

DOI: 10.3979/j.issn.1673-825X.2012.01.011

# 码率自适应原模图 LDPC 码的设计

王志娜<sup>1</sup>, 肖 旻<sup>2</sup>, 王 琳<sup>3</sup>

(1. 重庆邮电大学 重庆市移动通信重点实验室, 重庆 400065; 2. 厦门理工学院 电子工程系, 福建 厦门 361005;

3. 厦门大学 通信工程系, 福建 厦门 361005)

**摘 要:** 无线通信信道的时变性, 使得纠错编码必须具备码率自适应的功能。原模图低密度奇偶校验码 (low density parity check code, LDPC) 可通过删余和扩展实现码率自适应, 并能解决传统 LDPC 码编码复杂度高的难题。将具有原模图结构的 AR4JA 码 (accumulate repeat-4 jagged-accumulate code) 作为母码, 提出“逐节点删余”算法, 实现 AR4JA 码率从 0.5 ~ 0.8 的变化, 利用矩阵扩展实现码率从 0.5 ~ 0.25 的降低。在加性高斯白噪声信道 (additive white Gaussian noise, AWGN) 下的仿真结果表明, 在 BER 为  $10^{-6}$  数量级处, 结合删余和扩展方法构造的码率自适应 AR4JA 码并未出现错误地板。

**关键词:** 码率自适应; 原模图低密度奇偶校验码 (原模图 LDPC); AR4JA 码; 逐节点删余; 扩展

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1673-825X(2012)01-0055-05

## Design of rate-compatible protograph LDPC codes

WANG Zhi-na<sup>1</sup>, XIAO Min<sup>2</sup>, WANG Lin<sup>3</sup>

(1. Key Lab of Mobile Communication in Chongqing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, P. R. China;

2. Dept. of Electronic Engineering, Xiamen Institute of Technology, Xiamen 361005, P. R. China;

3. Dept. of Communication Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, P. R. China)

**Abstract:** Over time-varying wireless channel, it is necessary for error-correction codes to be rate-compatible. Protograph LDPC codes can achieve rate-compatibility through puncturing and extending; and solve the problem that the encoders of tradition LDPC codes are more complex. With the AR4JA code which can be represented by protograph, we construct a rate-compatible family of AR4JA codes with rates ranging from 0.5 to 0.8 using the algorithm of “puncturing node by node”. To obtain the lower rates from 0.5 to 0.25, matrix expansion is also used. Simulation results over AWGN channel show that using both puncturing and extending we can construct rate-compatible family of AR4JA codes which do not suffer from error floor when BER is  $10^{-6}$ .

**Key words:** rate-compatible; protograph low density parity check code (protograph LDPC); accumulate repeat-4 jagged-accumulate code (AR4JA code); puncturing node by node; extending

## 0 引 言

通信系统业务的多样性、信道的时变性、物理层技术的灵活性需要信道编码码率能够自适应地根据信道环境做出相应的调整。采用码率自适应的编码技术, 可以在保证系统服务质量的前提下, 根据信道的状况及时调整码率, 从而提高通信系统的频谱利用率。

低密度奇偶校验码<sup>[1]</sup> (low density parity check code, LDPC) 具有良好的距离特性、小的误码率和较低的译码复杂度, 被认为是迄今为止纠错性能最好的码。2003 年, 美国国家航空航天局的空气动力实验室 (JPL) 首次提出了原模图 LDPC 码<sup>[2]</sup> (protograph LDPC codes), 弥补了传统 LDPC 码编码复杂度较高的不足。作为一种原模图 LDPC 码, AR4JA

收稿日期: 2011-09-04 修订日期: 2011-11-22

基金项目: 国家自然科学基金 (60972053)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (60972053)

码<sup>[3]</sup>(accumulate repeat-4 jagged-accumulate code)最大的优势就是错误地板极低。该码的性能优于绝大多数的一般 LDPC 码和其他原模图 LDPC 码,2006 年由太空数据系统咨询委员会(consultative committee for space data systems,CCSDS)推荐给 NASA 作为深空通信的标准码型。鉴于原模图 LDPC 码,尤其是 AR4JA 码的各种优势,对原模图 LDPC 码率自适应的研究有着很广阔的前景。

目前,实现码率自适应的方法主要有删余和扩展两种。删余可以利用同一对编译码器对不同码率的码进行编译码,是最常用的一种码率自适应方法。2006 年 J. Ha 等<sup>[4]</sup>借鉴“恢复”的概念,定义了删余变量节点(punctured variable node,PVN)的“恢复级别”。PVN 的恢复级别是影响删余码型性能的重要因素,之后,对删余算法的研究实质上都是基于 PVN 的恢复级别进行的<sup>[5-8]</sup>。然而 J. Li 等<sup>[9]</sup>表明,随着删余码率的增加,码的性能离香农限的距离增大,仅仅依靠删余并不能在较大码率范围内得到好性能的码。为了得到更大范围变化的码率,通常将删余和扩展结合起来构造码率自适应码组。

现阶段,对一般 LDPC 码率自适应的研究已经取得了很多成果。然而,对原模图 LDPC 码率自适应的研究却较少。目前,只有 El-khamy 等<sup>[10]</sup>以一个低码率的原模图 LDPC 码(accumulate repeat check accumulate code,ARCA 码)为基础,利用删余的方法实现码率自适应,得到的码率自适应 ARCA 码有较高的错误地板。与之不同的是,本文将拥有极低错误地板的 AR4JA 码作为母码,通过删余和扩展相结合的方法来构造码率自适应 AR4JA 码(rate-compatible AR4JA,RC-AR4JA)。

## 1 原模图 LDPC 码

### 1.1 原模图 LDPC 码基本原理

原模图是一种包含相对较少节点的 Tanner 图。一个原模图  $G_p = (V, C, E)$  包含变量节点集  $V$  校验节点集  $C$  和边集  $E$ 。每一条边  $e = (v, c) \in E$  连接一个变量节点  $v \in V$  和一个校验节点  $c \in C$ 。原模图中允许有平行边的存在,因此  $e \rightarrow (v_i, c_j) \in E$  并不是一一映射关系。与原模图对应的校验矩阵称为基础矩阵  $B$ ,  $B_{ij}$  的值代表第  $i$  个校验节点和第  $j$  个变量节点之间连接边的条数。与一般 LDPC 码校验矩阵不同的是,  $B_{ij}$  的值并不仅限于 0 和 1。对原模图进行  $T$  次复制,然后把  $T$  条相同类型的变量节点

和校验节点之间的边置换,可以扩展成不同大小的图。我们称这种图为导出图  $G$ ,对应的 LDPC 码称为原模图 LDPC 码。

作为一个简单的例子,我们考虑如图 1 所示的原模图,其中圆圈代表变量节点,方框代表校验节点。图 1a 的原模图  $G_p$  有  $|V| = 4$  个变量节点,  $|C| = 3$  个校验节点,  $|E| = 8$  条边。图 1b 是将图 1a 的原模图  $G_p$  复制  $T = 2$  次得到的大图,这 2 个相同的子图之间是相互独立,互不相连的。将图 1b 中相同类型节点之间的边进行置换,便得到图 1c 所示的导出图  $G$ ,此时这 2 个子图就连接在一起了。

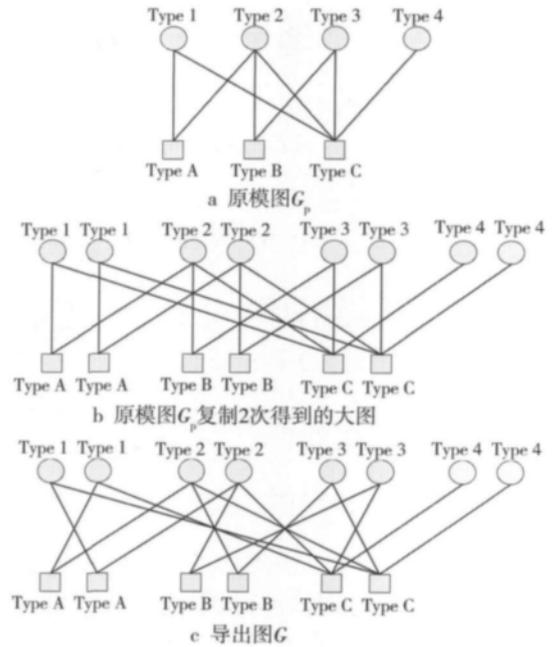


图 1 原模图到导出图的过程

Fig. 1 Process from protograph to derived graph

原模图中,允许变量节点集  $V$  包含删余变量节点。假设有  $V_0$  个删余变量节点,则未删余变量节点  $V_1 = |V| - V_0$  个。那么码率的计算将变为  $R = (|V| - |C|) / V_1$ 。

### 1.2 AR4JA 码

AR4JA 码是一种特殊的累加重复累加码<sup>[11]</sup>(accumulate repeat accumulate codes,ARA)。码率为 1/2 的 AR4JA 的编码框图,原模图如图 2 所示,其中 I 表示交织器, D 表示累加器,空心圆圈代表删余变量节点,实心圆圈代表未删余变量节点,方框代表校验节点。该码的原模图有  $|V| = 5$  个变量节点,  $|C| = 3$  个校验节点,其中有 1 个变量节点被删余了。(1) 式为该码的基础矩阵。AR4JA 码是一种系统码,即:变量节点 3 和 4 代表信息位,变量节点 0,

1 和 2 代表校验位。码率为 1/2 的 AR4JA 的迭代译码门限为 0.628 dB, 典型最小距离比为  $\delta_{\min} = 0.015^{[3]}$ 。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

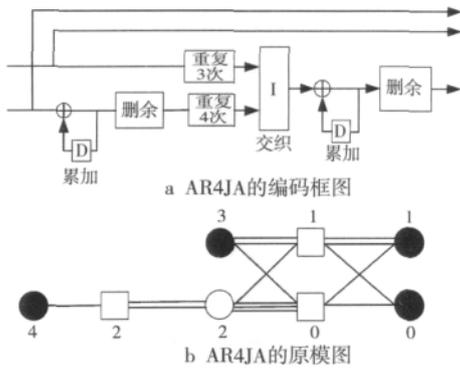


图 2 码率为 1/2 的 AR4JA 码  
Fig. 2 AR4JA code of rate 1/2

AR4JA 码具有传统 LDPC 码的优点, 作为一种 ARA 码, 还可以通过简单的重复器和累加器进行编码, 编码简单快速更易于硬件实现。此外, 它的最小距离以很高的概率与码长成线性关系<sup>[12-13]</sup>, 克服了一般原模图 LDPC 码错误地板欠佳的不足。

## 2 RC-AR4JA 码的设计

对于 RC-AR4JA 码的设计, 我们选取码率为 1/2 的 AR4JA 码作为母码, 并分两部份进行。首先, 提出“逐节点删余”算法实现码率由 0.5 ~ 0.8 的自适应。其次, 利用矩阵扩展的方法获得码率从 0.5 ~ 0.25 的 RC-AR4JA 码。结合删余和扩展的方法, 能够实现码率在 0.25 ~ 0.8 变化的 RC-AR4JA 码。

### 2.1 “逐节点删余”算法

删余的基本思想: 首先选取一个较低码率及性能优良的码作为母码, 通过删余母码的冗余变量节点得到一系列高码率的码。

#### 2.1.1 基本准则

在进行删余时, 我们提出以下准则, 依据这些准则依次删余满足条件的变量节点, 直到获得想要的高码率。

准则 1 最大化最低恢复级别 PVN 个数。

准则 2 最小化删余变量节点通过校验节点相连的所有 PVN 数目。

准则 3 最小化每个校验节点上连接 PVN 个数。

#### 2.1.2 算法主要步骤

“逐节点删余”算法的具体步骤表述如下(参数见表 1)。

表 1 “逐节点删余”算法的参数

Tab. 1 Parameters of the “puncturing node by node” algorithm

参数	说明
$N_{\text{pun}}$	需要删余的节点数目
$U_i$	母码中未删余的变量节点数目
$R_i$	目标码率
$V$	母码中变量节点数目
$C$	母码中校验节点数目
$U$	未删余的冗余变量节点集合
$N(v/c)$	与变量节点 $v$ (或校验节点 $c$ ) 相连的校验 (或变量) 节点集合

步骤 1 通过 (2) 式计算要删余的节点数目

$$N_{\text{pun}} = \left\lfloor U_i - \frac{V - C}{R_i} \right\rfloor \quad (2)$$

步骤 2 找到集合  $U$  并对于每一个  $c \in N(v)$  其中  $v \in U$ , 计算出  $F(c) = |v: v \in N(c) \& v \text{ 被删余}|$ 。

步骤 3 对于每一个  $v \in U$ , 通过 (3) 式计算出  $G(v)$ ,  $H(v)$  和  $M(v)$ 。

$$G(v) = |c: c \in N(v) \& F(c) = 1|$$

$$H(v) = \sum_{c \in N(v)} F(c) \quad (3)$$

$$M(v) = \max_{c \in N(v)} F(c)$$

步骤 4 找到集合  $T = \{v_r: v_r \in U \& G(v_r) = \min_{v \in U} G(v)\}$ , 如果  $T$  中只有一个节点, 删余该节点, 并跳到步骤 5。

步骤 4.1 找到集合  $W = \{v_r: v_r \in U \& H(v_r) = \min_{v \in T} H(v)\}$ , 如果  $W$  中只有一个节点, 删余该节点, 并跳到步骤 5。

步骤 4.2 找到集合  $D = \{v_r: v_r \in U \& M(v_r) = \min_{v \in W} M(v)\}$ , 如果  $D$  中只有一个节点, 删余该节点。如果  $D$  中有多个节点, 随机选取一个进行删余。

步骤 5 判断删余的变量节点数目是否等于  $N_{\text{pun}}$ , 若是, 则结束; 否则, 跳到步骤 2。

### 2.2 矩阵扩展

扩展是选取一个较高码率及性能优秀的码作为母码, 通过增加额外的冗余比特来降低码率。扩展有两种方法: 矩阵扩展和校验节点分裂。矩阵扩展是最早提出的一种扩展方法<sup>[9]</sup>, 如图 3 所示。首先选取一个较高码率母码的校验矩阵, 为  $N_0$  列  $M_0$  行。当码率需要降低的时候, 依次增加  $M_i$  行和  $M_i$  列, 从而得到一系列码率为  $R_i < R_0$  的码, 其中  $R_i =$

$$\frac{N_0 - M_0}{N_0 + \sum_{j=1}^i M_j}$$

为了保证母码的特性, 扩展后的矩阵

右上角全为 0 ,同时左下角的“稀疏矩阵”也需要保证与原矩阵之间的非相关性。对于扩展矩阵中的  $B_i$  ,不同的码具有不同的构造方式。

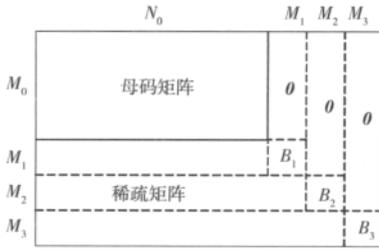


图 3 矩阵扩展

Fig. 3 Matrix expansion

对于 AR4JA 码 ,采用如图 4 所示的扩展方法 ,左上角  $3T \times 5T$  的矩阵为母码的校验矩阵。在左下角的“稀疏矩阵”设计时 ,本文保证新增校验节点的度为 4 ,并且使得新增的校验节点只与母码中 2 号和 3 号变量节点相连。右上角的  $\theta$  代表全零矩阵 ,右下角的  $I$  代表单位矩阵 ,这样便可以得到码率为  $R = T / (2T + M)$  的 AR4JA 码。

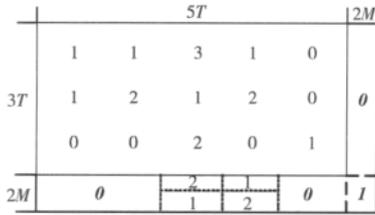


图 4 AR4JA 的矩阵扩展

Fig. 4 Matrix expansion of AR4JA code

新增校验节点的度为 4 ,使得扩展后的矩阵校验节点度更加集中 ,有利于码的性能<sup>[14]</sup>。为了进一步提高性能 ,采用改进的 PEG 算法对新增校验节点与变量节点的连接进行优化 ,避免了 Tanner 中短环的出现。

### 3 仿真结果及分析

我们用上述方法构造 RC-AR4JA 码 ,并进行了仿真。其中 ,母码采用扩展次数为 512 的 AR4JA 码 ,即信息位长度为 1 024 ,码率为 1/2 ,其中在扩展时采用改进型的 PEG 算法<sup>[15]</sup>来消除 6 环。仿真在 AWGN 信道下进行 ,采用 BPSK 调制 ,Log-BP 译码算法 ,最大迭代次数为 100。

首先 ,采用“逐节点删余”算法设计 RC-AR4JA 码 ,实现了码率从 0.5 ~ 0.8 的变化 ,并与随机删余构造的 RC-AR4JA 码进行了对比。图 5 给出了这两种 RC-AR4JA 码的性能仿真曲线。为了使不同码率的仿真结果更加清晰 ,本文给出了  $E_s/N_0$  与 BER 的曲线 ,其中  $E_s/N_0 = E_b/N_0 + 10\lg R$ 。

相对于随机删余 ,采用“逐节点删余”设计的 RC-AR4JA 码具有更好的性能 ,随着速率的增加优势进一步扩大。在 BER 为  $10^{-6}$  数量级 (无线数据通信业务的标准 BER) ,逐节点删余设计的 RC-AR4JA 码在码率分别为 0.6 ,0.7 的情况下 ,比随机删余获得的 RC-AR4JA 码分别有约 0.5 dB ,1.0 dB 的增益。在码率为 0.8 时 ,随机删余与逐节点删余的差距更大。

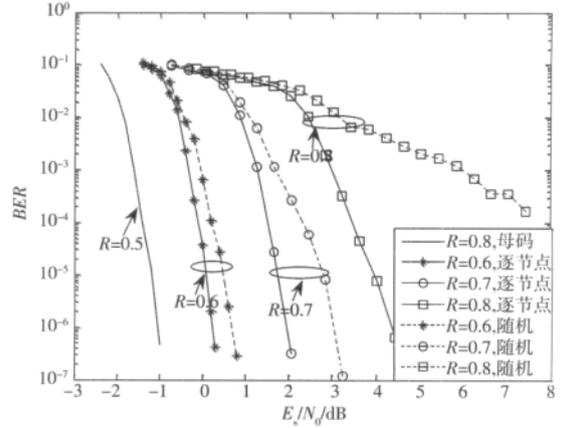


图 5 不同删余算法下的 RC-AR4JA 码性能

Fig. 5 BER performances of RC-AR4JA codes with different algorithms

其次 ,采用图 4 所示矩阵扩展的方法 ,设计了码率从 0.5 ~ 0.25 的 RC-AR4JA 码。作为对比 ,还利用随机扩展构造 0.5 ~ 0.25 码率变化的 AR4JA 码。在随机扩展时 ,保证新增校验节点度同样为 4 ,两者之间的对比将是公平的。图 6 给出这两种扩展方法得到的 RC-AR4JA 码的性能仿真曲线。图 6 中 ,选择表示本文设计的扩展方法 ,随机为随机扩展方法。

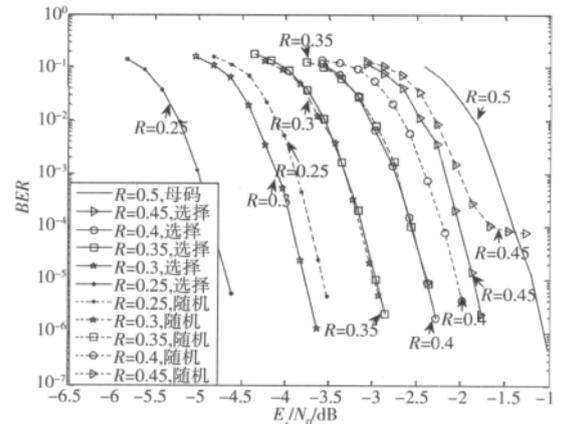


图 6 不同扩展方法得到的 AR4JA 码性能

Fig. 6 BER performances of RC-AR4JA codes obtained by different matrix expansion method.

相同的码率 ,用图 4 所示矩阵扩展构造的 RC-AR4JA 码较随机扩展有更好的性能 ,随着码率

的降低,这种优势更加明显。在 BER 为  $10^{-6}$  数量级,用本文的扩展方法构造的 AR4JA 码在码率分别为 0.4, 0.35, 0.3 和 0.25 的情况下,较随机扩展得到的 AR4JA 码分别有 0.2 dB, 0.5 dB, 0.7 dB 和 1 dB 的增益。此外,我们设计的 RC-AR4JA 码,在 BER 为  $10^{-6}$  数量级并未出现错误地板。

## 4 结束语

本文针对一类拥有极低错误地板的原模图 LDPC 码—AR4JA 码,提出了“逐节点删余”算法,实现了码率由 0.5 ~ 0.8 的增加,并利用矩阵扩展的方法构造了码率从 0.5 ~ 0.25 变化的 AR4JA 码。结合删余和扩展的方法,实现码率从 0.25 ~ 0.8 灵活变化的 RC-AR4JA 码。在 AWGN 信道下的仿真结果表明,在 BER 为  $10^{-6}$  数量级处,本文设计的 RC-AR4JA 码在整个码率变化范围内并未出现错误地板,保持了母码错误地板低的优良特性。

## 参考文献:

[1] GALLAGER R G. Low-density parity check codes [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1963.

[2] THORPE J. Low-density parity-check (LDPC) codes constructed from protographs [C]// Tech. Rep. Progress Report. Pasadena, CA, USA: JPL IPN, 2003: 42-454.

[3] DIVSALAR D, JONES C, THORPE J. Protograph based LDPC codes with minimum distance linearly growing with block size [C]//IEEE. IEEE Communications Society subject. ST, louis: IEEE Globecom, 2005: 1152-1156.

[4] HA J, KIM J, KLINC D, et al. Rate-compatible punctured low-density parity-check codes with short block length [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52(2): 728-738.

[5] 胡文江, 卫霞. 码率自适应 QC-LDPC 码的研究 [J]. 重庆邮电大学学报: 自然科学版, 2009, 21(1): 53-56. HU Wen-jiang, WEI Xia. Design of rate-compatible QC-LDPC codes [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications: Nature Science Edition, 2009, 21(1): 53-56.

[6] YOU Ying, XIAO Min, WANG Lin. The rate-compatible Multi-Edge Type LDPC codes with short block length [C]//IEEE. Proceedings of the 5th International Conference on Wireless communications (WiCOM'09). NJ, USA: IEEE Press, 2009: 1-4.

[7] 肖旻, 黎勇, 王琳. 码率自适应 LDPC 码删余算法 [J]. 应用科学学报, 2011, 24(9): 385-389. XIAO Min, LI Yong, WANG Lin. Puncturing Algorithm for design rate-compatible LDPC codes [J]. Journal of applied sciences, 2011, 24(9): 385-389.

[8] 温娜, 徐永太, 张平. 有限长 LDPC 码的打孔方案设计 [J]. 北京邮电大学学报, 2007, 29(6): 135-138.

WEN Na, XU Yong-tai, ZHANG Ping. Design of puncturing scheme for finite-length LDPC codes [J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2007, 29(6): 135-138.

- [9] LI J, NARAYANNA K. Rate-compatible low density parity check codes for capacity-approaching ARQ scheme in packet data communications [C]//Proc. Int Conf Comm Internet and Info. Tech (CIIT). Virgin Islands, USA: 2002: 201-206.
- [10] MOSTAFA E1-Khamy, HOU Ji-wei, BHUSHAN Naga. Design of rate-compatible structured LDPC codes for Hybrid ARQ application [J]. IEEE J Sele Areas Commun, 2009, 27(6): 965-973.
- [11] ABBASFAR A, DIVSALAR D, YAO Kung. Accumulate repeat accumulate codes [C]// IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Chicago, USA: IEEE Globecom, 2004: 509-513.
- [12] DIVSALAR D. Ensemble weight enumerators for protograph LDPC codes [C]//IEEE. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Seattle, Washington, USA: IEEE Press, 2006: 1554-1558.
- [13] DIVSALAR D, DOLINAR S, JONS C R, et al. Capacity-approaching protograph codes [J]. IEEE J sele Areas Commun 2009, 27(6): 876-888.
- [14] CHUNG S Y, RICHARDSON T J, URBANKE R L. Analysis of sumproduct decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2001, 47(2): 567-570.
- [15] BONELLO N, CHEN Sheng, HANZO L. Construction of regular Quasi-Cyclic protograph LDPC codes based on vandermonde matrices [J]. IEEE Transactions Veh Technol, 2008, 54(4): 2583-2588.

## 作者简介:



王志娜(1985-) 河南平顶山人, 硕士研究生, 主要研究方向为信道编码理论。E-mail: wangzhina0317@163.com。

肖旻(1982-) 福建三明人, 2011 年于厦门大学通信工程系获得博士学位, 主要从事信息论、LDPC 码的研究。

王琳(1963-) 重庆市人, 教授, 博士, 教育部新世纪人才, 现为厦门大学通信工程系博士生导师, 研究方向为宽带/超宽无线通信技术算法设计与硬件实现。