

文章编号 1004-924X(2009)04-0916-07

# 由双树复数小波变换的父系数及邻域系数实现图像去噪

卢刚<sup>1</sup>, 闫敬文<sup>2</sup>, 寇业泉<sup>1</sup>, 张建中<sup>1</sup>  
(1. 厦门大学 通信工程系, 福建 厦门 361005;  
2. 汕头大学 电子工程系, 广东 汕头 515063)

**摘要:** 考虑二维双树复数小波变换(DTCWT)具有良好的平移不变性和方向选择性, 基于当前系数与父系数及邻域系数间的关系, 构造了DTCWT图像去噪阈值计算公式, 提出了一种去噪方法, PNDTCWT。该方法在对图像进行二维DTCWT变换后, 利用阈值公式, 根据当前系数和父系数及相邻系数计算收缩阈值, 对当前系数进行去噪处理。最后, 经过二维DTCWT反变换, 得到去噪结果。实验结果表明, PNDTCWT的噪声抑制效果明显优于各种基于DWT的去噪方法和其他DTCWT去噪方法。与基于父系数的DTCWT去噪方法相比, PNDTCW的峰值信噪比(PSNR)平均提高了0.5 dB左右。从视觉效果来看, PNDTCW能在去噪的同时较好地保留图像细节, 物体轮廓显得比较平滑, 不存在传统DWT算法中的混淆现象。

**关键词:** 双树复数小波变换; 父系数; 邻域系数; 阈值去噪

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A

## Dual-tree complex wavelet image denoising based on parental and neighboring coefficients

LU Gang<sup>1</sup>, YAN Jing-wen<sup>2</sup>, KOU Ye-quan<sup>1</sup>, ZHANG Jian-zhong<sup>1</sup>

(1. *Department of Communication Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China;*  
2. *Department of Electronic Engineering, Shantou University, Shantou 515063, China*)

**Abstract:** By considering the advantages of the 2D Dual Tree Complex Wavelet Transfer (DTCWT) in shift invariance and directionality, a threshold denoising formula based on parental and neighboring coefficients is constituted and a novel Parental and Neighboring DTCWT (PNDTCWT) image denoising method is presented. By proposed method, the shrinkage threshold of each coefficient is calculated to use in denoising for the current coefficient. After 2D DTCWT transfer to an original image, the final image is obtained by the inverse DTCWT of these denoised coefficients. Experimental results show that the denoising performance of the PNDTCWT is better than those of other denoising methods based on DWT or other DTCWT methods, and its Peak Signal Noise Ratios (PSNRs) have improves by 0.5 dB averagely as compared with that of parental coefficients based DTCWT denoising method. In terms of visual quality, PNDTCWT can get the images with more details, smooth profiles and without confusion effect.

收稿日期: 2008-11-11; 修订日期: 2008-12-23.

基金项目: 航空科学基金资助项目(No. 05F07001); 国家自然科学基金资助项目(No. 60472081)

**Key words:** Dual-tree Complex Wavelet Transform (DCWT); parental coefficient; neighboring coefficient; threshold denoising

### 1 引 言

图像中不可避免地存在噪声<sup>[1]</sup>。近年来, 基于离散小波变换(DWT)的图像去噪方法对加性高斯白噪声的去除取得了较好的效果<sup>[2-3]</sup>。但是传统的离散小波变换不具有位移不变性(非抽样小波除外), 在对图像去噪处理后会产 生混淆现象, 并缺乏方向性。针对传统小波的局限性, Kingsbury 提出了双树复数小波变换<sup>[4-7]</sup> (DTCWT)法。DTCWT 具有平移不变性、较好的方向性和精确的相空间信息, 其去噪效果明显优于可分离二维离散小波变换<sup>[8-11]</sup>。

由于实际图像的小波系数之间具有较强的相关性, 选取好的系数概率分布模型来反映这种相关性, 能够取得更好的去噪效果<sup>[12-13]</sup>。文献 [14] 提出了一种基于父系数的小波去噪方法, 由于没用到相邻系数的相关性, 去噪效果无法进一步提升。本文首先推导出基于父系数及邻域系数的 DTCWT 图像去噪阈值计算公式, 然后提出一种基于父系数及邻域系数的 DTCWT 图像去噪新方法 PNDTCWT。PNDTCWT 先对原始图像进行 DTCWT 变换, 然后采用基于父系数及相邻系数模值统计分布的层间和层内模型, 根据阈值公式计算出每个系数的最佳阈值, 对每个高频图像系数进行阈值去噪, 最后将去噪系数进行 DTCWT 反变换得到去噪结果图像。实验结果表明, PNDTCWT 对于图像去噪可取得比较好的效果, 优于目前常用的基于 DWT 的去噪声方法。

### 2 双树复数小波变换的原理

离散小波变换(DWT)不符合 Nyquist 采样率, 不具备平移不变性, 同时 DWT 的变换系数缺乏良好的方向选择性。Kingsbury 等人提出了双树复数小波变换(DTCWT)来克服这两个问题。对于二维双树复数小波变换:  $\Psi(x, y) = \Psi(x)\Psi(y)$ , 如果  $\Psi(x)$  是复数, 则有:

$$\Psi(x, y) = [\Psi_h(x) + i\Psi_g(x)] [\Psi_h(y) + i\Psi_g(y)] = [\Psi_h(x)\Psi_h(y) - \Psi_g(x)\Psi_g(y)] + i[\Psi_g(x)\Psi_h(y) + \Psi_h(x)\Psi_g(y)] \quad (1)$$

双数复数小波变换可以通过两对滤波器组共同作用在输入数据上来实现, 如图 1 所示。它包

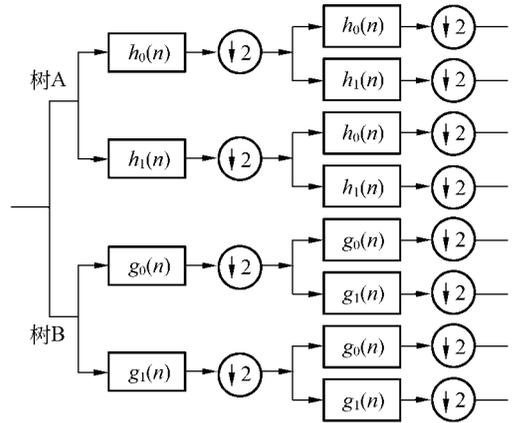


图 1 二维双树复数小波变换

Fig. 1 Two dimensional dual-tree complex wavelet transform

含了两个平行的小波树, 即树 A 和树 B 两个分支, 其中上部树 A 的叠加滤波器组表示复数小波变换的实部, 下部树 B 的叠加滤波器组表示复数小波变换的虚部。h<sub>0</sub>(n)和 h<sub>1</sub>(n)表示共轭正交滤波器对, g<sub>0</sub>(n)和 g<sub>1</sub>(n)表示共轭积分滤波器对。与滤波器对 h<sub>0</sub>(n)、h<sub>1</sub>(n)相对应的实数值尺度函数  $\varphi_h$  和小波函数  $\Psi_h(t)$  定义如下:

$$\varphi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \varphi_h(2t - n) \quad (2)$$

$$\Psi_h(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \varphi_h(2t - n)$$

同样地, 与滤波器对 g<sub>0</sub>(n)、g<sub>1</sub>(n)相对应的实数值尺度函数  $\varphi_g(t)$  和小波函数  $\Psi_g(t)$  定义如下:

$$\varphi_g(t) = \sqrt{2} \sum_n g_0(n) \varphi_g(2t - n) \quad (3)$$

$$\Psi_g(t) = \sqrt{2} \sum_n g_1(n) \varphi_g(2t - n)$$

对第一层分解, 如果两树滤波器之间的延迟恰好是一个采样间隔, 那么可以确保树 B 中第一

层的二抽样正好采样到树 A 中因为二抽样所丢失的采样值,这样就等价于没有进行二抽样;对于以后的各层分解,为了保证两树在该层和所有前层上产生的延迟差的总和相对于原始输入是一个采样周期,两树对应的滤波器的相频响应之间应有半个采样周期的群延迟,而且两个滤波器的幅频响应相同。为了保证线性相位,采用双正交小波变换,要求一树的滤波器为奇数长,另一树的滤波器为偶数长。如果在每树的不同层次间交替采用奇偶滤波器,则这两树就会呈现好的对称性。

DTCWT 可显著改善 DWT 的平移敏感性和方向选择性。二维 DTCWT 产生了 6 个方向的高频子图像,分别指向  $\pm 15^\circ, \pm 45^\circ$  和  $\pm 75^\circ$ , 具有很强的方向性。二维 DTCWT 具有 4 : 1 的冗余,提高了纹理特征的抗干扰性。

### 3 基于父系数及邻域系数的 DTCWT 图像阈值计算

DTCWT 分解后,当前系数、父子系数和相邻系数间有着较强的相关性,由父系数和相邻系数决定的某一系数的概率密度函数被认为是高斯分布<sup>[11]</sup>,可用 Bayes 估计器通过邻接系数的估计值来对当前系数进行估计。

若  $w_1$  代表当前系数值,  $w_2$  代表  $w_1$  的父系数值,  $w_3$  代表  $w_1$  的相邻系数,则有:

$$y = w + n, \tag{4}$$

其中,  $w = (w_1, w_2, w_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  和  $n = (n_1, n_2, n_3)$ 。

对给定的  $y, w$  的最大后验概率(MAP)为:

$$\hat{w}(y) = \arg \max_w p_{w|y}(w|y). \tag{5}$$

根据概率公式,经过推导后,该式可改写为:

$$\hat{w}(y) = \arg \max_w \left[ \frac{p_{y|w}(y|w) \cdot p_w(w)}{p_y(y)} \right] = \arg \max_w \left[ \frac{p_n(y-w) \cdot p_w(w)}{p_y(y)} \right]. \tag{6}$$

根据 Bayes 法则,式(6)可用噪声的概率密度和小波系数的先验概率密度来表示。因为噪声信号为独立分布的高斯白噪声,其概率密度函数可写为:

$$p_n(n) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_n^3} \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{2\sigma_n^2}\right). \tag{7}$$

计算小波系数的联合概率密度函数时,针对二维情况(只考虑父系数和当前系数),将 Corel

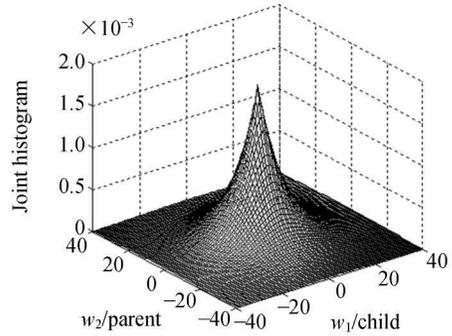


图 2 小波系数的父子系数联合直方图

Fig. 2 Joint parent-child histogram of wavelet coefficients

图库中的 200 幅的图像进行直方图计算,得到的结果如图 2 所示。根据图 2 可得系数三维概率密度的近似表示为:

$$p_w(w) = \frac{3^{3/2}}{4\pi\sigma^3} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sigma} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}\right). \tag{8}$$

由于式(8)不能写成  $w_1, w_2$  和  $w_3$  的概率密度函数的乘积,因此不相互独立。在式(6)右边取对数可得:

$$\hat{w}(y) = \arg \max_w [\log(p_n(y-w)) + \log(p_w(w)) - \log(p_y(y))]. \tag{9}$$

设  $f(w) = \log(p_w(w))$ , 根据式(7), 或(9)可改写为:

$$\hat{w}(y) = \arg \max_w \left[ -\frac{(y_1 - w_1)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(y_2 - w_2)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(y_3 - w_3)^2}{2\sigma_n^2} + f(w) - \log(p_y(y)) \right]. \tag{10}$$

如果  $p_w(w)$  是凸函数而且可微, 即有:

$$\frac{y_i - \hat{w}_i}{\sigma_n^2} + f_i(\hat{w}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{11}$$

其中  $f_1, f_2$  和  $f_3$  表示  $f(w)$  分别对  $w_1, w_2$  和  $w_3$  的偏微分函数。

根据式(8),  $f(w)$  可写为:

$$f(w) = \log\left(\frac{3^{3/2}}{4\pi\sigma^3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{\sigma} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}. \tag{12}$$

于是有:

$$f_i(w) = -\frac{\sqrt{3}w_i}{\sigma \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{13}$$

根据式(11)和式(13), 对 MAP 的估计为:

$$\hat{w}_i = y_i - \frac{\sqrt{3}\sigma_n \hat{w}_i}{\sigma \sqrt{y_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} \approx y_i - \frac{\sqrt{3}\sigma_n y_i}{\sigma \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} = \left( \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} - \sqrt{3}\sigma_n}{\sigma} \right) \cdot y_i, i=1, 2, 3. \quad (14)$$

式(14)中约等号成立是因为求的是信号幅值的比值。当  $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} < \frac{\sqrt{3}\sigma_n}{\sigma}$  时,  $w_i = 0$ 。于是可得到当前系数基于父系数及相邻系数的去噪阈值公式为:

$$\hat{w}_i = \begin{cases} \frac{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} - \sqrt{3}\sigma_n)}{\sigma} \cdot y_i, & \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \geq \frac{\sqrt{3}\sigma_n}{\sigma} \\ 0 & \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} < \frac{\sqrt{3}\sigma_n}{\sigma} \end{cases}, \quad (15)$$

#### 4 基于父系数及邻域系数的 DTCWT 图像去噪方法

基于父系数及邻域系数的 DTCWT 图像阈值去噪算法流程如下:

(1)对输入噪声图像进行 2D 双树复数小波变换;

(2)假设  $w_j^i$  是第  $j$  级第  $i$  个方向上的高频分解子图像系数, 用公式

$$\sigma_n = \text{median}(|w_j^i|) / 0.6745. \quad (16)$$

对噪声方差进行估计;

(3)对变换得到的高频子图像(除了最高层子图像)的所有系数, 进行步骤(4)~(8)的操作;

(4)读取当前系数  $Y\_coef$  和父系数  $Y\_parent$ ;

(5)计算不包括  $Y\_coef$  的  $3 \times 3$  邻域系数的方差  $Y\_adjacent$ ;

(6)用  $Y\_coef$  的  $5 \times 5$  邻域系数估计当前系数的方差  $\text{var}(y)$ ;

(7)进行阈值计算:

$$\sigma_x = \max(0, \text{var}(y) - \sigma_n^2) \quad (17)$$

$$T = \sqrt{3} \times \sigma_n^2 / \sigma_x$$

(8)用阈值去噪方法进行当前系数去噪

(a) 计算当前系数、父系数和邻域系数的总能量的平方根:

$$M = \sqrt{|Y\_coef|^2 + |Y\_parent|^2 + |Y\_adjacent|^2}. \quad (18)$$

(b) 用阈值去噪法进行当前系数去噪:

if ( $M \geq T$ )

$$Y\_coef\_new = Y\_coef \times \frac{M-T}{M}$$

else

$$Y\_coef\_new = 0$$

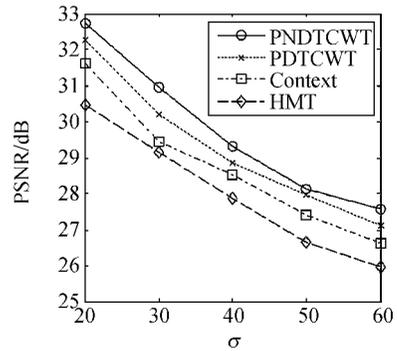
end

(9)对去噪后的子图像进行 2D 双树复数小波反变换得到去噪结果图像。

#### 5 实验结果与分析

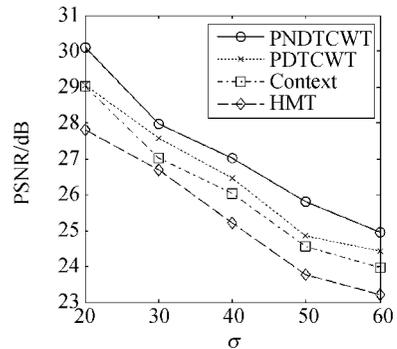
为了验证本文方法的有效性, 本文选择 Lena512 和 Barbara512 图像作为测试对象, 对图像加入不同程度的高斯白噪声, 将基于隐马尔可夫树模型的小波去噪法(HMT)、基于 Context 模型的空间自适应小波去噪法、基于父系数的 DTCWT 去噪法(PDTCWT)与本文算法(PNDTCWT)进行了比较。PNDTCWT 中双树复数小波变换采用 Fsfarras 基, 分解了 6 层。

图 3 为在不同噪声情况下, 4 种算法去噪后



(a) Lena512 图像

(a) Lena512 image



(b) Barbara512 图像

(b) Barbara512 image

图 3 四种去噪方法结果对比

Fig. 3 Comparison of four denoising methods

的 PSNR 值的比较结果,图 4 是 Lena512 图像去噪前后测试图像的视觉效果。从实验结果,可以得出如下结论:

(1)从图 3 可以看出,PNDCWT 在 PSNR 上明显高于其他 3 种算法。对于测试的噪声级别,PNDCWT 的 PSNR 平均高出其它算法 0.5 dB 以上。对于图像纹理来说简单的(图 3(a))要比复杂的(图 3(b))PSNR 高。

(2)从图 4 的去噪效果图比较来看,PNDCWT 在恢复图像轮廓信息方面有较好的效果。图中大部分的噪声都被去掉,能直观感受到图像质量的改善。与其它小波去噪算法相比,在不同噪声条件下,该算法在主观视觉效果上明显占优势,充分反映了该算法在去噪性能方面的优越性。

(3)CWT 双树之间的半采样延迟性能以及均匀采样所产生的 6 个方向小波较好地限制了 DWT 下采样所产生的位移变换以及边缘的混淆现象,由于 CWT 包含了更多的方向信息,相对于 DWT 来说,对于大尺度的直线边缘降噪后产生的波纹较少,这可从降噪后 Lena512 图像的帽沿看出来;在小的细节上由于更多的方向信息的融



(a)原始图像  
(a)Original image



(b)加噪图像(PSNR= 19.11 dB)  
(b)Noisy image(PSNR= 19.11 dB)



(c)HMT(PSNR= 27.94 dB)



(d)Context(PSNR=28.53 dB)



(e)PDTWT(PSNR= 29.01 dB)



(f)PNDCWT(PSNR= 29.51 dB)

图 4 Lena512 去噪效果图

Fig.4 Denoising results of Lena512

合使得多纹理的复杂边缘比起 DWT 来说降噪效果更为清晰,这可以从降噪后 Lena512 图的头发部分的纹理清晰程度看出。

(4) 从图象的整体效果来看,PNDCWT 图像降噪算法能够很好地保持图像边缘和细节并抑制混淆现象,且降噪后的图像较为清晰。

## 6 结论

双树复数小波变换是在小波变换的基础上提出的一种新的信号分析方法,该方法克服了经典实数小波变换的缺点,具有平移不变性、良好的方向性和精确的相空间信息,因此可以提高图像

的去噪效果,并达到较好的视觉效果。本文首先根据高斯噪声模型推导得出一个小波系数去噪的阈值计算公式,然后提出了一种新的基于双树复数小波变换的图像去噪方法 PNDCWT。因为去噪中利用了父系数及相邻系数的相关性,确定的阈值更精确,取得了良好的去噪效果。实验结果表明 PNDCWT 去噪图像的 PSNR 比其它去噪方法高 0.5 dB 以上。由去噪结果图像可以看出,该方法能有效地保护图像纹理信息,去噪图像中物体的细节部分比较清晰,物体边缘连续性比较好。应注意的是,因为 2D 双树复数小波变换具有数据冗余度,其变换系数比输入信号需要更多的存储空间,所以不适合于图像的压缩。

## 参考文献:

- [1] 闫伟,于子江,于晓,等. 电晕探测紫外 ICCD 相机图像噪声分析与处理[J]. 光学精密工程, 2006, 14(4): 709-713.  
YAN F, YU Z J, YU X, et al.. Noise analysis and processing of ultraviolet ICCD for corona detection [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(4): 709-713. (in Chinese)
- [2] 同武勤,凌永顺,黄超超,等. 数学形态学和小波变换的红外图像处理方法[J]. 光学精密工程, 2007, 15(1): 139-144.  
TONG W Q, LING Y SH, HUANG CH CH, et al.. Processing method of IR image based on mathematical morphology and wavelet transform [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(1): 139-144. (in Chinese)
- [3] 曹万鹏,陈刚,车仁生,等. 一种基于小波变换的照明无关边缘检测和模糊增强方法[J]. 光学精密工程, 2007, 15(7): 1144-1150.  
CAO W P, CHEN G, CHE R SH, et al.. An illumination-independent edge detection and fussy enhancement [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(7): 1144-1150. (in Chinese)
- [4] MAGAREY J F A, KINGSBURY N G. Motion estimation using a complex-valued wavelet transform [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing, Special Issue on Wavelets and Filter Banks*, 1998, 46(4): 1059-1084.
- [5] KINGSBURY N G. The dual-tree complex wavelet transform: a new technique for shift invariance and directional filters [C]. *IEEE Digital Signal Processing Workshop, DSP98, Bryce Canyon*, 1998: 86.
- [6] KINGSBURY N G. Image processing with complex wavelets [C]. *Phil. Trans. Royal Society London A on a Discussion Meeting on "Wavelets: the key to intermittent information?"*, London, 1999: 24-25.
- [7] KINGSBURY N G. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals [J]. *Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2001, 10(3): 234-253.
- [8] CHEN G Y, BUI T D, KRZYZAK A. Image denoising using neighbouring wavelet coefficients [C]. *Acoustics Speech and Signal Processing, 2004 Proceedings (ICASSP '04), IEEE International Conference*, 2004(2): 17-21.
- [9] HOU J, XIONG C. Image denoising algorithm based on neighboring thresholding classification in wavelet domain [C]. *Signal Processing, the 8th International Conference*, 2006(1): 16-20.
- [10] YANG J Y, WANG Y, XU W L, et al.. Image coding using dual-tree discrete wavelet transform [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(9): 1555-1569.
- [11] WAI L CH, HYEOKHO C, RICHARD G B. Coherent multiscale image processing using dual-tree quaternion wavelets [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(7): 1069-1082.
- [12] MARK M, NICK K. Image denoising using derotated complex wavelet coefficients [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(9): 1500-1511.
- [13] 肖弘智, 闫敬文, 屈小波. 基于 Surfacelet 变换的

3D Context 模型视频去噪新方法[J]. 电子学报, 2008, 36(7): 1460-1464.  
XIAO H ZH, YAN J W, QU X B. A novel video de-noising method with 3D Context model based on surfacelet transform [J]. *Chinese Journal of Elec-*

*tronics*, 2008, 36(7): 1460-1464. (in Chinese)

- [14] LEVENT S, IVAN W S. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(11): 2744-2756.

#### 作者简介:



卢刚(1977-),男,重庆人,厦门大学通信工程系博士研究生,主要研究方向为图像/视频压缩和去噪。E-mail: lugang518@126.com



寇业泉(1986-),男,福建泉州人,2008年毕业于厦门大学通信工程系,获工学学士学位,现为厦门大学通信工程系硕士研究生。主要研究方向:图像/视频压缩和去噪。E-mail: yequan010@sina.com



张建中(1963-),男,四川成都人,工学博士,教授,博士生导师,主要从事智能信息处理、随机信号处理、成像与图像处理、通信网络分析等方面的理论及其应用研究工作。E-mail: zhangjz@xmu.edu.cn

#### 导师简介:



闫敬文(1964-),男,吉林磐石人,博士,博士生导师,汕头大学电子工程系教授,中国通信学会会员,中国图像图形学会理事,主要研究方向为小波理论及其应用、图像压缩、图像处理和分析、遥感图像处理及其软件开发等。E-mail: jwyan@stu.edu.cn

#### ● 下期预告

## 微切削加工中切削力的理论与实验

李晓舟,于化东,许金凯,李一全,赵平  
(长春理工大学机电工程学院,吉林长春 130022)

微切削过程中的切削力严重影响刀具寿命及零件加工精度,因此,深入研究微切削过程中的切削力变化规律及影响因素,是确定合理加工参数、加工工艺及提高加工系统性能的基础。本文在考虑刀具钝圆半径存在的条件下,采用轴对称原理建立了微切削力理论公式及微切削模型,通过实验研究了切削用量、刀具材料及工件材料对切削力的影响,验证了理论分析的正确性。研究表明:在切深  $a_p$  为 0.002~0.032 mm,进给量  $f$  为 0.01~0.20 mm/r,切削速度  $v$  为 20~120 m/min 情况下,  $F_z$  的变化范围为 10 gf~10<sup>3</sup> gf,  $F_y$  的变化范围为 4 gf~70 gf;减小刀具钝圆半径会减小刀具后刀面与工件的接触长度,并且会减小切削刃以下部分金属的变形,有利于获得高质量的加工表面;控制切削层厚度与刀具钝圆半径比值可实现控制切削速度对切削力的影响;控制走刀量、切深与刀具钝圆半径比值可实现控制切削力  $F_z/F_y$  比值。