑算法对噪声的抗干扰能力. 第二部分针对真实低分辨率图像序列 (数据库下载和自行采集) 进行重建, 并与文献 [11, 16] 算法所得结果进行比较. 文献 [16] 算法中的参数统一设置为  $\mu_1 = 0.05$ ,  $\mu_2 = 0.01$ , 迭代次数为 5, 该算法的重建倍数为  $2 \times 2$ , 故需要两次重建. 文献 [11] 算法中的参数统一设置为  $\lambda = 0.6$ ,  $\theta = 0.45$ ,  $\Theta = 8$ . 除了噪声的

抗干扰实验, 本文算法的参数也如此设置. 此外, 模型求解过程中, 使用了由 Yuri Boykov 等提供的代码<sup>1</sup>.

在算法效率方面, 与文献 [11] 相比, 本文所提算法只在确定亚像素位移时需要额外的开销, 而这个时间与整个重建用时相比可以忽略不计. 因此在算法执行上, 本文算法与文献 [11] 算法的用时几乎相同.

### 4.1 模拟退化过程获得低分辨率图像

#### 4.1.1 与现有算法比较

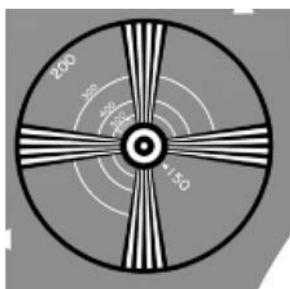
本组实验模拟图像退化过程获得低分辨率图像序列. 退化过程为: 将高分辨率源图 (图 5(a) 和图 6(a)) 做退化处理, 得到 32 帧低分辨率图像. 退化过程中的变换以随机方式产生, 最大平移量为 16, 最大旋转角度为  $\pi/32$ , 下采样倍率为 4:1, 无噪声. 重建结果如图 5 和 6 所示.

分析图 5, 由图 5(b) 可以看出, 每帧低分辨率图像的细节信息都严重丢失, 图像上的数字无法辨识. 为了说明这一点, 随机选取一帧低分辨率图像进行双三次插值, 结果如图 5(c) 所示. 图 5(d)~(f) 分别是用文献 [16]、[11] 和本文算法所得结果. 图 5(d) 和 (e) 能够重建出部分细节. 但比较起来, 图 5(f) 更有效地补充了低分辨率图像中原本丢失的细节信息, 比如左上角的数字“200”和中间的“150”.

分析图 6, 本文算法和文献 [11] 都可重建出更多的细节信息, 优于文献 [16]. 但是文献 [11] 在重建过程中, 引入了错误信息, 这一点从图 6(d) 的右侧 (数字 9 和 6 之间) 可以看到.

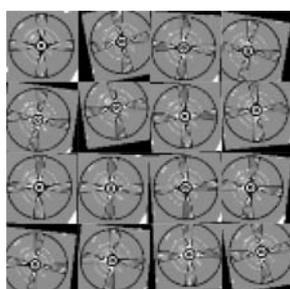
#### 4.1.2 考虑噪声的影响

本组实验验证本文算法对噪声的抗干扰能力. 在图像退化过程中加入不同程度的高斯白噪声. 为了处理方便, 将图像灰度值归一化到 [0, 1] 区间, 然后加入高斯白噪声, 这里用方差来刻画噪声的程度. 重建参数统一为  $\lambda = 0.01$ ,  $\theta = 0.45$ ,  $\Theta = 8$ .



(a) 高分辨率源图 (300 × 300)

(a) High resolution source image (300 × 300)



(b) 32 帧低分辨率图像中的 16 帧

(b) 16 low resolution images out of 32



(c) 某帧低分辨率图像的双三次插值

(c) Bicubic interpolation of some LR image

<sup>1</sup><http://pub.ist.ac.at/~vnk/software.html>

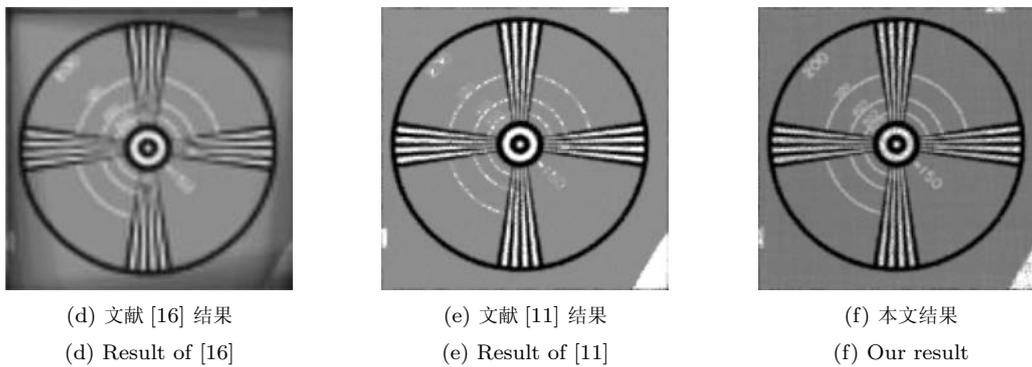


图 5 模拟退化过程的超分辨率重建结果

Fig. 5 Super-resolution reconstruction results by simulating degradation process

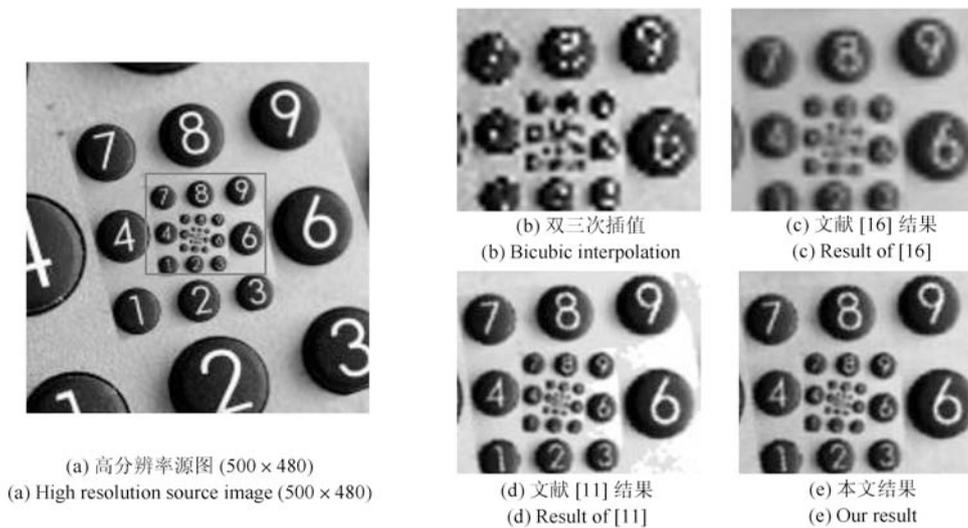


图 6 模拟退化过程的超分辨率重建结果截图 (对应于图 6(a) 中方框部分)

Fig. 6 Close-ups (corresponding to square of Fig 6(a)) of super-resolution reconstruction results by simulating degradation process

在将图 7(a) 进行退化时, 分别加入方差为 0.1 ~ 0.9 等差变化的 9 种噪声, 每种噪声下获得 32 帧低分辨率图像, 每组低分辨率噪声图像的参考帧如图 7(b) 所示. 针对无噪声和不同程度噪声, 分别进行重建, 重建结果的截图 (对应于图 7(a) 左上侧的方框部分) 如图 8 第二行所示. 图 8 第一行为双三次插值结果, 可以看出当方差大于等于 0.3 时, 低分辨率图像的数字根本无法辨识, 但是重建结果中, 即使方差为 0.9 时, 仍然可以辨识大部分的数字.

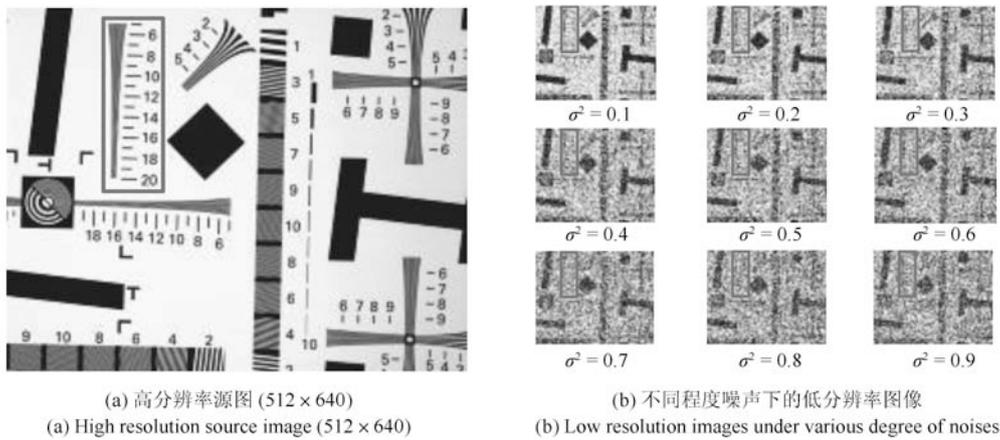
#### 4.2 拍摄获得低分辨率图像

本组实验针对真实图像序列进行重建. 第一个实验的低分辨率图像序列取自 Peyman Milanfar

的个人主页<sup>2</sup>, 其用奥林巴斯 C-4000 拍摄了 30 帧大小为 57 像素 × 49 像素的图像, 其中 16 帧如图 9(a) 所示. 图 9(b) 是参考帧的双三次插值结果, 图 9(c) ~ (e) 分别是文献 [16]、[11] 和本文算法所得结果.

分析图 9(c), 尽管有更高的对比度, 但是部分字母已无法辨识, 如第 1、3、4 行前 2 个字母 “Hi”、“pr”、“hi”. 比较起来, 图 9(d) 具有更强的辨识度, 但是图 9(d) 中很多字母连在了一起, 如第 2、4、5 行的前两个字母 “HP”、“hi”、“tr”, 且引入了许多不正确的信息, 如高亮部分. 图 9(e) 克服了图 9(d) 中结果的缺陷, 较大程度地提高了分辨能力.

<sup>2</sup><http://users.soe.ucsc.edu/milanfar/software/sr-datasets.html>



(a) 高分辨率源图 (512 × 640)  
 (b) 不同程度噪声下的低分辨率图像

图 7 高分辨率源图和低分辨率噪声图  
 Fig. 7 High resolution source image and low resolution noise images

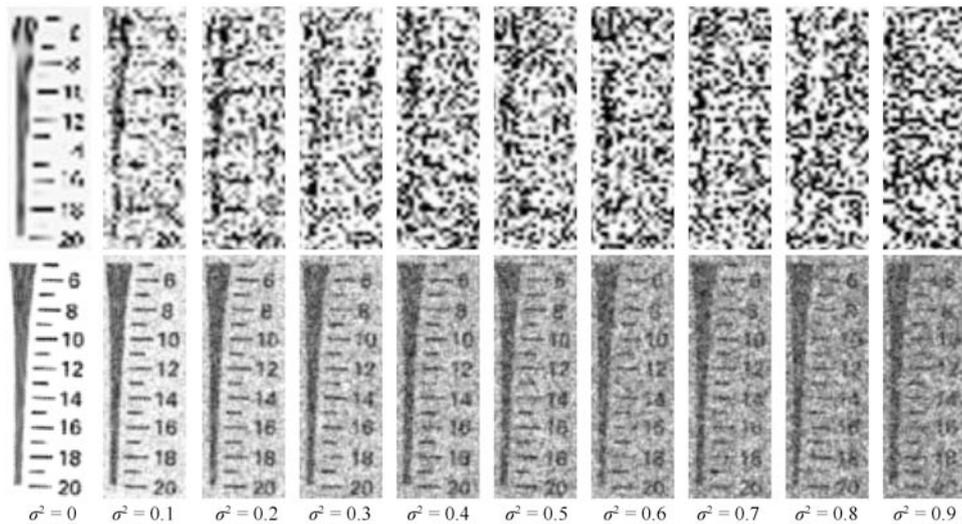


图 8 不同程度噪声图像的重建结果截图 (从左至右分别是不同方差的情况, 第一行为双三次插值结果, 第二行为重建结果, 下方数字为噪声的方差)

Fig. 8 Close-ups of reconstruction results under various degree of noises (From left to right: bicubic interpolation (top) and reconstruction results (middle) of noise images with different variances. The bottom numbers are variances of noises.)

第 2 个实验以自拍的方式获得低分辨率图像序列. 拍摄器械: 佳能 600d 机身, 佳能 EF-S18-55 mm IS II 镜头. 拍摄参数: 快门速度 1/100 秒, 光圈值 f3.5, iso200, 18 mm 广角, 物距约 130 mm, 无闪光, 画质设置为 S3 (图像尺寸 480 像素 × 720 像素), 拍摄氛围设置为单色黑白. 拍摄方式: 三脚架拍摄, 相机上下移动最大幅度约 20 mm, 旋转角度最大幅度约 10 度. 对准包含如图 10 (a) 所示的场景拍摄, 对拍摄的 32 张图像 (480 像素 × 720 像素) 分别进行裁剪, 截取一部分 (100 像素 × 200 像素) 作

为低分辨率图像, 其中 6 帧如图 10 (b) 所示.

重建结果的部分截图如图 11 所示, 共取 6 组截图, 每组截图中从左至右分别为双三次插值、文献 [16]、文献 [11] 算法所得结果和本文结果. 本文算法对这 6 本书名都可以正确地加以辨识, 而文献 [11] 的算法仅能辨识《人工智能》和《数字图像处理》这两本书, 文献 [16] 的算法只能辨识出个别汉字.

### 5 结论

基于亚像素, 本文重新考虑图像退化模型, 并在

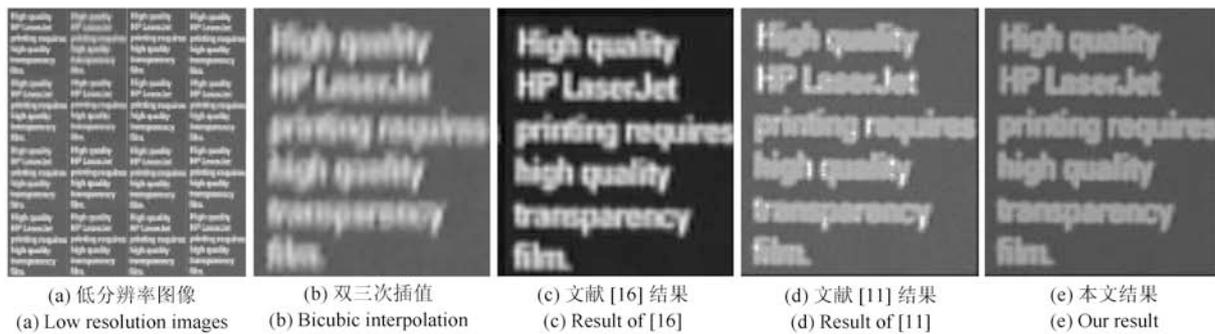


图 9 数据库图像重建结果

Fig. 9 Reconstruction results of database images



图 10 自拍图像

Fig. 10 Images taken by digital camera

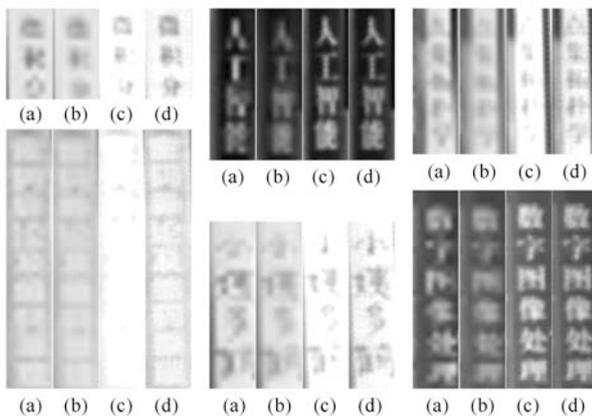


图 11 自拍图像重建结果的 6 个截图 ((a)、(b)、(c)、(d) 分别为双三次插值、文献 [16]、[11] 和本文结果)

Fig. 11 Six close-ups of reconstruction results about photos taken by ourselves ((a), (b), (c), (d) are results of bicubic, [16], [11] and this paper respectively.)

亚像素级上用一阶泰勒展式对图像的退化过程进行近似, 从而建立超分辨率图像重建的极小化能量函数. 利用图割算法:  $\alpha$ -expansion 进行极小化求解. 在求解过程中, 为了构造合适的图 (带有 Source 和 Sink 节点) 结构, 将能量函数重写为数据项和先验项的和. 保留关于两个相邻像素的先验信息, 忽略关于三个 (及更多) 相邻像素的先验部分, 在新定义的邻域关系下, 将能量函数写为  $\mathcal{F}^2$  类的形式, 并推导出该函数满足正则性要求的条件.

对模拟图像退化所获得的低分辨率图像序列进

行重建, 其结果表明本文算法具有合理性. 对真实低分辨率图像序列进行重建, 其结果表明本文算法具有较强的实用性. 噪声图像的重建结果表明本文算法对噪声具有很好的抗干扰能力.

在能量函数的近似过程中, 简单地去掉三个相邻像素的先验部分, 可能影响重建算法的效果. 后续工作将进一步考虑能量函数的近似方式, 尝试将其表示为  $\mathcal{F}^3$  类能量函数, 以期进一步提高算法的重建效果.

## References

- 1 Glasner D, Bagon S, Irani M. Super-resolution from a single image. In: Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Computer Vision. Kyoto, Japan: IEEE, 2009. 349–356
- 2 Yang J C, Wright J, Huang T S, Ma Y. Image super-resolution via sparse representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, **19**(11): 2861–2873
- 3 Pan Zong-Xu, Yu Jing, Hu Shao-Xing, Sun Wei-Dong. Single image super resolution based on multi-scale structural self-similarity. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(4): 594–603  
(潘宗序, 禹晶, 胡少兴, 孙卫东. 基于多尺度结构自相似性的单幅图像超分辨率算法. *自动化学报*, 2014, **40**(4): 594–603)
- 4 Lian Qiu-Sheng, Zhang Jun-Qin, Chen Shu-Zhen. Single image super-resolution algorithm based on two-stage and multi-frequency-band dictionaries. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(8): 1310–1320  
(练秋生, 张钧芹, 陈书贞. 基于两级字典与分频带字典的图像超分辨率算法. *自动化学报*, 2013, **39**(8): 1310–1320)

- 5 Sun Yu-Bao, Fei Xuan, Wei Zhi-Hui, Xiao Liang. Sparsity regularized image super-resolution model via forward-backward. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(9): 1232–1238 (孙玉宝, 费选, 韦志辉, 肖亮. 基于前向后向算子分裂的稀疏性正则化图像超分辨率算法. 自动化学报, 2010, **36**(9): 1232–1238)
- 6 Li Min, Cheng Jian, Le Xiang, Luo Huan-Min. Super-resolution based on sparse dictionary coding. *Journal of Software*, 2012, **23**(5): 1316–1324 (李民, 程建, 乐翔, 罗环敏. 稀疏字典编码的超分辨率重建. 软件学报, 2012, **23**(5): 1316–1324)
- 7 Farsiu S, Robinson M D, Elad M, Milanfar P. Fast and robust multiframe super-resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, **13**(10): 1327–1344
- 8 Li X L, Hu Y T, Gao X B, Tao D C, Ning B J. A multi-frame image super-resolution method. *Signal Processing*, 2010, **90**(2): 405–414
- 9 An Yao-Zu, Lu Yao, Zhao Hong. An adaptive-regularized image super-resolution. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(4): 601–608 (安耀祖, 陆耀, 赵红. 一种自适应正则化的图像超分辨率算法. 自动化学报, 2012, **38**(4): 601–608)
- 10 Wang Guang-Xin, Wang Zheng-Ming. SAR image targets super-resolution based on regularization with variable norms. *Acta Electronica Sinica*, 2008, **36**(12): 2389–2393 (王光新, 王正明. SAR 图像目标超分辨的变范数正则化算法. 电子学报, 2008, **36**(12): 2389–2393)
- 11 Mudanagudi U, Banerjee S, Kalra P K. Space-time super-resolution using graph-cut optimization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(5): 995–1008
- 12 Chantas G K, Galatsanos N P, Woods N A. Super-resolution based on fast registration and maximum a posteriori reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, **16**(7): 1821–1830
- 13 Lu Lin, Li Cui-Hua, Zhang Zhen, Yu Li-Bo, Zhang Dong-Xiao, Shi Hua. A method of images super-resolution reconstruction based on MRT-MAP frame. *Journal of Xiamen University (Natural Science)*, 2012, **51**(4): 696–700 (鲁林, 李翠华, 张珍, 余礼钹, 张东晓, 施华. 一种 MRF-MAP 框架下的图像超分辨率重建方法. 厦门大学学报 (自然科学版), 2012, **51**(4): 696–700)
- 14 Zhang Dong-Ming, Pan Wei, Chen Huai-Xin. Spatio-temporal adaptive super-resolution reconstruction of video sequence based on MAP frame. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(5): 484–490 (张冬明, 潘炜, 陈怀新. 基于 MAP 框架的时空联合自适应视频序列超分辨率重建. 自动化学报, 2009, **35**(5): 484–490)
- 15 Zhang Di, He Jia-Zhong. Feature space based face super-resolution reconstruction. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1145–1152 (张地, 何家忠. 基于特征空间的人脸超分辨率重构. 自动化学报, 2012, **38**(7): 1145–1152)
- 16 Ji H, Fermüller C. Robust wavelet-based super-resolution reconstruction: theory and algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, **31**(4): 649–660
- 17 Li Cui-Hua, Shi Hua, Dai Ping-Yang, Chen Jing, Du Xiao-Feng, Qu Yan-Yun, Xie Yi. Super-resolution image reconstruction based on gestalt theory. *Journal of Xiamen University (Natural Science)*, 2011, **50**(2): 261–270 (李翠华, 施华, 戴平阳, 陈婧, 杜晓凤, 曲延云, 谢怡. 引入格式塔理论的超分辨率图像重建技术. 厦门大学学报 (自然科学版), 2011, **50**(2): 261–270)
- 18 Panda S S, Prasad M S R S, Jena G. POCS based super-resolution image reconstruction using an adaptive regularization parameter. *International Journal of Computer Science Issues*, 2011, **8**(5): 155–158
- 19 Huang Hua, Fan Xin, Qi Chun, Zhu Shi-Hua. Face image super-resolution reconstruction based on recognition and projection onto convex sets. *Journal of Computer Research and Development*, 2005, **42**(10): 1718–1725 (黄华, 樊鑫, 齐春, 朱世华. 基于识别的凸集投影人脸图像超分辨率重建. 计算机研究与发展, 2005, **42**(10): 1718–1725)
- 20 Baker S, Kanade T. Limits on super-resolution and how to break them. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, **24**(9): 1167–1183
- 21 Sun Yu-Bao, Wei Zhi-Hui, Xiao Liang, Zhang Zheng-Rong, Lv Zhan-Qiang. Multimorphology sparsity regularized image super resolution. *Acta Electronica Sinica*, 2010, **38**(12): 2898–2903 (孙玉宝, 韦志辉, 肖亮, 张峥嵘, 吕战强. 多形态稀疏性正则化的图像超分辨率算法. 电子学报, 2010, **38**(12): 2898–2903)
- 22 Takeda H, Milanfar P, Protter M, Elad M. Super-resolution without explicit subpixel motion estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, **18**(9): 1958–1975
- 23 Yan Hua, Liu Ju. Super-resolution image restoration considering sub-pixel registration error. *Acta Electronica Sinica*, 2007, **35**(7): 1409–1413 (闫华, 刘琨. 考虑亚像素配准误差的超分辨率图像复原. 电子学报, 2007, **35**(7): 1409–1413)
- 24 Ben-Ezra M, Lin Z C, Wilburn B, Zhang W. Penrose pixels for super-resolution. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(7): 1370–1383
- 25 Ben-Ezra M, Zomet A, Nayar S K. Video super-resolution using controlled subpixel detector shifts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(6): 977–987
- 26 Kolmogorov V, Zabih R. What energy functions can be minimized via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(2): 147–159
- 27 Boykov Y, Veksler O, Zabih R. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001, **23**(11): 1222–1239
- 28 Boykov Y, Kolmogorov V. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(9): 1124–1137

- 29 Bergen J R, Anandan P, Hanna K J, Hingorani R. Hierarchical model-based motion estimation. In: Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision. London, UK: IEEE, 1992. 237–252



**张东晓** 集美大学理学院讲师, 厦门大学信息科学与技术学院博士研究生. 2006 年获得陕西师范大学数学与信息科学学院硕士学位. 主要研究方向为超分辨率图像重建技术.

E-mail: zdx1980@gmail.com

**(ZHANG Dong-Xiao** Lecturer at the School of Science, Jimei University,

Ph.D. candidate at the School of Information Science and Engineering, Xiamen University. He received his master degree from the College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University in 2006. His main research interest is super-resolution image reconstruction.)



**鲁林** 厦门大学信息科学与技术学院硕士研究生. 主要研究方向为超分辨率图像重建技术.

E-mail: deasthv@163.com

**(LU Lin** Master student at the School of Information Science and Engineering, Xiamen University. His main research interest is super-resolution image reconstruction.)

age reconstruction.)



**李翠华** 工学博士, 厦门大学计算机科学系教授. 主要研究方向为计算机视觉, 视频与图像处理, 超分辨率图像重建技术. 本文通信作者.

E-mail: chli@xmu.edu.cn

**(LI Cui-Hua** Ph.D., professor in the Department of Computer Science, Xiamen University. His research interest covers computer vision, video and image processing, and super-resolution image reconstruction. Corresponding author of this paper.)



**金泰松** 厦门大学计算机科学系讲师和光电控制技术重点实验室(洛阳)流动研究人员. 2007 年获得北京理工大学计算机学院博士学位. 主要研究方向为机器学习和计算机视觉.

E-mail: jts2002@163.com

**(JIN Tai-Song** Lecturer in the Department of Computer Science, Xiamen University and also a guest researcher in the Science and Technology on Electro-optic Control Laboratory (Luoyang). He received his Ph.D. degree from the Computer College, Beijing Institute of Technology in 2007. His research interest covers machine learning and computer vision.)