

# 引入探测信号的最小方差对偶控制

刘青峰, 蔡建立

(厦门大学信息科学与技术学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 本文针对未知参数的最小方差控制问题, 提出了一种在谨慎控制器基础上加入探测信号的控制策略。利用系统方差在参数辨识好坏时的变化调节探测信号的大小, 避免了单纯使用谨慎控制所产生“关断”现象。与其它次优对偶控制相比, 引入探测信号的最小方差对偶控制不仅计算量小易于实现, 而且能够根据需要设计控制系统的动态性能、参数跟踪能力。

**关键字:** 探测信号; 最小方差; 对偶控制; 对偶特性

中图分类号: TP14 文献标识码: A 文章编号: 1003-7241(2009)05-0014-04

## Dual Control With Probing for the Minimum Variance Problems

LIU Qing-feng, CAI Jian-li

(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen 361005 China)

**Abstract:** This paper presents a dual control strategy with a probing signal for the minimum variance control problems with unknown parameters. The probing signal can be adjusted according to the variance change of the system to avoid the ‘turn off’ phenomenon which occurred with only caution control. Comparing with other sub-optimal dual controls, the dual control which introduces a probing signal can improve the dynamic properties and the parameter’s tracking ability to meet the requirements of the control system.

**Key words:** probing signal; minimum variance; dual control; dual property

### 1 引言

40年前, 对于参数未知的随机自适应系统, 前苏联学者 Feldbaum 提出了对偶控制<sup>[1]</sup>(dual control)。他提出了最优自适应系统的控制信号应该具有的两种主要特性, 1系统输出谨慎跟随控制目标, 2充分的激励装置提高参数估计作用, 以提高未来的控制质量。这就是所谓的对偶特性, 具有这两种特性的自适应控制系统称为对偶控制系统。求解对偶控制的方法是采用动态规划, 得出一个含有容许控制策略的阶段损失函数的泛函方程, 称为 Bellman 方程。然而 Bellman 方程最优解的解析形式无法求出, 采用数值方法求解 Bellman 方程计算量大, 仅有少数非常简单的问题可以解决。在这种情况下, 产生了许多次优的解决方案。其中有: 在谨慎控制器中加入探测信号, 限定控制参数的方差, 使用连续扩展损失方程, 修改损失方程, 有限参数集法, 使用鲁棒控制设计思想等方法<sup>[2]</sup>。1974年, J. Alster 等对一步超前的最小方差控制问题通过附加估计的方差约束<sup>[3]</sup>, 获得了一个次优的对偶控制策略; 1982年, C. S. Padilla 等通过引入新息给出了系统参数未知但为常数的最小方差控制问题<sup>[4]</sup>; 1994年, A. Maitelli 等利用预测

控制方法给出了二步最小方差控制问题的一个次优算法<sup>[5]</sup>; 2004年, 钱富才等提出了系统模型为差分方程且系统参数未知的两级优化算法对偶控制<sup>[6]</sup>; 2008年, 高振斌等将互信息引入参数未知随机系统作为性能指标, 得到了基于最大互信息指标的对偶控制<sup>[7]</sup>。

在谨慎控制器中加入探测信号<sup>[8]</sup>, 激励信号可以使控制器参数收敛, 使控制具有优越性。虽然加入额外探测信号会很自然的增加近期控制误差, 但却会在未来的时刻减小控制误差<sup>[9]</sup>。然而应该何时加入多大的探测信号, 尚未有系统的方法给出指导<sup>[2]</sup>。本文提出了一种在谨慎控制的基础上加入探测信号的方法, 利用系统参数辨识的好坏自动调节探测信号的大小, 避免了单纯使用谨慎控制所产生“关断”现象, 实现系统的次优对偶控制。

### 2 问题描述

#### 2.1 模型

考虑离散时间、单输入单输出系统:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1(t)y(t-1) + \dots + a_n(t)y(t-n) \\ = b_0(t)u(t-1) + \dots + b_{n-1}(t)u(t-n) + e(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $y$  为输出,  $u$  为输入,  $e$  为扰动,  $\{e(t)\}$  是均值为零、方差为  $R_2$  的高斯白噪声序列。并且假定  $e(t)$  与  $y(t-1)$ ,

收稿日期: 2009-01-04

$y(t-2), \dots, u(t-1), u(t-2), \dots, a_i(t), a_i(t-1), \dots$ , 以及  $b_i(t), b_i(t-1) \dots$  之间是相互独立的, 假定  $b_0(t) \neq 0$ , 对于所有  $t$  系统都是最小相位的。

时变参数:

$$x(t) = (b_0(t) \ \dots \ b_{n-1}(t) \ a_1(t) \ \dots \ a_n(t))^T \quad (2)$$

为 Gauss - Markov 过程, 满足随机差分方程:

$$x(t+1) = \Phi x(t) + v(t) \quad (3)$$

其中: 系统矩阵  $\Phi$  为已知常数矩阵,  $\{v(t)\}$  是均值为零、方差为  $R_1$  独立同分量正态随机向量。假设(3)式中系统的初始状态  $x(0)$  为正态分布, 均值:

$$E x(0) = m \quad (4)$$

方差:

$$\text{cov}\{x(0), x(0)\} = R_0 \quad (5)$$

假定  $e(t)$ 、 $v(t)$  和  $x(0)$  相互独立。方程(1)的输入输出关系可写成如下形式:

$$y(t) = \mathbf{j}^T(t-1)x(t) + e(t) \quad (6)$$

这里:

$$\mathbf{j}^T(t-1) = (u(t-1) \ \dots \ u(t-n) \ -y(t-1) \ \dots \ -y(t-n)) \quad (7)$$

为观测矩阵, 模型的定义由方程(3)、(6)给出。

### 2.2 准则

控制目标是极小化下列损失函数, 使输出与参考输入  $u_c(t)$  差异尽可能小:

$$J_N = E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - u_c(t))^2 \right\} \quad (8)$$

其中:  $E$  表示数学期望, 称以上为损失函数为  $N$  阶准则。当  $N=1$  时, 为一步超前自适应控制也称为谨慎控制。

### 2.3 容许控制策略

如果控制策略  $u(t)$  是所有观测输出包括时间  $t$  的函数则控制策略是容许的。令  $g$  表示所有输出值包括  $y(t)$  的组合, 即  $g$  是由  $y(t), \dots, y(0)$  和  $x(0)$  所产生的  $s$ -代数。

## 3 引入探测信号的对偶控制

### 3.1 参数估计

引理1<sup>[10]</sup>状态空间的条件分布: 假设模型(3)输出由(6)式定义,  $e(t)$  和  $v(t)$  分别是方差为  $R_2$  和  $R_1$  均值为零的高斯变量, 系统的初始状态由式(4)和(5)给出。则  $x(t)$  为在  $g_{t-1}$  条件下以  $\hat{x}(t)$  为均值  $P(t)$  为方差的高斯分布, 并满足以下差分方程:

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t) + \mathcal{K}(t)(y(t) - \vartheta^T(t-1)\hat{x}(t)) \\ P(t+1) = [\Phi - \mathcal{K}(t)\vartheta^T(t-1)]P(t)\Phi^T + R_1 \\ \mathcal{K}(t) = \Phi P(t)\vartheta(t-1)(R_2 + \vartheta^T(t-1)P(t)\vartheta(t-1))^{-1} \end{cases} \quad (9)$$

其初始状态为:

$$\hat{x}(0) = m$$

$$P(0) = R_0$$

此外,  $y(t)$  的条件分布为高斯分布, 均值为:

$$m_y(t) = \mathbf{j}^T(t-1)\hat{x}(t)$$

方差为:

$$s_y^2 = R_2 + \mathbf{j}^T(t-1)P(t)\mathbf{j}(t-1)$$

### 3.2 确定性等价控制

在(1)中参数已知的情况下可得:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \mathbf{j}^T(t)x(t+1) + e(t+1) \\ &= b_0(t+1)u(t) + \mathbf{j}^T(t)x(t+1) + e(t+1) \end{aligned}$$

其中:

$$\mathbf{j}^T(t) = (0 \ u(t-1) \ \dots \ u(t-n+1) \ -y(t) \ \dots \ -y(t-n+1))$$

在  $x(t+1)$  和  $b_0(t+1)$  已知时可得到最优控制:

$$u(t) = \frac{u_c(t+1) - \mathbf{j}^T(t)x(t+1)}{b_0(t+1)} \quad (10)$$

当参数  $x(t+1)$  和  $b_0(t+1)$  未知时, 用其估计值  $\hat{x}(t+1)$  和  $\hat{b}_0(t+1)$  代替, 可以得到(11)式:

$$u_{cE}(t) = \frac{u_c(t+1) - \mathbf{j}^T(t)\hat{x}(t+1)}{\hat{b}_0(t+1)} \quad (11)$$

称为确定性等价控制(Certainty Equivalence Control), 简称 CE 控制。

### 3.3 谨慎控制

在(8)式中当  $N=1$  时根据引理1,  $y(t+1)$  为高斯条件概率分布, 其均值为  $\mathbf{j}^T(t)\hat{x}(t+1)$ 、方差为  $R_2 + \mathbf{j}^T(t)P(t+1)\mathbf{j}(t)$ , 则有:

$$\begin{aligned} E \{ (y(t+1) - u_c(t+1))^2 | g_t \} &= (\mathbf{j}^T(t)\hat{x}(t+1) - u_c(t+1))^2 + \mathbf{j}^T(t)P(t+1)\mathbf{j}(t) + R_2 \\ &= (\mathbf{j}^T(t)\hat{x}(t+1) + \hat{b}_0(t+1)u(t) - u_c(t+1))^2 \\ &\quad + \mathbf{j}^T(t)P(t+1)\mathbf{j}(t) + u^2(t)p_{b_0}(t+1) \\ &\quad + 2u(t)\mathbf{j}^T(t)P(t+1)l + R_2 \end{aligned} \quad (12)$$

第一个等式可由标准方程:

$$E(z^2) = m^2 + p$$

得到, 其中  $z$  为均值为  $m$  方差为  $p$  的高斯变量。列向量  $l$  的作用是从矩阵  $P(t)$  中分离出第一列:

$$l^T = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$P_{b_0}$  是参数估计值  $\hat{b}_0$  的方差, 方程(12)为  $u(t)$  的二次型, 最小化(12)式可以得到谨慎控制 (Caution Control):

$$u_{caution}(t) = \frac{\hat{b}_0(t+1)u_c(t+1) - \mathbf{j}^T(t)(\hat{b}_0(t+1)\hat{x}(t+1) + P(t+1)l)}{\hat{b}_0^2(t+1) + p_{b_0}(t+1)} \quad (13)$$

(13)式也称作一步超前控制。

### 3.4 引入探测信号

确定性等价控制与谨慎控制代表对偶控制中的两种不同控制作用。确定性等价控制将系统估计参数作为已知参数使用, 简化了随机自适应控制问题, 保证了系统的稳定性, 但忽略估计参数

的误差和不确定性,控制起来过于“大胆”,不具备良好的暂态特性<sup>[4]</sup>。而谨慎控制则将参数的不确定性引入控制,使得系统输出与控制目标的差最小但又过于谨慎,如果参数估计不准确且参数值过小,则可能出现误差协方差阵,从而使控制量变小。小的控制量又会进一步恶化参数估计的精度,如此反复循环,最终使控制量减小为零。这种由于控制器过于谨慎而造成的控制中断现象称为“关断”现象。

对偶控制的关键是在辨识系统参数与跟随控制目标两者之间取得平衡。为了使控制中即考虑参误差的不确定性又避免“关断”现象,在 Caution 控制的基础上引入探测信号,组成新的次优对偶控制器。

对于由(1)式描述的系统,  $\{e(t)\}$  为零均值、协方差为  $R_2$  的高斯噪声序列,系统参数  $x(t)$  由(2)式给出是均值为零、方差为  $R_1$  的 Gauss - Markov 过程,  $u_{caution}(t)$  谨慎控制由 (13)式给出。则由(14)式定义的加入探测信号的谨慎控制器,可以根据系统参数辨识的好坏自适应的改变探测信号的大小,并可避免单纯使用谨慎控制时产生的“关断”现象,具有对偶性。

$$u^*(t) = u_{caution}(t) + u_{perturbation}(t) = u_{caution}(t) + I(t)w(t) \tag{14}$$

$$I(t) = \min(e^{rp_{b_0}(t+1)+s}, q) \tag{15}$$

其中:  $u_{perturbation}(t)$  为探测信号,  $w(t)$  加入的随机探测信号。 $I(t)$  为加入探测信号的幅值,  $r$ 、 $s$  为系数,  $e^{rp_{b_0}(t+1)+s}$  是  $p_{b_0}(t+1)$  的增函数,  $q > 0$  为探测信号的最大值,是为避免加入过大的探测信号损坏控制器,而限定探测信号的最大值。

当系统参数辨识误差增加时,  $p_{b_0}(t+1)$  相应增加,使  $I(t)$  增加探测信号  $u_{perturbation}(t)$  增加。当系统参数辨识误差减小,  $p_{b_0}(t+1)$  减小,使  $I(t)$  减小探测信号  $u_{perturbation}(t)$  减小。当系统参数辨识误差较大  $p_{b_0}(t+1)$ , 探测信号  $u_{perturbation}(t)$  达到最大值,系统以最大的探测信号辨识参数,因此不会产生谨慎控制中因控制量而一步恶化参数估计的精度情况,既不会产生“关断”现象。

由以上可知控制器  $u^*(t)$  在系统参数辨识不准确的情况下加入较大的探测信号,在系统参数辨识准确的情况下加入较小的探测信号,使控制器接近谨慎控制。实现了在辨识系统参数与跟随控制目标两者之间取得平衡,具有对偶性。

注:参数  $r$ 、 $s$ 、 $q$  的选取原则应使得在参数辨识不准确时加入大的探测信号,在参数辨识准确时探测信号接近于零。先选定允许加入探测信号的最大值,然后根据以下方程求出  $r$ 、 $s$  的值:

$$\begin{aligned} rp_{b_{\max}} + s &= \log(q) \\ rp_{b_{\min}} + s &= \log(p) \end{aligned} \tag{16}$$

其中:  $p_{b_{\min}}$ 、 $p_{b_{\max}}$  分别为参数  $b_0$  方差的最大值和最小值,  $p$  为方差最小值既系统稳定时加入的探测信号。(16)式可以限定参数  $b_0$  方差的最大值,从而改变控制系统的动态性能。

### 4 仿真分析

给定单输入单输出系统:

$$y(t) + a(t)y(t-1) = b(t)u(t-1) + e(t)$$

则有:

$$x(t) = (b(t) \ a(t))^T, \ j^T(t-1) = (u(t-1) \ -y(t-1))$$

取:

$$\Phi = I, \ a = \begin{cases} -0.75 & step \leq 150 \\ -2 & step > 150 \end{cases} \quad (step \text{ 为迭代步数}),$$

$$b = 0.3, \ R_0 = 0.01I, \ R_1 = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 2 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, \ R_2 = 0.08, \ x(0) = (3 \ -2)^T,$$

$$u_{cr} = 1, \ p = 0.01, \ q = 1, \ p_{b_{\max}}(t+1) = 0.15, \ p_{b_{\min}}(t+1) = 0.005;$$

$w(t)$  为方差为 1 均值为 0 的高斯白噪声序列;

并根据 (16) 可以得到:

$$r = 460.5, \ s = -6.908;$$

分别对系统实施确定等价性控制、谨慎控制和加入探测信号的谨慎控制,仿真结果如图 1 - 图 4:

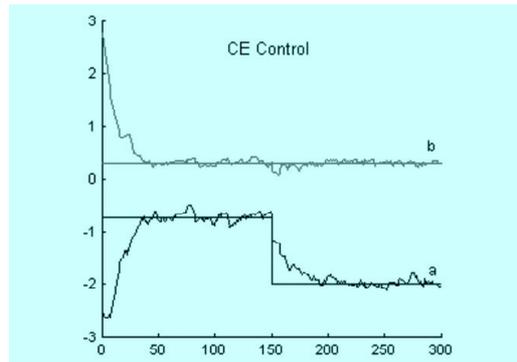


图1 确定性等价控制参数跟踪

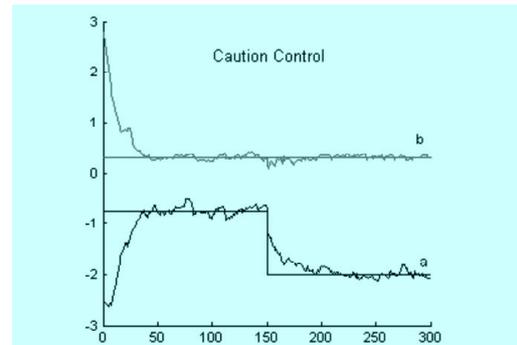


图2 谨慎控制参数跟踪

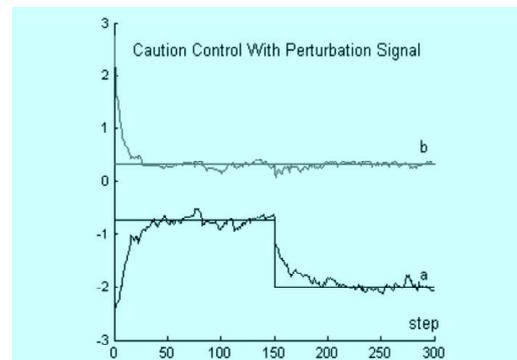


图3 加入探测信号的谨慎控制参数跟踪

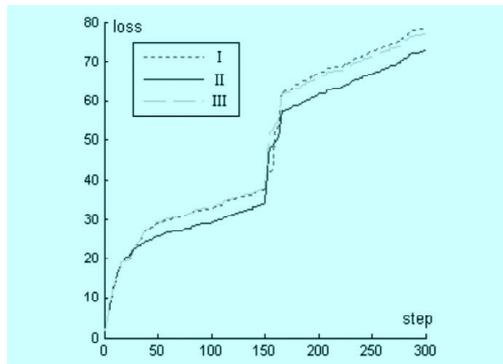


图4 损失函数

由仿真结果可以看出,在起始时刻和参数突变时参数误差很大,加入探测信号的谨慎控制此时产生较大控制误差,但可以使系统参数快速的收敛到实际值,使得在以后的控制中减小误差,在参数收敛到实际值时后,加入探测信号的谨慎控制与CE控制与谨慎控制相比损失函数的变化几近相同,这是由于此时参数较准确探测信号较小与方差较小使得三者之间的差别不大。

## 5 结束语

本文提出了一种在谨慎控制的基础上加入探测信号的方法,可以根据系统参数辨识的好坏情况自动改变探测信号的大小。与其它次优对偶控制相比,加入探测信号的对偶控制不仅计算量小易于实现,而且具有良好的对偶性。仿真表明该方法优于单纯使用确定性等价控制与谨慎控制具有良好的对偶性。

其中: 为CE控制的损失函数, 为加入探测信号谨慎控制

的损失函数, 为谨慎控制的损失函数。

## 参考文献:

- [1] FEDBAUM A A.Dual control theory I-IV[J].Automatic Remote Control,1960,21(4):1033-1039.
- [2] BJÖRN WITTENMARK.Adaptive dual control methods: an overview,In 5th IFAC symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing[C].1995.67-72.
- [3] ALSTER J,BELANGER P R.A technique for dual adaptive control[J].Automatic,1974,(10):627-634.
- [4] MILITO,R.,C.S.PADILLA,R.A.PADILLA,and D. CADORIN:An innovations approach to dual control[J].IEEE Trans. Automat.Contr.,1982,AC-27,132-137.
- [5] MAITELLI A L,YONEYAMA T.A two-stage dual suboptimal controller for stochastic systems using approximate moments[J].Automatica,1994,30(12):1949-1954.
- [6] 钱富才,刘丁,李云霞.基于两级算法的对偶控制[J].控制理论与应用,2004,21(1):89-93.
- [7] 高振斌,钱富才,刘丁,基于最大互信息指标的对偶控制研究[J].自动化学报,2008,34(8):1008-1012.
- [8] ANDERSON,B.D.O.,R.M.JOHNSTONE.Global Adaptive pole positionin [J].IEEE Trans. Automat.Contr.,1985,AC-30, 11-22.
- [9] WIESLANDER J,B.WITTENMARK.An approach to adaptive control using real-time identification[J].Automatica,1971,(7):211-217.
- [10] KARL JOHAN STRÖM,BJÖRN WITTENMARK.自适应控制,第二版[M].北京:科学出版社,2003.

作者简介:刘青峰(1978-),男,硕士研究生.研究方向:自适应控制。

(上接第3页)

[3] YU LI.Optimal Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain System:an LMI Approach[J].Control Theory and Application. 2000,17(3):423-428.

[4] HIRAOKI MUKAIDANI,YASUYUKI TAKATO.The Guaranteed Cost Control for Uncertain Large-Scale Interconnected Systems[A].15th Triennial World Congress,Barcelona,Spain. IFAC[C].2002.

[5] IAN R.PETERSEN and DUNCAN C.MCFARLANE. Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems [J].IEEE Trans.Automat.Contr.,1994.39(9):1971-1977.

[6] GUI SHENG ZHAI,MASAO IKEDA,YASUMASA FUJISAKI. Decentralized  $H_{\infty}$  Controller Design:A Matrix Inequality Approach Using a Homotopy Method[J].Automatica.2001,(37): 565-572.

[7] 段志生,黄琳,王金枝.特殊的分散控制问题[J].控制理论与应用.2004,21(1):115-119.

[8] NING CHEN,MASAO IKEDA and WEIHUA GUI.Design of Robust  $H_{\infty}$  Control for Interconnected Systems:A Homotopy Method[J].International Journal of Control,Automation and Systems. 2005,3(2):143-151.

[9] 谢永芳,蒋朝辉,桂卫华.数值界不确定性关联大系统分散鲁棒  $H_{\infty}$  控制[J].控制理论与应用.2006,23(3):329-335.

[10] 蒋朝辉,桂卫华,谢永芳,裘智峰.数值界不确定关联大系统分散鲁棒  $H_{\infty}$  输出反馈控制[J].控制理论与应用.2007,24(5): 743-748.

[11] MEHDI D,HAMID M A,PERRIN F.Robustness and Optimality of Linear Quadratic Controller for Uncertain Systems [J].Automatica.1996,(32):1081-1083.

[12] 俞立.鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M].北京:清华大学出版社,2002

[13] 刘新宇,高立群,张文力.不确定线性组合系统的分散镇定与输出跟踪[J].信息与控制.1998,27(5):342-350.

作者简介:周宇(1985-),男,在读硕士,研究方向:鲁棒控制。

(上接第10页)

[1] 王有铭.钢材的控制轧制和控制冷却[M].北京:冶金工业出版社,1995.

[2] 陈火红.Marc有限元实例分析教程[M].北京:机械工业出版社,2002.

[3] 董志洪.世界H型钢和钢轨生产技术[M].北京:冶金工业

出版社,1999.

[4] 王有铭,李曼云,韦光.钢材的控制轧制和控制冷却[M].北京:冶金工业出版社,1995.

作者简介:赵琳(1981-),男,学士学位,工程师,研究方向:自动化控制。