

# 基于改进速度障碍法的多机器人避碰规划算法

黄永龙, 仲训昱

HUANG Yonglong, ZHONG Xunyu

厦门大学 信息科学与技术学院, 福建 厦门 361005

School of Informaiton Science and Technology, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China

HUANG Yonglong, ZHONG Xunyu. Improved velocity obstacles-based collision avoidance algorithm for multiple mobile robots. *Computer Engineering and Applications*, 2012, 48(32): 47-51.

**Abstract:** The dynamic avoiding collision of multiple mobile robots is studied. Based on the analysis of the principle of velocity obstacles, it designs the interactive velocity methods and defines the collision time and collision distance factor to adjust configuration obstacles, the mobile obstacles, multi-step planning window under dynamic constraints and the goal point are mapped in a new set velocity variation space. Furthermore, in the velocity variation space, it translates the multi-robot dynamic collision avoidance problem into an optimization problem with a new objective function, and the corresponding dynamic collision avoidance arithmetic is designed. Simulation results show that this method is effective to overcome the impact of conflict, achieve an effective coordination and control between multi-robots, and improve the tracking of fast moving targets.

**Key words:** multi-robots; velocity obstacles; dynamic collision avoidance; motion planning

**摘 要:** 针对多移动机器人运动协调中的动态安全避碰问题, 在分析速度障碍法原理的基础上, 设计用于机器人之间相互避让的互动速度法则, 并通过制定机器人的碰撞时间、碰撞距离因子对构型障碍的大小进行实时调整, 把运动障碍物、动力学约束下的多步可达窗口、目标点都映射到一种速度变化空间当中, 使多机器人的动态避碰问题转化为一种最优化问题, 并构造了新的优化评价函数; 设计了基于改进速度障碍法的机器人动态避碰规划算法。仿真实验表明, 该方法有效地克服了碰撞冲突, 实现了多机器人之间的运动协调控制, 提高了机器人追踪运动目标的快速性。

**关键词:** 多机器人; 速度障碍; 动态避碰; 运动规划

**文献标识码:**A **中图分类号:** TP41 **doi:** 10.3778/j.issn.1002-8331.1206-0005

## 1 引言

速度障碍的概念最早产生于20世纪90年代, 文献[1-2]提出了速度障碍法的理论框架; 文献[3-5]在速度障碍的基础上, 通过建立相对坐标系, 在加速度空间中、采用线性规划理论进行避碰规划。文献[6-7]把避碰行为看作是机器人与运动障碍物之间相互作用的动态过程, 把避碰规划问题转化为机器人加速度空间中的一个最优控制问题。文献[8]采用速度障碍法, 实现了对高速车辆的避碰规划与安全导航; 文献[9]进一步采用速度障碍原理, 设计了适合复

杂海洋环境的、基于速度矢量坐标系下水下机器人的动态避障方法。文献[10]把速度障碍的思想应用于多移动机器人系统, 实现了多机器人之间的安全避碰运动规划。然而, 以上基于速度障碍的规划方法, 都只是在一个规划周期内机器人速度的单步可达空间中进行的, 也没有全面考虑到规划周期中速度的动态变化、碰撞距离和时间、动力学约束下可达速度空间的合理选定等, 这严重影响着机器人的安全性、规划的长远性及最优决策。为此, 文献[11]综合考虑碰撞距离和碰撞时间、动力学约束下可达速

**基金项目:** 福建省自然科学基金(No.2010J05141)。

**作者简介:** 黄永龙(1969—), 男, 工程师, 研究方向为机器人技术及电气自动化系统控制等; 仲训昱(1980—), 男, 博士, 助理教授, 研究方向为机器人感知与自主控制、多机器人系统。E-mail: long@xmu.edu.cn

**收稿日期:** 2012-06-04 **修回日期:** 2012-08-06 **文章编号:** 1002-8331(2012)32-0047-05

度空间的合理选定等问题,制定了相应的改进方法。本文在文献[11]基础上,对速度障碍法的基本原理进行分析,并进一步设计了用于多机器人相互避让的互动速度障碍法,最后把位置空间中的环境信息都映射到机器人的速度变化空间中,在此空间中考察多机器人动态避碰的最优化规划问题。

## 2 速度障碍法原理

对平面运动的智能体 $P$ ,假设在 $t$ 时刻其速度为 $V_P$ ,则其状态可采用其参考点位置及速度矢量,在状态空间中形象地表示出来。因此 $P$ 的运动可定义为:

$$P(t) = (x_p(t), V_p(t)) \quad (1)$$

其中 $x_p(t) = [x_p, y_p]^T$ 为参考点的位置坐标, $V_p(t)$ 为速度矢量。在以下分析中,所有智能体(机器人)都简化为圆形,设当前时刻为 $t$ ,规划及控制周期为 $T$ ,机器人在周期 $T$ 时间内速度保持不变,只在下一时刻发生改变。在分布式多机器人运动协调中,每个机器人都把其他机器人作为运动障碍物。

如图1所示,当前 $t$ 时刻,全局坐标系 $\{X, Y\}$ 中,移动机器人 $R$ 位于点 $x_R = (x_R, y_R)$ ,速度为 $V_R$ ;  $O$ 视为运动障碍物, $O$ 位于点 $x_O = (x_O, y_O)$ ,速度为 $V_O$ 。障碍物 $O$ 根据机器人 $R$ 的大小进行“膨化”,其半径扩展为 $R_O$ ,则可将机器人 $R$ 模型化为一个质点,并称“膨化”障碍物 $O$ 为机器人 $R$ 的一个位置障碍(Position Obstacle, PO), $l_{MO}$ 和 $l_{NO}$ 是机器人 $R$ 与 $PO$ 两侧切线方向的射线。 $D_{RO}$ 为 $l_{RO}$ 方向上测量到的 $R$ 与 $O$ 之间的距离。

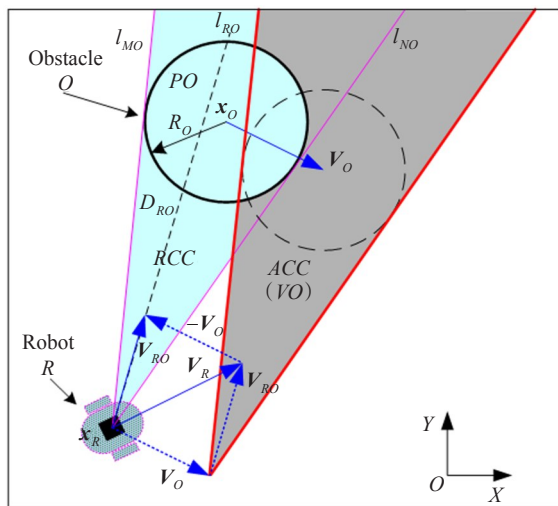


图1 基于相对速度信息的动态避碰规划

### (1) 相对碰撞区

定义 $R$ 和 $O$ 的相对速度:

$$V_{RO} = V_R - V_O \quad (2)$$

则通过相对速度可以把 $O$ 当作静止障碍物, $R$ 的速度则看作为 $V_{RO}$ ;如果 $V_{RO}$ 保持不变, $l_{RO}$ 为其方向上的射线,则机器人将和障碍物 $O$ 发生碰撞的条件为:

$$l_{RO} \cap PO \neq \emptyset \quad (3)$$

使式(3)成立的相对速度 $V_{RO}$ 的集合,定义为速度空间中的相对碰撞区 RCC (Relative Collision Cone):

$$RCC = \{V_{RO} | l_{RO} \cap PO \neq \emptyset\} \quad (4)$$

即图1中射线 $l_{MO}$ 和 $l_{NO}$ 之间的区域,对于机器人的任一相对速度 $V_{RO}$ ,如果 $V_{RO} \in RCC$ ,则机器人将与障碍物 $O$ 发生碰撞。

### (2) 速度障碍

如图1所示,把 $RCC$ 平移 $V_O$ 后得到的区域称为绝对碰撞区域 ACC (Absolute Collision Cone):

$$ACC = RCC \oplus V_O \quad (5)$$

其中 $\oplus$ 表示闵可夫斯基矢量和运算。

可以看出, $V_R$ 的末端点位于 $ACC$ 等价于 $V_{RO} \in RCC$ ,所以当 $V_R$ 的末端点位于 $ACC$ 时,机器人将与障碍物 $O$ 发生碰撞。 $ACC$ 表示 $R$ 与 $O$ 会发生碰撞的速度 $V_R$ 的集合,即为速度障碍 VO (Velocity Obstacle)<sup>[1]-[2]</sup>:

$$VO(V_O) = \{V_{Rnew} | (V_{Rnew} - V_O) \in RCC\} \quad (6)$$

图2为机器人 $R$ 遇到多运动障碍物(其他机器人)的一个例子,其中 $O_1$ 的速度为 $V_{O1}$ ,相应的速度障碍为 $VO_1$ ;  $O_2$ 的速度为 $V_{O2}$ ,相应的速度障碍为 $VO_2$ 。可以看出 $V_R$ 位于 $ACC_1$ 和 $ACC_2$ 之中(即 $V_R \in VO_1$ 且 $V_R \in VO_2$ ),如果在接下来的时刻 $V_R$ 保持不变,则 $R$ 将与 $O_1$ 、 $O_2$ 发生碰撞,必须把 $V_R$ 在速度空间中的点调整到 $ACC_1$ 和 $ACC_2$ 之区域之外,方可避开与 $O_1$ 、 $O_2$ 即将发生的碰撞。

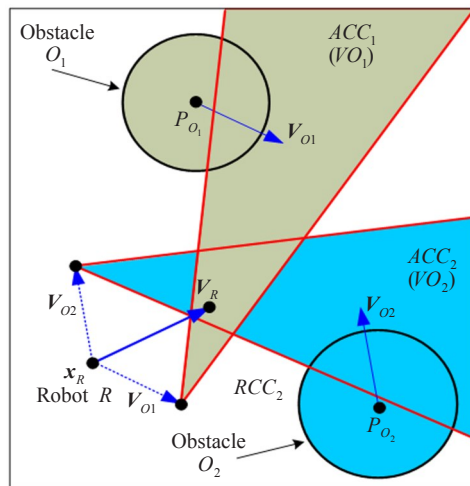


图2 多机器人速度障碍例举

通过以上分析, 可以得出以下结论:

**结论 1** 对于机器人与单运动障碍物  $O$ , 分别计算出  $PO$ 、 $RCC$  及  $VO$ , 则避碰条件为:  $P_R \notin PO$  且  $V_R \notin VO$  (即  $V_R$  的末端点位于  $ACC$  之外)。

**结论 2** 对于机器人与多运动障碍物  $\{O_1, O_2, \dots, O_N\}$ , 分别计算出  $O_i (i=1, 2, \dots, N)$  对应的  $PO_i$ 、 $ACC_i$  及  $VO_i$ , 则机器人与多个运动障碍物的避碰条件为:  $P_R \notin MPO$  且  $V_R \notin MVO$  (即  $V_R$  的末端点位于  $MACC$  之外)。其中  $MPO = \bigcup_{i=1}^N PO_k$ ,  $MVO = \bigcup_{i=1}^N VO_k$ ,  $MACC = \bigcup_{i=1}^N ACC_k$ 。

### (3) 互动速度障碍

如图 1 所示, 由速度障碍原理, 机器人  $R$  必须在  $RCC$  区域之外选一个新的速度  $V_{R_{new}}$  以避免和障碍物  $O$  相撞。如果  $O$  也是一个移动的机器人,  $R$  选择的新的相对速度  $V_{R_{new}}$  等于当前相对速度  $V_{RO}$  和任意一个位于  $RCC$  区域之外的速度的平均值。称这个互惠的速度障碍为互动速度障碍 (Interactive Velocity Obstacle), 即有<sup>[12]</sup>:

$$IVO(V_O) = \{V_{R_{new}} | 2V_{R_{new}} - V_R - V_O \in RCC\} \quad (7)$$

其中  $2V_{R_{new}} - V_R - V_O \in RCC$  等价于  $2V_{R_{new}} - V_R \in VO(V_O)$ 。

对于机器人  $R$ , 进一步考虑优先的互让方向, 如果  $V_{R_{new}}$  和  $V_{RO}$  都在点  $x_R$  和  $x_O$  连线的同一侧, 那么选取  $IVO(V_O)$  作为速度障碍, 否则选取  $VO(V_O)$  作为速度障碍。

## 3 速度障碍法的改进

### 3.1 碰撞时间和距离

为了消除机器人的保守避碰策略<sup>[12]</sup>, 综合考虑碰撞距离和碰撞时间对运动障碍物  $O$  的大小 (半径  $R_O$ ) 进行调整:

$$\hat{R}_O = k_R (h(\gamma_t) + h(\gamma_D)) R_O \quad (8)$$

其中  $\gamma_t = \frac{t_C}{T}$ 、 $\gamma_D = \frac{D_{RO}}{R_O}$ ,  $t_C = \frac{D_{RO} - R_{rob}}{V_{RO}}$  称为撞时间因子,  $D_{RO}$  则称为碰撞距离因子。  $h(\gamma_t)$  和  $h(\gamma_D)$  为时变加权函数<sup>[11]</sup>。  $k_R$  为调整系数。

### 3.2 速度变化空间

设  $\Delta t$  时间内移动机器人不会与运动障碍物发生碰撞, 期间机器人  $R$  的速度变化表示为  $\Delta V_R = [\Delta V_R, \Delta \theta_R]^T$ , 取:

$$x = \Delta \theta_R, y = \Delta V_R \quad (9)$$

由式(9)定义的坐标系即为速度变化空间。

对照图 1, 依据式(4)(6), 障碍物  $O$  在速度变化空间中对应的  $VO(V_O)$  为:

$$D_{VO} = \left\{ (x, y) \mid -\Delta\alpha < \angle \left( \begin{bmatrix} (V_R + y)\cos(\theta_R + x) \\ (V_R + y)\sin(\theta_R + x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_O \cos(\theta_O) \\ V_O \sin(\theta_O) \end{bmatrix} \right) - \alpha_{RO} < \Delta\alpha \right\} \quad (10)$$

依据式(7), 障碍物  $O$  (其他机器人) 在速度变化空间中对应的  $IVO(V_O)$  可写成:

$$D_{IVO} = \left\{ (x, y) \mid -\Delta\alpha < \angle \left( 2 \begin{bmatrix} (V_R + y)\cos(\theta_R + x) \\ (V_R + y)\sin(\theta_R + x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{Rx} \\ V_{Ox} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{Oy} \\ V_{Oy} \end{bmatrix} \right) - \alpha_{RO} < \Delta\alpha \right\} \quad (11)$$

其中  $\alpha_{RO}$  为点  $x_R$  和  $x_O$  连线的角度 (由  $x_R$  指向  $x_O$ ),  $\Delta\alpha$  为该连线与左右切线  $l_{MO}$  和  $l_{NO}$  之间的夹角。

设  $\Delta t$  时间内移动机器人不会与运动障碍物发生碰撞, 设  $\Delta v_{R_{min}}$  和  $\Delta v_{R_{max}}$  分别为  $T$  时间内速度  $V_R$  幅值变化的最大和最小值,  $\Delta\alpha_{R_{min}}$  和  $\Delta\alpha_{R_{max}}$  分别为  $T$  时间内速度  $V_R$  方向角变化的最大和最小值。则  $\Delta t$  时间内机器人速度  $V_R$  的可达速度变化区域为:

$$\Omega_{fea} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} \Delta\alpha_{R_{min}} \frac{\Delta t}{T} \leq x \leq \Delta\alpha_{R_{max}} \frac{\Delta t}{T} \\ \max(-V_R, \Delta v_{R_{min}} \frac{\Delta t}{T}) \leq y \leq \min(V_{R_{max}} - V_R, \Delta v_{R_{max}} \frac{\Delta t}{T}) \end{matrix} \right\} \quad (12)$$

一般有  $\Delta t \geq T$ , 所以可以称  $\Omega_{fea}$  为机器人  $R$  速度变化空间中的多步可达规划窗口。

如果经速度空间的碰撞分析, 机器人  $R$  即将与感知得到的多运动物  $\{O_1, O_2, \dots, O_m\} (m \leq N)$  发生碰撞, 计算出机器人与每个物体  $O_k$  对应的碰撞时间  $t_{c_k} (k=1, 2, \dots, m)$ , 取  $\Delta t = \min(t_{c_1}, t_{c_2}, \dots, t_{c_m})$ , 由式(2)~(18) 计算  $\Omega_{fea}$  大小。则机器人  $R$  的避碰区域为:

$$D_{void} = \bigcap_{i \in N} D_i^{void} = \overline{\bigcup_{i \in N} D_i} \quad (13)$$

当  $O_i$  为运动障碍物时,  $D_i = D_{VO}$ ; 当  $O_i$  为其他机器人时,  $D_i = D_{VO}$  或  $D_i = D_{IVO}$ 。

同时, 机器人  $R$  趋向目标点运动或追踪目标物可看作是动态避碰的一个反问题, 假如目标点速度为  $V_G = [V_G, \theta_G]^T$ , 则机器人  $R$  的目标速度为  $V_g = V_{RG} + V_G$ , 其中:

$$V_{RG} = [V_{RG}, \theta_{goal}]^T \quad (14)$$

$$V_{RG} = \min(V_{R_{max}}, \sqrt{\|x_G - x_R\|}) \quad (15)$$

$$\theta_{goal} = \angle((V_G - V_R), X) \quad (16)$$

由  $V_{RG}$ 、 $V_G$  可求得目标速度  $V_g = [V_g, \theta_g]^T$  后, 在速度变化空间中对应的目标点  $p_g$  的坐标为:

$$x_g = \theta_g - \theta_R, y_g = V_g - V_R \quad (17)$$

如图 3 所示, 为在当前机器人速度下, 单运动障碍物  $O$  在机器人的速度变化空间中对应的  $D$ 、 $\Omega_{fea}$  示意图。

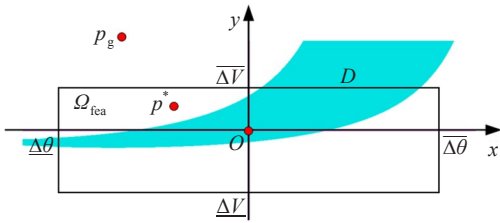


图3 运动障碍 $O$ 在速度变化空间中的 $D$ 和 $\Omega_{fea}$

### 3.3 最优避碰策略

在机器人 $R$ 的速度变化空间中,选择的避碰区域为 $D_{void} \cap \Omega_{fea}$ ,这样就可以把动态避碰问题转化为避碰区域中点的最优化选择问题。最优决策点 $p^* = \{x, y\}$ 的选择除了安全避碰外,应该尽量靠近原点,同时离目标点 $p_g$ 越近越好。所以,优化目标函数定义为:

$$J(x, y) = k_1(|x - x_g| + |y - y_g|) + k_2|x| + k_3|y| \quad (18)$$

一般取 $k_3 < k_1 < k_2$ 。

### 3.4 动态避碰算法

假设对于任一移动机器人 $R$ 通过通信或感知传感器检测到 $m$ 个可能与之发生碰撞的其他机器人,记为运动障碍物 $\{O_1, O_2, \dots, O_m\}$ ,其中 $O_i = \{P_{O_i}, R_{O_i}, V_{O_i}\}$ ,则动态避碰规划算法如下:

输入:  $\{O_1, O_2, \dots, O_m\}, V_R, \theta_R, P_R(x_R, y_R), P_G(x_G, y_G)$

输出:  $\dot{V}_R, \dot{\theta}_R$

01: 初始化  $ca = 1, J_{temp} = J_{max}, up = 0$ ;

02: for  $i = 1$  to  $m$

03: 计算  $\alpha_{RO_i}, \Delta\alpha_i, t_{ci}$ ;

04: 得到  $\Delta t = \min(t_{c1}, t_{c2}, \dots, t_{cm}, t_{max})$ ;

05: endfor

06: 根据当前 $V_R, \theta_R, \Delta t$ , 计算 $\Omega_{fea}$ ;

07: for  $x = \Delta\theta$  to  $\overline{\Delta\theta}$

08: for  $y = \Delta V$  to  $\overline{\Delta V}$

09:  $ca = 1$ ;

10: for  $i = 1$  to  $m$

11: 对当前 $x, y$ 求得 $V_R + y$ 和 $\theta_R + x$

12: 根据式(10)和(11)进行碰撞检测

13: if 当前 $x, y$ 属于 $D_{VO}$ 或 $D_{V'}$  o

14:  $ca = 0$ ;

15: endif

16: endfor

17: if  $ca = 1$  then

18: 计算 $J(x, y)$ ;

19: if  $J(x, y) < J_{temp}$  then

20:  $J_{temp} = J(x, y); p^* = \{x, y\}$ ;

21: endif

22:  $up = 1$ ;

23: endif

24: endfor

25: endfor

26: if  $x = \overline{\Delta\theta}$  and  $y = \overline{\Delta V}$  then

27: if  $(up = 0)$  then

28:  $x = \min(|\Delta\theta - x_g|, |\overline{\Delta\theta} - x_g|); y = 0$ ;

29:  $p^* = \{x, y\}$ ;

30: endif

31: endif

32: 计算 $\dot{V}_R = y^*/T, \dot{\theta}_R = x^*/T$ ;

33: if  $\dot{V}_R \geq a_{Rmax}$  then  $\dot{V}_R = a_{Rmax}$ ;

34: if  $\dot{V}_R \leq a_{Nmax}$  then  $\dot{V}_R = a_{Nmax}$ ;

35: if  $\dot{\theta}_R \geq \omega_{Rmax}$  then  $\dot{\theta}_R = \omega_{Rmax}$ ;

36: if  $\dot{\theta}_R \leq -\omega_{Rmax}$  then  $\dot{\theta}_R = -\omega_{Rmax}$

其中, $J_{max}$ 为一个很大正值, $t_{max}$ 为设定的一个小阈值; $ca = 1$ 表示不发生碰撞, $up = 1$ 表示决策点位于可达空间之内,否则不然。

### 3.5 仿真实验与分析

根据以上对多机器人之间动态避碰行为的分析和算法设计,进行仿真实验。

取参数 $v_{Rmax} = 5.0 \text{ m/s}, a_{Rmax} = 5.0 \text{ m/s}^2, \omega_{Rmax} = 45.0^\circ/\text{s}, \varepsilon_{Rmax} = 45^\circ/\text{s}^2, a_{Nmax} = -5.0 \text{ m/s}^2, t_{max} = 5 \text{ s}, T = 0.1 \text{ s}, L_d = 15 \text{ m}$ ,假设当前机器人 $L_d$ 范围内的运动障碍物(其他机器人)的大小与速度可通过通讯或传感器检测得到。

如图4所示,为两个移动机器人 $R_1, R_2$ 相向而行的运动路径,其中:图4(a)为避让过程;图4(b)为趋向目标过程;图5为8个双列移动机器人分别以对方的起始点作为目标点相向而行的动态避碰过程;图6为8个移动机器人圆形相向而行时的运动路径。从图4~6可以看出,基于速度障碍法的运动协调策略,机器人可以安全地避开碰撞危险并顺利达到目标点,获得了较好的运动路径。

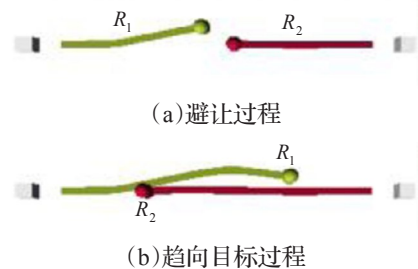


图4 两个机器人的动态避碰过程



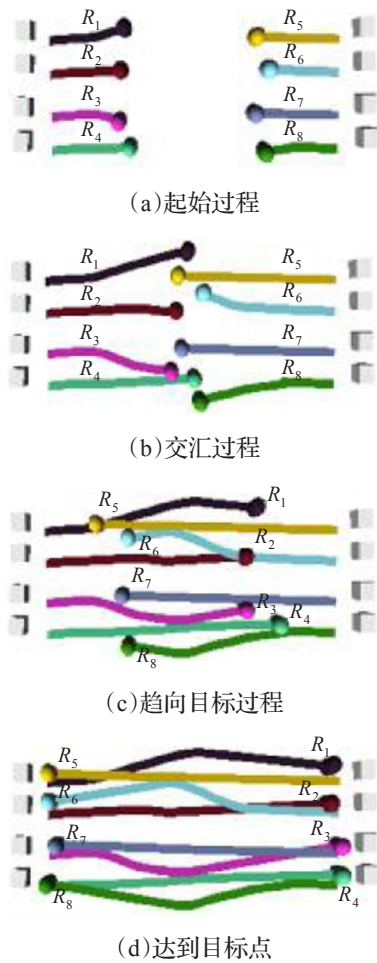


图5 双列相向而行的动态避碰过程

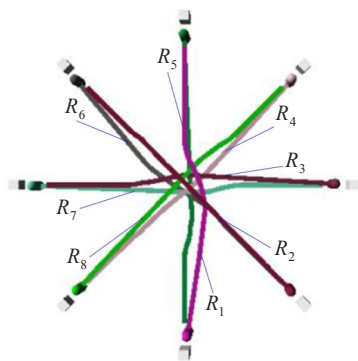


图6 圆形相向而行的动态避碰过程

图7为基于位置信息的机器人动态目标追踪过程(没有考虑速度信息),图8为基于速度障碍的机器人动态目标追踪过程。通过对比可以看出,基于位置信息的追踪方法产生了较大滞后,而本文的基于改进速度障碍的方法综合考虑位置与速度信息,对安全避碰与目标跟踪具有通用性,能够安全避开与其他机器人的碰撞危险,并实现对运动目标的及时追踪(如图8所示)。

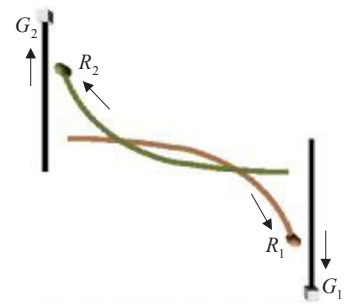


图7 基于位置信息的目标追踪

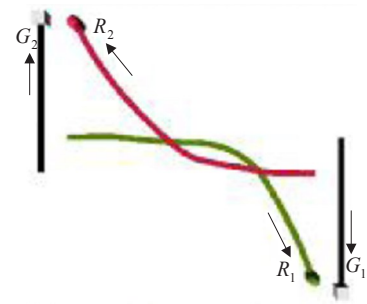


图8 基于速度障碍的目标追踪

#### 4 结束语

本文总结了速度障碍法的避碰原理,提出了一种基于速度变化空间与多步可达窗口的多机器人运动协调优化控制方法及其算法设计。仿真结果表明,该方法有效地实现了动力学约束下分布式多机器人系统的动态避碰与目标追踪,获得了较好的运动路径。本文主要讨论的是平面运动的机器人,但该原理与方法可以方便地扩展到三维空间,此外,速度变化空间中最优决策点的快速搜索算法也是今后应用中值得研究的一个问题。

#### 参考文献:

- [1] Fiorini P, Shiller Z. Motion planning in dynamic environments using the relative velocity paradigm[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1993: 560-565.
- [2] Fiorini P, Shiller Z. Motion planning in dynamic environments using velocity obstacles[J]. International Journal of Robotics Research, 1998, 17: 760-772.
- [3] 张凤, 谈大龙. 动态未知环境下基于相对坐标系的移动机器人实时运动规划[J]. 机器人, 2004, 26(5): 434-438.
- [4] 张凤, 谈大龙. 一种基于相对坐标系下移动机器人动态实时避碰的新方法[J]. 机器人, 2003, 25(1): 31-34.
- [5] 祖迪, 韩建达, 谈大龙. 加速度空间中基于线性规划的移动机器人路径规划方法[J]. 自动化学报, 2007, 33(10): 1036-1041.

(下转207页)

- 方法[J].软件学报,2003,14(6):1082-1088.
- [7] Park C H, Lee J J, Smith M J T, et al.Singular point detection by shape analysis of directional fields in fingerprints[J]. Pattern Recognition,2006,39(5):839-855.
- [8] 张俊军,练秋生.基于方向一致性的指纹中心点检测算法[J].计算机工程与应用,2008,44(5):58-60.
- [9] Cappelli R, Lumini A, Maio D, et al.Fingerprint classification by directional image partitioning[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence,1999,21(5):402-421.
- [10] Wang Y, Hu J, Phillips D.A fingerprint orientation model based on 2D Fourier expansion (FOMFE) and its application to singular-point detection and fingerprint indexing[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelli-

- gence,2007,29(4):573-585.
- [11] Fan Lingling, Wang Shuguang, Wang Hongfa, et al.Singular points detection based on zero-pole model in fingerprint images[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence,2008,30(6):929-940.
- [12] VERIFIER.Neurotechnologija Ltd[EB/OL].http://www.neurotechnologija.com.
- [13] Hong L, Wan Y, Jain A K.Fingerprint image enhancement: algorithm and performance evaluation[J].IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1998,20(8):777-789.
- [14] 梅园,孙怀江,夏德深.一种有效的指纹奇异点提取方法[J].计算机工程与应用,2008,44(28):1-3.

(上接32页)

- [7] Nieto J J, Rodriguez-Lpez R, Georgioud D N.Fuzzy differential systems under generalized metric space approach[J].Dynamic Systems and Applications,2008,17:1-24.
- [8] 王磊,郭嗣琮.线性生成的完全模糊线性微分系统[J].系统工程理论与实践,2012,32(2):341-348.
- [9] 王磊,郭嗣琮.求解一类模糊线性微分系统的结构元方法[J].模糊系统与数学,2012(3).

- [10] 郭嗣琮,苏志雄,王磊.模糊分析计算中的结构元方法[J].模糊系统与数学,2004,18(4):68-75.
- [11] He J H.Homotopy perturbation technique[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1999,178(3):257-262.
- [12] He J H.New interpretation of homotopy perturbation method[J].International Journal of Modern Physics B,2006,20(18):2561-2568.

(上接51页)

- [6] Jing Xing-Jian, Tan Da-Long, Wang Yue-Chao.Behavior dynamics of collision-avoidance in motion planning of mobile robots[C]//2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS).Piscataway,NJ,USA:IEEE,2004,2:1624-1629.
- [7] Jing Xing-Jian.Behavior dynamics based motion planning of mobile robots in uncertain dynamic environments[J].Robotics and Autonomous Systems,2005,53:99-123.
- [8] Kuwata Y, Wolf M T, Zarghitzky D, et al.Safe maritime navigation with COLREGS using velocity obstacles[C]//2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent

- Robots and Systems,2011:4728-4734.
- [9] 毛宇峰,庞永杰,李晔,等.速度矢量坐标系下水下机器人动态避障方法[J].哈尔滨工程大学学报,2010,31(2):159-164.
- [10] Belkhouche F.Reactive path planning in a dynamic environment[J].IEEE Transactions on Robotics,2009,25(4):902-911.
- [11] 朱齐丹,仲训昱,张智.基于速度变化空间的移动机器人动态避障规划[J].机器人,2009,31(6):539-547.
- [12] van den Berg J, Lin M, Manocha D.Reciprocal velocity obstacles for real-time multi-agent navigation[C]//2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation,2008:1928-1935.

(上接59页)

由式(8)得:

$$r(x, y) = [y^3(1-x) + y^2(11x^3 - 17x^2 + 5x) + y(10x^3 - 15x^2 + 3x) + (4x^3 - 6x^2 + x)] / (2y^2 - 2y + 1)$$

容易检验上式有理函数是满足插值条件的。

## 参考文献:

- [1] 王仁宏,朱功勤.有理函数逼近及其应用[M].北京:科学出版社,2004:117-183.
- [2] 苏家铎,黄有度.切触有理插值的一个新算法[J].高等学校计算数学学报,1987(2):170-176.

- [3] Salzer H E.Note on osculatory rational interpolation[J]. Math Comput,1962,16:486-491.
- [4] Wuytack L.On the osculatory rational interpolation problem[J].Math Comput,1975,29:837-843.
- [5] Floater M S, Hormann K.Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation[J].Numerische Mathematik,2007,107:315-331.
- [6] 朱功勤,郑林.矩形网格上的有理插值公式[J].自然科学进展,2009,19(5):520-525.
- [7] 李庆扬,王能超,易大义.数值分析[M].武汉:华中科技大学出版社,2006:13-30.
- [8] 王仁宏,梁学章.多元函数逼近[M].北京:科学出版,1988:30-80.