

一种 LDPC 码的联合译码算法

方毅, 张建文, 王琳

(厦门大学通信工程系, 福建 厦门 361005)

摘要: 在加性高斯白噪声(additive white Gaussian noise, AWGN)信道中设计一种低密度奇偶校验(low-density parity-check, LDPC)码的最大似然译码算法是一项具有挑战性的工作。麦克斯韦译码算法在二进制擦除信道下具有优越的性能,但把这种算法移植到其他信道却非常困难。引入了信道转换的思想实现两个不同信道之间的转换,并利用该方法成功地将麦克斯韦算法应用到 AWGN 信道中,提出了一种将信度传播算法和麦克斯韦算法有机结合的联合译码算法,即信度传播-麦克斯韦译码算法,该算法可缩小与最大似然译码算法之间的性能差距。仿真表明,该译码算法可打破大多数小陷阱集从而获得比信度传播译码算法更低的误帧率,并且可消除大多数信度传播译码后出现的小错误。

关键词: 低密度奇偶校验码; 信度传播-麦克斯韦译码; 误帧率; 小错误

中图分类号: TN 911.22

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.06.37

Joint decoding algorithm of LDPC codes

FANG Yi, ZHANG Jianwen, WANG Lin

(Department of Communication Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Designing a realizable maximum likelihood (ML) decoder for low-density parity-check (LDPC) codes is always a challenging work over an additive white Gaussian noise (AWGN) channel. Although Maxwell decoder is well known for its excellent performance over the binary erasure channel (BEC), it seems that generalizing this algorithm for other channels is difficult. This paper introduces an idea called channel transformation which could realize the conversation between two different channels. A Maxwell decoder is applied to an AWGN channel. In terms of this method, and a joint decoder-BP-Maxwell (BM) decoder is proposed which combines a belief propagation (BP) decoder and a Maxwell decoder, to reduce the gap to the ML decoder in performance. Simulation results show that the BM decoding algorithm could break most small trapping sets to accomplish a lower frame error rate (FER). Moreover it also could eliminate most of the small-scale errors compared with a BP decoder.

Keywords: low-density parity-check (LDPC) code; belief propagation-Maxwell (BM) decoder; frame error rate (FER); small-scale error

0 引言

文献[1]提出的低密度奇偶校验(low-density parity-check, LDPC)码在信度传播(belief propagation, BP)译码算法下的性能非常接近香农限,该算法已被广泛应用到 LDPC 码的译码中。然而, BP 译码对于有限长的 LDPC 码并非是一种最佳译码算法,只能作为一种次优译码算法。在加性高斯白噪声(additive white Gaussian noise, AWGN)信道中 BP 译码停止于 LDPC 码的陷阱集,该集合是导致错误地板的主要原因之一。因此,对于有限长的 LDPC 码,如

何找到一种能够有效消除陷阱集并进一步接近最大似然译码(maximum likelihood decoders, MLD)的译码算法是一项非常具有挑战性的工作。研究表明,通过改进型的 BP 算法^[2-4]或对 BP 算法进行后处理^[5-9]都可在一定程度上解决该问题,但效果并不理想。基于这种后处理技术的启发,本文尝试将那些在二进制擦除信道(binary erasure channel, BEC)中优秀的译码算法应用到 AWGN 信道中以更加有效地解决此问题。

如何改善 BEC 信道中的 LDPC 码的性能已得到广泛研究,例如,在文献[10-14]中, BEC 信道下一些好的译码

收稿日期: 2010-01-18; 修回日期: 2011-01-24。

基金项目: 国家自然科学基金(60972053)资助课题

作者简介: 方毅(1986-),男,博士研究生,主要研究方向为信道纠错编码。E-mail: wanglin@xmu.edu.cn

算法相继被提出。尤其是对具有最大似然译码性能的 Maxwell 算法的研究^[15] 为寻求其他信道中译码算法的优化方法提供了一个很好的范例。因此, 将这些性能优秀的译码算法应用到 AWGN 信道中是一项非常有意义的工作。

本文引入了一种全新的思想——信道转换, 通过这种思想可以将 BP 译码后的 AWGN 信道转换为 BEC 信道, 同时一些陷阱集转化为停止集, 从而可把 Maxwell 译码算法作为 BP 译码算法的后处理方法。由于 BEC 信道中 Maxwell 算法可以打破一部分停止集, 因此通过这种方式可消除大多数小陷阱集。简言之, 本文提出了一种信度传播- 麦克斯韦 (BP-Maxwell, BM) 的联合译码算法, 该算法将 BP 算法和 Maxwell 算法有效结合在一起。BM 译码算法只需很少的迭代次数但却比 BP 算法更接近最大似然译码。仿真结果表明, 在 AWGN 信道中, BM 译码算法性能优于 BP 译码算法, 并且当 BP 译码停止于小陷阱集时该算法的性能优势更加明显。同时, 该算法还能缩小与 MLD 的性能差距, 并为在 AWGN 信道中寻找更接近 MLD 的译码算法提供新的思路。

1 BM 译码算法

BM 译码算法包括三个步骤:

步骤 1 BP 译码;

步骤 2 信道转换(构造剩余图);

步骤 3 Maxwell 译码。

本节首先介绍一些基本符号和相关概念, 其次简述 Maxwell 译码的基本步骤, 最后详细阐述 BM 译码算法。本文余下部分所涉及的似然信息 (log-likelihood ratio, LLR) 都是指 BP 译码后变量点的似然信息。

1.1 定义与概念

LDPC 码是由稀疏的校验矩阵定义的一种线性分组码, 每个校验矩阵都可由一个含有两类节点集合的因子图表示: 一类为代表编码后比特的变量点, 另一类为代表校验约束关系的校验点。给定一个 LDPC 码, 定义: V, C 分别表示变量点集合和校验点集合; m_{vc}, m_{cv} 分别表示变量点传递给校验点的信息及校验点传递给变量点的信息; $v(c_i)$ 表示与校验点 c_i 关联的变量点集合; n_c 表示与某个变量点关联的校验点中校验和不满足的校验点个数; ε 表示 V 中被擦除变量点(擦除符号用“?”表示)的子集; 同时, 引入符号变量 x_i 来表示在停止集中的一些擦除符号, 并将 x_i 的集合记为 X 。

定义 1 剩余图 G 是指由被擦除的变量点和与之关联的校验点所构成的原因子图的一个子图。

定义 2 考虑一个校验点 c_i 和与之关联的变量点集合 $v(c_i)$ 。若与 c_i 关联的变量点的 LLR 绝对值 $|LLR_i|$ 在 $v(c_i)$ 中是第 m 小的值, 则该变量点的似然信息标志位为 m_o 。

1.2 Maxwell 译码器

Maxwell 译码算法最早是为了分析 BEC 信道下 BP 译

码和 MLD 之间的联系而提出。本节将简要介绍 Maxwell 译码的基本步骤: 在初始化过程中剩余图中的各校验点进行校验和累加, 之后 Maxwell 译码器开始进行串行译码。

步骤 1 若剩余图 G 是一个空图, 则转至步骤 6;

步骤 2 若剩余图中度为 1 的校验点个数为 0, 即译码器停止于一个非零的变量点集合(停止集)中, 则转至步骤 5;

步骤 3 在剩余图中随机选择一个度为 1 的校验点, 将该校验点的信息 m_{cv} 传递给与之关联的变量点, 并计算相关变量点的信息 m_{vc} 。若 $m_{vc} = m_{cv}$, 则删除该校验点及其关联的边。若某个变量点关联多个度为 1 的校验点, 选择一个最可靠的校验点并将其信息传递给该变量点。由于某个变量点关联的多个度为 1 的校验点的信息一定相等, 因此当有多于一个校验点含有符号变量 x_i 时, 就可以建立相应的方程, 通过解方程可以得到 x_i 的值;

步骤 4 将步骤 3 中选择的变量点的信息 m_{vc} 传递给与之关联的其他校验点并更新其信息 m_{cv} 。假设校验点原始信息为 m'_{cv} , 则 $m_{cv} = m'_{cv} \oplus m_{vc}$ (其中, \oplus 是“异或”运算符), 删除该变量点及与之关联的边。转至步骤 1;

步骤 5 随机选择一个擦除变量点 v_i 并令其信息为 $m_{vc} = x_i$ 。将该信息传递给与之关联的所有校验点并更新其 m_{cv} 值, 删除该变量点和与之关联的边。转至步骤 2;

步骤 6 若仍然存在未解出的未知数 x_i , 则通过对 BP 译码后似然信息进行硬判决得到相应的 x_i 值;

步骤 7 得到所有变量点的值并输出译码后的比特, 译码结束。

1.3 BM 译码算法

BM 译码算法三个步骤中最重要的一步是信道转换, 因为通过该步骤可以将 AWGN 信道下的译码问题转化成 BEC 信道下的译码问题, 并将 Maxwell 译码算法应用到 AWGN 信道中。BM 译码算法的详细译码过程如下:

(1) 在 AWGN 信道下传输一帧 LDPC 码, 若在 BM 译码算法步骤 1 中, BP 译码停止于一个非空的变量点集(陷阱集), 则计算该帧中校验和不满足的校验点个数 n_c 。再进行 BM 译码的后两步。

(2) 在 BM 译码算法步骤 2 中, 若 $n_c > K$ (预设的门限值), 则不进行剩余图的构造, 此时将 BP 译码结果作为 BM 的译码结果; 若 $n_c \leq K$, 则开始构造剩余图, 对于每个校验点 c_i , 选择 $v(c_i)$ 中 LLR 绝对值最小的前 ζ 个变量点, 并将这些变量点的 $|LLR_i|$ 值分别与预设的维数亦为 ζ 的门限值集合 σ 中的元素 σ_i 进行比较, 其中第 m 小的 $|LLR_i|$ 值对应与 σ 中的第 m 个值 σ_m 进行比较。然后, 按照式(1)的擦除规则进行变量点擦除, 得到擦除集合 ε

$$\begin{cases} |LLR_i| < \sigma_i, v_i = ? \\ LLR_i > + \sigma, v_i = 0 \\ LLR_i < - \sigma, v_i = 1 \end{cases} \quad (1)$$

式中, LLR_i 表示绝对值第 i 小的似然信息; α 表示 σ 中的第 i 个元素。

最后, 由集合 ε 和与之关联的校验点集合构成剩余图。至此, 信道转换步骤结束, AWGN 信道转换成对应的 BEC 信道。步骤 2 中参数 K 取值只与码长有关。而 ζ 和 σ 中的值的选择与不同的码集有关, 其中 ζ 的选取要尽量让所有的错误变量点都被擦除, 同时正确的变量点不被擦除, 因此 ζ 通常选取所有错误变量点中似然信息标志位的最大值。下文将通过实例说明如何选取这几个参数值。

(3) 在 BM 译码的步骤 3 中, 在 BEC 信道中进行 Maxwell 译码。

例 1 [(3, 6) 规则 LDPC 码, 码率 $r = 0.5$, 码长 $n = 1000$]: 在仿真过程中, 只考虑错误比特小于码长的 1% 的错误情况, 即 10 个错误比特。由于 10 错误比特至多关联 30 个校验点, 为留有一定余量, 取 $K = 45$ 。对于该 LDPC 码, 在信噪比 (E_b/N_0) = 2.8 dB 时, 似然信息标志位对应的变量点的错误概率密度函数如图 1 所示, 该函数的形状与信噪比无关。

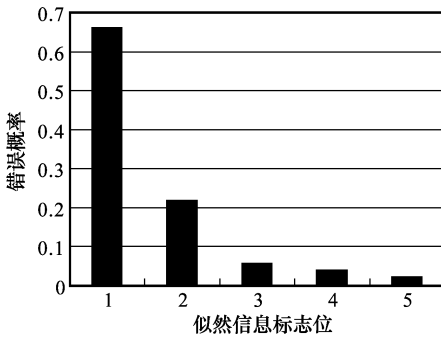


图 1 (3, 6) 规则码时似然信息标志位对应的变量点的错误概率密度函数

由图 1 可知, 在集合 $v(c_i)$ 中, 绝大多数错误的变量点对应的 $|LLR_i|$ 值是最小值, 为了尽可能将所有错误变量点都擦除, 因此取 $\zeta = 4$ (从实验观察可知, 若 $\zeta = 5$ 导致剩余图太大, Maxwell 译码器无法正常工作), 即在 BM 译码算法步骤 2 中, 在 $v(c_i)$ 中选择 4 个 $|LLR_i|$ 值最小的变量点, 并按式(2)进行擦除。

$$\begin{cases} |LLR_{\text{最小}}| < \alpha_1 (\alpha_1 = 2\sigma^h) \\ |LLR_{\text{第2小}}| < \alpha_2 (\alpha_2 = 4\sigma^h) \\ |LLR_{\text{第3小}}| < \alpha_3 (\alpha_3 = 3.25\sigma^h) \\ |LLR_{\text{第4小}}| < \alpha_4 (\alpha_4 = 3.25\sigma^h) \end{cases}, \text{擦除该变量} \quad (2)$$

式中, $LLR_{\text{最小}}$ 表示 $v(c_i)$ 中第 i 小的似然信息值; α 表示 σ 中的第 i 个元素。

不同信噪比下对应的 σ^h 的经验值如表 1 所示。参数 σ^h 及系数的值是 BM 译码算法步骤 2 中最关键的两个参数, 这两个参数值是通过分析 BP 译码后每个校验点关联的变量点 LLR 绝对值分布规律得到的, 即 σ^h 经验值的选取需

通过实验得到, σ^h 取值要能纠正尽可能多的 BP 译码后出现的小错误, 且尽量消除误判(不能将正确比特擦除)。由于 σ^h 的优化可减少信道转换过程中软信息的损失, 因此该参数的优化可以提高 BM 算法的性能。

表 1 (3, 6) 规则码的参数 σ^h 值

信噪比/dB	2.0	2.3	2.5	2.8	3.0	3.2
σ^h 值	1.60	1.80	2.05	2.65	3.20	3.70

综上所述, 对规则 LDPC 码, BM 译码中的各个参数分别为 $K = 45, \zeta = 4, \sigma$ 值为

$$\sigma = \{ \alpha_1 = 2\sigma^h, \alpha_2 = 4\sigma^h, \alpha_3 = 3.25\sigma^h, \alpha_4 = 3.25\sigma^h \}$$

(3)

式中, α_i 表示 σ 中的第 i 个元素。

例 2 [非规则 LDPC 码]: 已知非规则 LDPC 码的度分布对表示为

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 0.222 3x + 0.388 4x^2 + 0.193 4x^7 + 0.195 9x^{14} \\ \Omega(x) &= 0.183 1x^6 + 0.816 9x^7 \end{aligned} \quad (4)$$

该码的码率 $r = 0.538$, 码长 $n = 1000$, 取 $K = 45$ 。在 $E_b/N_0 = 2.8$ dB 时, 似然信息标志位对应的变量点的错误概率密度函数如图 2 所示。根据对图 2 的分析, 也取 $\zeta = 4$, 通过实验得到不同信噪比下对应的 σ^h 的经验值如表 2 所示。

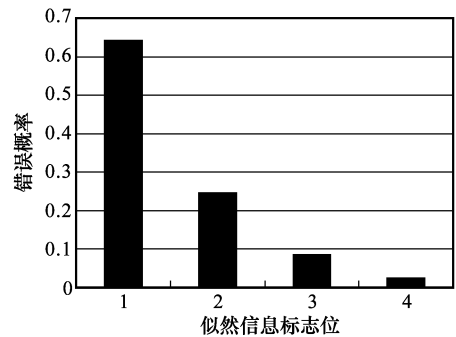


图 2 非规则码似然信息标志位对应的变量点的错误概率密度函数

表 2 非规则码的参数 σ^h 值

信噪比/dB	2.0	2.3	2.5	2.8	3.0	3.2
σ^h 值	2.40	2.70	3.00	3.20	3.65	3.80

2 BM 算法的优化

从前面部分可知 BM 译码算法的性能主要取决于信道转换的概率, 故步骤 2 是 BM 算法译码最重要的一步。因此, 优化的主要工作就是优化 BM 算法步骤 2 中的一些关键参数以改善 BM 算法的性能。

首先, 给定一个 LDPC 码, 假设其信道转换概率为 p_{trans} , Maxwell 算法和 BP 算法的误帧率 (frame error rate, FER) 分别为 P_e^M 和 P_e^{BP} 。若信道完美转换, 则有 $p_{\text{trans}} = 1$ 。根据全概率公式可得到 BM 算法的 FER 表达式为

$$\begin{aligned} P_e^{\text{BM}} &= p_{\text{trans}} \cdot P_e^M + (1 - p_{\text{trans}}) \cdot P_e^{\text{BP}} = \\ &P_e^{\text{BP}} + (P_e^M - P_e^{\text{BP}}) \cdot p_{\text{trans}} \end{aligned} \quad (5)$$

式中, P_e^{BM} 表示 BM 算法的误帧率。

从式(5)可知, 给定一个 P_e^{BP} , 可以通过提高信道转换概率 p_{trans} 或降低 Maxwell 算法的误帧率 P_e^M 来改善 BM 算法的 FER 性能。

2.1 剩余图的优化

信道转换的概率主要取决于剩余图构造的精确程度, 下面提出两种剩余图的优化算法。

2.1.1 擦除规则的优化

可以同时利用校验和值及变量点 LLR 值两个参数来对变量点进行擦除, 这种改进后的比特擦除算法步骤如下(以例 2 的非规则 LDPC 码为例)

步骤 1 若某个校验点的校验和不满足, 则按照式(2)对相应变量点进行擦除。

步骤 2 若某个校验点 c_i 校验和为 0 但与之关联的某个变量点已被擦除, 则对 $v(c_i)$ 中 $|LLR|$ 值最小的两个变量点进行擦除, 即若校验和 $S=0$ 且 $v_i = ? (v_i \in v(c_i))$, 则

$$\begin{cases} v_k = [v_i: \min_{v_i \in v(c_i)} \{|LLR|\}] \\ v_k = [v_i: \text{secondmin}_{v_i \in v(c_i)} \{|LLR|\}] \end{cases}, v_k = ? \quad (6)$$

式中, $\min_{v_i \in v(c_i)} \{|LLR|\}$ 、 $\text{secondmin}_{v_i \in v(c_i)} \{|LLR|\}$ 分别表示求 $v(c_i)$ 中 $|LLR|$ 最小、第 2 小值的函数。

通过算法可找出那些校验和满足但含偶数个错误变量点的情况。

2.1.2 门限值的优化

由于 BP 译码后发生小错误和大错误的情况下似然信息的分布规律差别很大, 小错误发生时 $|LLR|$ 均值往往比大错误发生时的大很多。因此, 根据不同的错误类型, 应分别设置不同的擦除门限值而非单一的门限值, 这样可提高剩余图的精确度。因此, 改进后的门限值设置规则表示为

$$\sigma^{th} = \begin{cases} A, & n_e < 30 \\ A - 0.5, & 30 \leq n_e < 45 \end{cases} \quad (7)$$

式中, 参数 A 是小错误情况下的 σ^{th} 值。

2.2 Maxwell 译码算法的优化

由于 BM 算法中不可能实现完美转换, 故转换概率 p_{trans} 一定小于 1。BM 算法中的 Maxwell 译码与标准的 Maxwell 译码最大的区别在于 BM 算法常会出现方程个数小于未知数个数的情况, 这种情况下无法进行 Maxwell 译码。因此, Maxwell 算法的优化关键在于如何提高上述情况下的译码性能。由于 $|LLR|$ 值的大小可表征该变量点的可靠程度, 故当方程个数小于未知数个数时, 可以在这些变量点中选取 $|LLR|$ 值最大的一部分(例如: 1/4)所对应的变量点进行硬判决, 之后再代入方程中解出其余的未知数, 仿真表明这样处理后 Maxwell 译码的性能得到一定的改善, 其硬判决规则表示为

$$\text{若 } x_i \in T, x_i = \begin{cases} 1, & |LLR_i| < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

式中, T 为集合 X 中 $|LLR|$ 值最大的那部分(例如: 1/4) 变量点的子集; LLR_i 为 x_i 的 LLR 值。

3 仿真结果及分析

本节分别给出了优化后的 BM 算法对 1.3 节例题中所用的规则码和非规则码的仿真结果和性能分析。仿真是在二位移相键控(binary phase shift keying, BPSK) 调制下通过 AWGN 信道进行的。

首先, 根据译码后每帧码字包含信息位中错误比特数的多少将错误帧分为 3 类: 第 1 类错误帧为含有的信息位错误比特数小于码长的 1% 的错误帧, 即错误比特小于 10; 第 2 类错误帧为信息位错误比特数介于码长的 1%~2% 之间的错误帧; 第 3 类错误帧为错误比特数大于码长 2% 的错误帧。

对码长 $n=1000$ 的(3, 6) 规则 LDPC 码和度分布对式(4) 所确定的非规则 LDPC 码的仿真结果如图 3、表 3、图 4 所示。图 3 描述了 BP 和 BM 译码对这两种码型的 FER 曲线。从图 3 可知对于规则码和非规则码, 在相同的 FER 条件下, BM 算法的性能增益较 BP 算法分别提高了约 0.1 dB 和 0.2 dB; 由仿真分析得到, BM 算法的时间复杂度较 BP 增加了 18% 左右。表 3 和图 4 分别描述了非规则码在 BP 译码后, 总错误帧为 100 帧(由于有时仅校验位比特出错, 故表中 BP 译码后 3 类错误帧数之和会小于 100) 的条件下, BP 译码和 BM 译码后的不同类型的错误帧分布情况, 以及两种译码后第 1 类错误帧中总错误比特总数的比较图。表 3 反映了 BM 算法可显著降低 BP 译码后的第 1 类错误帧。例如, 在 $E_b/N_0=2.5$ dB 时, BP 译码后第一类错误帧为 66 帧, 而 BM 译码之后只有 22 帧。由图 4 可知, 在不同信噪比下, BP 译码后第 1 类错误帧的错误比特总数约为 300, 而 BM 译码后基本都在 150 以下, 通过仿真可知对规则码也有类似的结论。因此, 在 AWGN 信道下对规则码和非规则码, BM 算法都可消除大多数 BP 译码中出现的小错误, 使 FER 性能得到一定的改善。

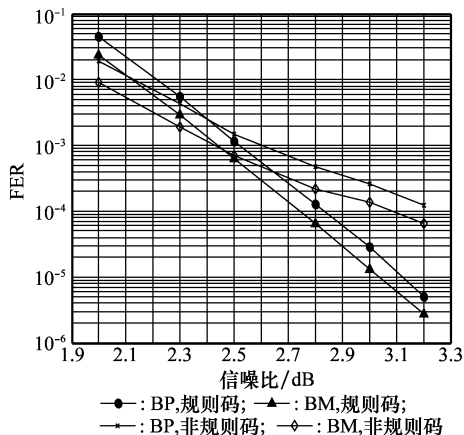


图 3 (3, 6) 规则码和非规则码的 BP 译码与 BM 译码的误帧率曲线

表3 非规则 LDPC 码 BP 译码和 BM 译码后
不同类型的错误帧分布表

信噪比/dB	2.0	2.3	2.5	2.8	3.0	3.2
第1类(BP)/帧	67	70	66	72	76	73
第2类(BP)/帧	13	10	14	12	9	7
第3类(BP)/帧	13	10	13	6	11	16
第1类(BM)/帧	19	22	22	24	32	28
第2类(BM)/帧	13	7	11	12	11	6
第3类(BM)/帧	12	10	12	6	8	16

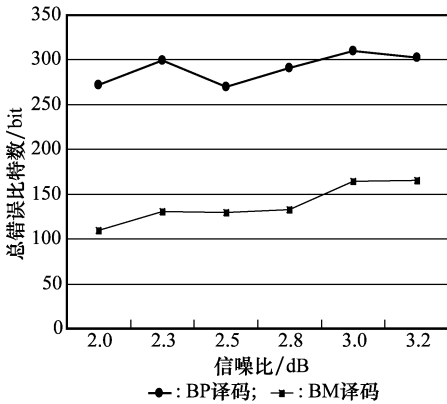


图4 非规则 LDPC 码 BP 译码和 BM 译码后第1类
错误帧的总错误比特数的比较曲线

仿真结果表明,在 AWGN 信道下传输 LDPC 码, BM 译码具有比 BP 译码更低的误帧率,且时间复杂度增加不大。但由于在信道转换过程中存在软信息的丢失,使得 BM 算法的误比特率性能优势不是非常明显。因此,更深入的剩余图优化可进一步提高 BM 算法对于 BP 算法的性能增益,这将是未来工作的一个方向。同时 BM 译码算法可以消除大多数 BP 译码算法不能消除的小错误。在 AWGN 信道中 LDPC 码的错误地板主要是由低重近码字^[16]或小陷阱集^[17]导致的,而低重近码字和小陷阱集都是由于小错误引起的。因此, BM 算法对小错误卓越的纠错性能使其可能对进一步解决 LDPC 错误地板问题有一定帮助。

4 结论

在 BEC 信道下,Maxwell 译码算法是一种最大似然译码算法。本文提出的信道转换的思想实现了 AWGN 信道与 BEC 信道之间的转换。通过该方法有效地将 BP 算法和 Maxwell 算法相结合,并提出了一种联合译码算法——BM 译码算法。仿真实验表明,在 AWGN 信道中当 BP 算法停止于一个小陷阱集时, BM 算法往往可以成功地打破这些陷阱集,而且 BM 算法具有比 BP 译码算法更好的 FER 性能,且不会增加很大的时间复杂度。因此,对于 LDPC 码而言, BM 算法可以作为向 ML 译码逼近的更好的次优算法。同时, BM 算法可在较少的 BP 迭代次数下消除大多数 BP 译码不能消除的小错误。但是,由于大错误发生时信道转换概率远低于小错误发生时的信道转换概率,因此

BM 算法对 BP 译码后出现的大错误的纠错性能并不理想。所以,进一步优化 BM 算法可能能够更加有效地解决大错误问题。

参考文献

- [1] Gallager R G. *Low density parity-check codes* [M]. Massachusetts: MIT Press, 1963.
- [2] Landner S, Hehn T, Milenkovic O, et al. Two methods for reducing the error floor of LDPC codes [EB/OL]. [2010-01-18]. <http://cdsweb.cern.ch/record/1046684>.
- [3] Yazdani M R, Hemati S, Banihashemi A H. Improving belief propagation on graphs with cycles [J]. *IEEE Communication Letters*, 2004, 8(1): 57-59.
- [4] Taghavi N M H, Siegel P H. Adaptive methods for linear programming decoding [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2008, 54(12): 5396-5410.
- [5] Han Y, Ryan W E. Low-floor decoders for LDPC codes [J]. *IEEE Trans. on Communications*, 2009, 57(6): 1663-1673.
- [6] Kang J Y, Zhang L, Ding Z, et al. A two-stage iterative decoding of LDPC codes for lowering error floors [C] // *Proc. of the Global Telecommunication Conference*, 2008: 1-4.
- [7] Varnica N, Fossorier M P C, Kavcic A. Augmented belief propagation decoding of low-density parity-check codes [J]. *IEEE Trans. on Communications*, 2007, 55(7): 1308-1317.
- [8] Zhang Z Y, Dolecek L, Nikolic B, et al. Lowering LDPC error floors by postprocessing [C] // *Proc. of the Global Telecommunication Conference*, 2008: 1-6.
- [9] Pishro N H, Fekri F. Results on punctured low-density parity-check codes and improved iterative decoding techniques [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2007, 53(2): 599-614.
- [10] Luby M, Mitzenmacher M, Shokrollahi M, et al. Efficient erasure correcting codes [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2001, 47(2): 569-584.
- [11] Di C Y, Proietti D, Telatar I E, et al. Finite length analysis of low-density parity-check codes on the binary erasure channel [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2002, 48(6): 1570-1579.
- [12] Oswald P, Shokrollahi M A. Capacity achieving sequences for the erasure channel [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2002, 48(12): 3019-3028.
- [13] Pishro Nik H, Fekri F. On decoding of low-density parity-check codes over the binary erasure channel [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2004, 50(3): 439-454.
- [14] Measson C, Montanari A, Urbanke R. Maxwell construction: the hidden bridge between iterative and maximum a posteriori decoding [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2008, 54(12): 5277-5307.
- [15] Richardson T, Urbanke R. *Modern coding theory* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [16] Mackay D J C, Postol M S. Weaknesses of Margulis and Ramanujan Margulis low-density parity-check codes [J]. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2003(74): 97-104.
- [17] Milenkovic O, Soljanin E, Whiting P. Asymptotic spectra of trapping sets in regular and irregular LDPC code ensembles [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2007, 53(1): 39-55.