

## 基于方向性小波变换的图像稀疏修复

宁本德<sup>1</sup>, 屈小波<sup>2</sup>, 陈忠<sup>1</sup>

(1. 厦门大学电子科学系, 福建 厦门 361005; 2. 厦门市半导体照明检测认证中心, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 图像修复有着重要的应用价值, 稀疏表示作为前沿的信号处理方法, 也已经使用在图像修复中。但是, 传统方法在稀疏图像的时候利用的是预先给定的图像基, 不能自适应图像, 因此稀疏表示能力有限。文中提出从参考图中估计出图像的最佳几何方向使得稀疏变换能自适应图像几何信息, 提供更稀疏的图像表示方法。稀疏修复通过最小化  $\ell_1$  范数模型进行求解。实验结果表明, 所提方法较传统的二维小波变换可以更好地保留图像中边缘和纹理, 获得更高的峰值信噪比。

**关键字:** 图像修复; 稀疏表示; 几何方向; 方向性小波

中图分类号: TP391.4

文献标识码: A

文章编号: 1673-1255(2013)-03-0040-05

## Image Sparse Inpainting Based on Directional Wavelet Transform

NING Ben-de<sup>1</sup>, QU Xiao-bo<sup>2</sup>, CHEN Zhong<sup>1</sup>

(1. Department of Electronic science, Xiamen University, Xiamen 361005, China; 2. Authenticate Center of Xiamen Semi-conductor Illumination Detection, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** Image inpainting plays an important role in application area. As an advanced signal processing method, sparse representation has been used in image inpainting. However given image bases are adopted in traditional methods at the process of inpainting sparse images, it has no adaptive capability and sparse representation capability is limited. The best geometry direction is estimated according to reference images so that sparse transform is adaptive to geometry informations of images. And a representation method of sparser images is provided. Sparse inpainting is calculated by a minimized norm model such as  $\ell_1$ . Experimental results show that edges and texture in images are preserved more perfectly comparing with traditional 2D wavelet transform methods. So higher peak signal to noise ratio is got.

**Key words:** image inpainting; sparse representation; geometric direction; directional wavelet

图像修复是图像处理中一个很重要的问题, 在光学图像、SAR 图像和医学影像中都有广泛应用。图像在获取、传输和存储过程的一系列处理, 会造成信息丢失或受到噪声污染, 从而使图像质量降低。图像降质的问题可以定义为

$$y = Ax + \eta \quad (1)$$

其中,  $y$  为观测到的图像,  $x$  为源图像,  $\eta$  一般为高斯白噪声。对于文中讨论的像素丢失问题,  $A$  是由

(0, 1) 组成的掩码矩阵(数值 0 表示像素丢失)。图像修复的目的就是从受损图像  $y$  中修复出  $x$ 。

图像修复方法主要包括基于偏微分方程的算法<sup>[1]</sup>, 基于样例的图像修复算法<sup>[2]</sup>和基于稀疏变换的图像修复算法<sup>[3]</sup>等。基于偏微分方程的算法, 是从已知区域扩散图像信息到丢失区域来修复图像, 该方法缺点是修复纹理和较大区域时会造成模糊<sup>[4]</sup>。基于样例的图像修复算法主要针对破损区域较大的情

收稿日期: 2013-03-14

基金项目: 广东省数字信号与图像处理技术重点实验室开放基金(54600321); 福建省高校产学研合作科技重大项目(2011H6025)

作者简介: 宁本德(1987-), 男, 江苏徐州人, 硕士研究生, 研究方向为稀疏表示、图像处理; 屈小波(1984-), 男, 四川广安人, 助理教授, 研究方向为图像与信号处理。

况,从图像的已知区域复制图像块来填补丢失区域,然而这一算法复杂度、耗时长<sup>[5]</sup>。

目前,稀疏表示在图像处理中发挥了重要作用。基于稀疏表示的图像修复算法,假定图像在某一变换的稀疏性来正则化重建的图像,实现图像修复。一般来说,更加稀疏表示图像可以降低修复误差。小波变换作为稀疏图像的重要手段已经在稀疏图像处理中广泛应用。但是,传统小波变换提取的方向性信息有限,小波基都是预先给定的。自适应方向的Bandelet变换<sup>[6]</sup>及其改进形式的基于块的方向性小波(patch-based directional wavelets, PBDW)<sup>[7]</sup>在变换中引入图像的几何方向信息,自适应稀疏表示图像。PBDW在MRI图像的稀疏重建中<sup>[7]</sup>,可以比典型的MRI稀疏重建方法更好地抑制噪声和保留边缘。文中主要探讨PBDW变换在丢失像素修复中的应用。

## 1 PBDWS及图像修复中的应用

基于小波变换的多尺度分解能稀疏表示图像的分段光滑特性<sup>[8]</sup>,该特性也经常存在于图像的平滑渐变区域。把PBDW放在二维平移不变小波(shift-invariant discrete wavelet transform, SIDWT)域中,并称这种方法为PBDWS。PBDWS来源于Bandelet变换<sup>[9]</sup>,不同之处是PBDWS采用冗余小波变换而且不进行图像块的二叉树合并。由于不进行二叉树,每个块都会估计出方向,冗余度比较高,可能更利于图像修复。前期研究表明,在欠采样的MRI稀疏重建中,基于PBDWS的最小化 $\ell_0$ 范数可以比基于PBDW的最优化 $\ell_1$ 范数可以更好地保留图像边缘和抑制欠采伪影<sup>[10]</sup>。文中主要讨论PBDWS在图像丢失像素修复中的应用。

令 $\Phi^T$ 表示对图像 $x$ 的二维正向小波变换,定义 $R_j$ 为把图像 $x$ 的小波系数 $\Phi^T x$ 分成块的算子,这样第 $j$ 个图像块( $j=1, \dots, J$ )的小波系数可以表示成

$$b_j = R_j \Phi^T x \quad (j=1, 2, \dots, J) \quad (2)$$

现今候选方向集为 $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d, \dots, \theta_D\}$ ,将第 $j$ 个块的小波系数沿着某一个方向 $\theta_d$ 重新排列后,再进行一维正交Haar小波变换,该过程可表示成

$$c_j^{\theta_d} = \Psi^T P(\theta_d) b_j \quad (3)$$

SIDWT域内第 $j$ 个块的最佳几何方向 $\omega_j$ 可通

过 $S$ 个小波系数的最小逼近误差来估计

$$\hat{\omega}_j = \arg \min_{\omega_j \in \theta} \left\| c_j^{\omega_j}(S) - c_j^{\omega_j} \right\|_2^2 \quad (4)$$

其中, $c_j^{\omega_j}(S)$ 表示取Haar小波系数 $c_j^{\omega_j}$ 中绝对值最大的 $S$ 个系数。对于图像 $x$ ,它在PBDWS变换域中的系数表示为

$$c = \begin{bmatrix} c_1^{\hat{\omega}_1} \\ \vdots \\ c_j^{\hat{\omega}_j} \\ \vdots \\ c_J^{\hat{\omega}_J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^T P(\hat{\omega}_1) R_1 \\ \vdots \\ \Psi^T P(\hat{\omega}_j) R_j \\ \vdots \\ \Psi^T P(\hat{\omega}_J) R_J \end{bmatrix} \Phi^T x = B_W x \quad (5)$$

现在将PBDWS变换应用到图像修复中,修复后的图像可以用下式解出

$$\hat{x} = \arg \min_x \left\| B_W x \right\|_1 + \frac{\lambda}{2} \left\| y - Ax \right\|_2^2 \quad (6)$$

其中, $\|\cdot\|_1$ 表示 $\ell_1$ 范数并用于约束 $B_W x$ 的稀疏性, $\|\cdot\|_2$ 表示 $\ell_2$ 范数并用于权衡修复图像与采集图像数据的一致性程度,正则化参数 $\lambda$ 用于权衡稀疏性与数据一致性。

在式(3)中,因为图像像素是部分缺失的,所以没有完整的图像来估计方向 $\hat{\omega}_j$ ,找一个合适的参考图像来估计 $\hat{\omega}_j$ 是一个开放性问题。文中采用传统稀疏修复方法的结果作为参考图像。为求解式(5),采用交替连续算法(alternating and continuation algorithm)<sup>[11]</sup>,对于基于图像块的重建算法流程请见文献[12]。对于文中像素丢失的修复问题,主要的差别就在于 $A^T A$ 是一个 $N \times N$ 的对角阵,其中非对角线元素均为0,对角线的元素为1表示像素可用,对角线的元素为0表示像素丢失。

## 2 实验仿真

为了验证算法的有效性,分别采用图像Lena(256×256)、House(256×256)作为样本进行实验对比。为了评价图像修复质量,除了对比视觉效果外,还采用峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)作为客观评价指标。

假定两幅 $M \times N$ 的灰度图像分别是 $\tilde{x}$ 和 $\hat{x}$ ,其中 $\hat{x}$ 是修复结果, $\tilde{x}$ 是真实图像。他们的均方误差(mean squared error, MSE)定义为

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \hat{x}(m, n) - \tilde{x}(m, n) \right]^2 \quad (7)$$

图像 $\hat{x}$ 的PSNR定义为

$$PSNR = 10 \times \lg \left( \frac{MAX_I^2}{MSE} \right) = 20 \times \lg \left( \frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}} \right) \quad (8)$$

其中,  $MAX_I$  为图像  $\hat{x}$  的最大可能像素值。当图像像素值为  $[0, 255]$  时,  $MAX_I$  为 255; 当图像像素为  $[0, 1]$  时,  $MAX_I$  为 1。

在图像修复问题中, 掩码矩阵  $A$  有两种形式, 一种是随机丢失矩阵, 另外一种是图片文字掩码(或划痕)等。针对这两种典型情况, 分别在图1~图3中进

行仿真对比。因为SIDWT的修复结果较好, 选用SIDWT的修复图像来估计PBDWS的几何方向。

图1和图2的两张图片都采用了35%的丢失率, 可以看到SIDWT和离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)算法修复的图像均丢失部分信息, 尤其在边缘处出现了较多像素缺失, 而PBDWS算法修复的图像保留了完整的细节和纹理。图3b是文字掩码的图片, 可以看到SIDWT和DWT算法进行修复的

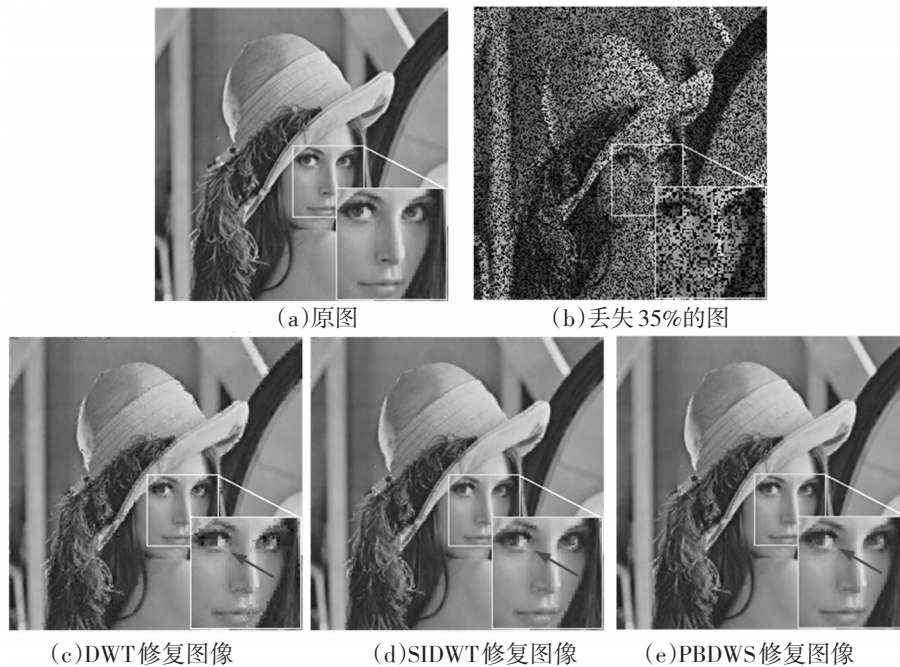


图1 Lena的随机丢失修复结果

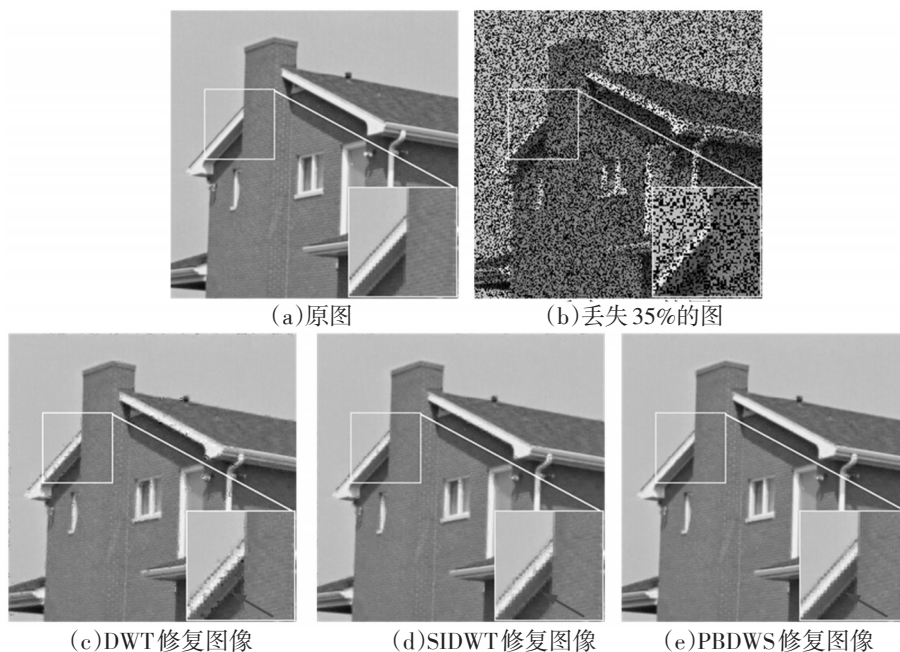


图2 House的随机丢失修复结果



图3 Lena的文字掩码修复结果

表1 不同稀疏变换修复结果的PSNR

算法	图像		
	图1	图2	图3
DWT	29.42	32.06	38.91
SIDWT	32.56	35.78	42.72
PBDWS	34.15	38.05	43.13

图像不能够重现细节,甚至在平坦区域也出现了信息的损伤,而PBDWS算法比较好地克服了这个问题。PBDWS算法的PSNR相较于前两者有了较大的提高。

### 3 总结与讨论

将方向性小波应用在丢失像素图像的稀疏修复中,通过从传统稀疏修复结果中估计出图像几何方向实现对图像的自适应稀疏表示。实验结果表明,所提方法修复得到的PSNR高于传统二维小波变换,能更好地保留了图像细节和纹理。在未来的工作中,结合总变分方法或使用 $\ell_0$ 范数代替 $\ell_1$ 范数,有望进一步提高图像修复质量。

### 参考文献

[1] Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V, et al. Image inpainting [C]//In Conference Proceedings of Siggraph, New York,

USA, 2000: 417-424.

- [2] Efros AA, Freeman WT, Acm. Image quilting for texture synthesis and transfer[C]//In Conference Proceedings of Siggraph, New York, USA, 2001: 341-346.
- [3] Fadili M, Starck JL. EM algorithm for sparse representation-based image inpainting[C]//In IEEE International Conference on Image Processing. New York, USA, 2005: 1385-1388.
- [4] Elad M, Starck JL, Querre P, et al. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA) [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, 19(3): 340-358.
- [5] Fadili MJ, Starck JL, Murtagh F. Inpainting and zooming using sparse representations[J]. Computer Journal, 2009, 52(1): 64-79.
- [6] Peyre G, Mallat S. Surface compression with geometric bandelets[J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, 24(3): 601-608.
- [7] Qu X, Guo D, Ning B, et al. Undersampled MRI reconstruction with patch-based directional wavelets[J]. Magnetic Resonance Imaging, 2012, 30(7): 964-977.
- [8] Ophir B, Lustig M, Elad M. Multi-scale dictionary learning using wavelets[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2011, 5(5): 1014-1024.
- [9] Le Pennec E, Mallat S. Sparse geometric image representations with bandelets[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(4): 423-438.
- [10] Ning B, Qu X, Guo D, et al. Magnetic resonance image re-

- construction using trained geometric directions in 2D redundant wavelets domain and non-convex optimization[J]. Submitted to Magnetic Resonance Imaging, 2013.
- [11] Yang J, Zhang Y, Yin W. A fast alternating direction method for TV l1-l2 signal reconstruction from partial fourier data[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 288-297.
- [12] Chen Y, Ye X, Huang F. A novel method and fast algorithm for MR image reconstruction with significantly under-sampled data[J]. Inverse Problems and Imaging, 2010, 4(2): 223-240.

(上接第35页)

- [3] 王宁,李国华,云茂金.液晶电控双折射特性的研究[J].中国激光,2002,29(12):1061-1064.
- [4] A Takeda, S Kataoka, T Sasaki, et al. A Super-high-quality multi-domain vertical alignment LCD by new rubbing-less technology. SID' 98 Digest, 1998:1077.
- [5] 王谦,余飞鸿,郭海成.外电场作用下液晶指向矢分布差分迭代求解及液晶盒视角光电特性研究[J].光子学报,2001,30(3):311-316.
- [6] 严明,高志山.波片相位延迟测量的简捷方法研究[J].激光技术,2005,29(3):233-236.
- [7] 费民权,费悦.TFT-LCD的宽视角技术[J].现代显示,2008(11):22-26.
- [8] 沈奕,王勇竞,王琳静.延迟膜光谱分析测试系统及应用[J].光学精密工程,2009(5):964-968.
- [9] Togooka T, Yoda E, Kobori y, et al. Optical design for wide viewing angle TN-LCD with hybrid aligned nematic compensation films[J]. In: SID' 98 Digest, 1998:698.
- [10] Chen Jian-min, Bos P J, NSON D J, et al. Four domain TN-LCD fabricated by two alignment layers with low and high pretilt Angles[J]. Jpn J Appl Phys, 1996, 35: 558.
- [11] 范玲,宋菲君.调制偏振光在光学相位延迟测量中的频谱分析[J].光谱学与光谱分析,2007,27(9):1685-1688.
- [12] SHYU L, CHEN C, SUD. Method for measuring the retardation of a wave plate [J]. Applied Optics, 1993, 32(22): 4228-4230.
- [13] 吕新广.对光谱三刺激值概念的理解[J].包装工程,2002,23(5):40241.
- [14] 黄翀,姜言森,欧阳艳东,等.LCD三基色光谱特性的研究[J].光谱学与光谱分析,2007,27(12):2494-2497.

(上接第39页)

- [4] Faugeras O D, Luong Q T, Maybank S. Camera self-calibration theory and experiments[C]. //Proc. The 2nd European Conference on Computer Vision Berlin: Springer, 1992, 588: 321-334.
- [5] Maybank S, Faugeras O D. A theory of self-calibration of a moving camera [J]. International Journal of Computer Vision, 1992, 8(2): 123-151.
- [6] 林立财,李其申,江泽涛.混合优化算法的摄像机自标定方法研究[J].计算机应用研究,2009,26(12):4844-4846.
- [7] 江泽涛,吴文欢.基于本质矩阵的摄像机自标定方法[J].中国图像图形学报,2010,15(14):565-569.
- [8] 杨伟峰,韩华婷,段志伟,等.基于主动视觉的摄像机自标定的方法[J].军械工程学院学报,2006,18(6):74-77.
- [9] 廉小磊,贺利乐,张颖.基于粒子群算法的双目立体视觉系统标定[J].计算机工程与应用,2011,47(24):202-204.
- [10] 殷焰,赵荣椿.一种新的基于直线特征的摄像机自标定方法[J].计算机应用研究,2006(3):170-171.
- [11] 蓝慕云.基于单个正方形的摄像机自标定算法[J].现代计算机,2007,263:7-9.
- [12] 霍炬,杨卫,杨明.基于消隐点几何特性的摄像机自标定方法[J].光学学报,2010,30(2):465-472.
- [13] Hartley R. Multiple View Geometry in Computer Vision[M]. London: Cambridge University Press, 2000.