View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Xiamen University Institutional Repository

第 32 卷 第 15 期
2010 年 8 月
武 汉 理 工 大 学 学 报
JOURNAL OF WUHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Vol. 32 No. 15
Aug. 2010

DOI:10.3963/j.issn.1671-4431.2010.15.034

集合自旋量子计算机中的逻辑门测量

姚淅伟,陈志伟,牟晓阳,潘 健,杨 春,林星程,连建辉,王新伟
(厦门大学物理系,福建省等离子体与磁共振研究重点实验室,厦门 361005)

摘 要: 提出一种核磁共振量子计算机两量子位逻辑门测量的方案。该方案通过设置适当的标记量子位可显著缩减测量所需输入态数目,给出量子门和具体输入状态集合的实验脉冲序列。包含较少 J 偶合演化的脉冲序列设计可有效减少操作时间,削弱环境对量子系统的退相干影响。

关键词: 量子计算; 核磁共振; 量子逻辑门
中图分类号: O 482.53 文献标识码: A 文章编号:1671-4431(2010)15-0142-04

Measurement Method of Logical Gate in Bulk Spin Quantum Computer

YAO Xi-wei, CHEN Zhi-wei, MU Xiao-yang, PAN Jian,
YANG Chun, LIN Xing-cheng, LIAN Jian-hui, WANG Xin-wei
(Department of Physics, Fujian Key Laboratory of Plasma and Magnetic Resonance,
Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: A scheme of measuring two-qubit logical gate is proposed based on nuclear magnetic resonance, which includes the specific input states and complete pulse sequences. In comparison with the approach not using ancillary qubit, this method remarkably reduces the number of the inputs at the cost of flag qubit resource. The pulse sequence with fewer J-coupling evolution can effectively shorten the experiment time and weaken the quantum system decoherence effect by environment.

Key words: quantum computation; nuclear magnetic resonance; quantum logical gate

量子信息科学在近 20 年得到快速发展,与传统的计算机信息科学相比,基于量子物理的信息理论呈现出一些新的特性[1-3]。量子系统状态的叠加与纠缠成为量子信息处理装置工作的核心资源[4-7]。目前液体核磁共振是研究量子信息处理比较成熟的一种技术,核磁共振量子计算机具有目前已见报道的最高量子位数[8]。量子计算机的操作一般由一系列量子逻辑门组成,对量子门操作进行测量,研究实际量子计算中的误差模型,从而有效地操控实际量子计算过程,快速获取量子计算过程相关信息有助于实际误差分析及适时的校准处理[9],对完成一个实际的量子信息处理任务具有重要意义[10]。

1 逻辑门测量理论

理想的幺正量子逻辑门操作 U_{th} 把初始输入态 ρ_{in} 变换到理论输出态 $\rho_{th}=U_{th}\rho_{in}U_{th}^{+}$,实际量子逻辑门操作 $\mathscr{E}$ 把系统初始输入态 ρ_{in} 变换到输出态 $\rho_{out}=\mathscr{E}(\rho_{in})=\sum_{\mu}V_{\mu}\rho_{in}V_{\mu}^{+}$,其中 $\sum_{\mu}V_{\mu}^{+}V_{\mu}=1$。实验执行的量子

收稿日期:2010-03-26.
基金项目:福建省自然科学基金(2008J0219,2009J05152).
作者简介:姚淅伟(1976-),男,博士,助理教授.E-mail:yau@xmu.edu.cn

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

操作 $\mathscr{E}$是完全正定、保迹的线性映射,可表示为算符求和形式。$\{V_\mu\}$算符集合可以代表量子逻辑门操作 $\mathscr{E}$ 的功能。在系统 Liouville 空间取定一组基矢$\{A^\mu\}$后,ρ_{out} 写为 $\mathscr{E}(\rho_{in})=\sum_{m,n}\chi_{mn}A_m\rho_{in}A_n^+$,式中展开系数 χ_{mn} 取代算符集合$\{V_\mu\}$表征量子操作的功能信息。$\chi=(\chi_{mn})$是正定 Hermitian 矩阵,系数矩阵 χ 完全刻画了实验执行的量子逻辑门操作 $\mathscr{E}$。对于 n 个粒子的自旋 1/2 系统,Hilbert 空间维数为 N 维($N=2^n$),量子操作逻辑门的系数矩阵 χ 包含 N^4-N^2 个独立参数。设$\{\rho_j\}$为系统选取的包含 N^2 个元的一组基矢,将 ρ_j 作为系统初始输入态,经 $\mathscr{E}$操作变换到末态,对末态进行测量,由初末态可以确定量子操作 $\mathscr{E}$的系数矩阵 χ,从而完成量子操作过程 $\mathscr{E}$的实验重构。

将量子逻辑门操作 $\mathscr{E}$嵌入子系统 A 中[11,12],使用辅助位 B 的不同状态来标记 A 系统量子位的不同状态演化,可以有效地缩减测量 ε 所需的整个系统输入态数目。若子系统 A 包含的量子位个数为 n,辅助系统 B 包含的量子位个数为 m(设 $m\leqslant n$),这个包含 $m+n$ 个量子位的系统,一般只需要 $2^{2(n-m)}$个输入态就能测量子空间 n 量子位逻辑门。而 n 个量子位的标准量子逻辑门测量所需的输入态数目是 2^{2n}。可见标准量子逻辑门测量所需的量子位资源虽少,但所需的输入态数目较多。

若仅对 A 子系统做量子逻辑门操作 $\mathscr{E}_s$,整个系统的演化可以写为

$$(\mathscr{E}_s\otimes I)(\sigma_A\otimes\sigma_B)=\mathscr{E}_s(\sigma_A)\otimes I(\sigma_B)=\mathscr{E}_s(\sigma_A)\otimes\sigma_B \tag{1}$$

其中 I 为恒等操作,B 系统的状态保持不变,故可以用 B 系统的稳定状态标记子系统 A 在 ε_s 操作过程中的状态演化。例如以下三量子位系统输入态

$$\rho_{in}=\sum_k\rho_k^B\otimes\rho_k^A=\boldsymbol{E}\otimes(-\frac{1}{\sqrt{2}}I_y^2)+I_x^1\otimes(\sqrt{2}I_z^2)-I_y^1\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}I_z^2I_x^3+I_z^1\otimes\sqrt{2}I_x^2 \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位方阵,$\boldsymbol{I}_\alpha=\frac{1}{2}\sigma_\alpha$,$\sigma_\alpha$ 为 Pauli 矩阵,I_α^k 里的 k 表示第 k 个核自旋。单量子位 B 的 4 个极化状态$\{E, I_x, I_y, I_z\}$可以用来分别标记子系统 A 中 4 个不同的态$\{I_y^2, I_z^2, I_z^2I_x^3, I_x^2\}$的演化,使它们能一次性同时输入系统 A 内嵌的量子门 $\mathscr{E}_s$ 进行并行演化,从而减少了输入的次数。利用辅助位测量量子逻辑门以付出适当辅助量子位资源为代价,所需的输入态数目能得到显著缩减, 故设计输入态是提高测量效率的一个关键。

2 量子逻辑门

在液体核磁共振量子计算机中,标准条件(常压室温),考虑强磁场下具有 3 个量子位的核自旋 1/2 弱耦合体系。3 个核自旋作为 3 个量子位,分别记为 1, 2, 3,量子位 1 作为辅助量子位,量子位 2, 3 作为子空间量子位。为了制备测量量子门所需的输入态,实验中一般会用到包含 J 耦合的演化过程。长时间实验操作时,系统弛豫和环境噪声会使量子态系统发生明显退相干,所需要的量子位信息变得很弱以致被噪声淹没而无法利用。一般核自旋的 J 耦合演化相比核选择操作用时较长,故实验脉冲序列设计要尽量少使用耦合演化,即使在使用时也要优先考虑耦合强度比较大的,操作时间短的耦合演化,力求尽可能削弱量子退相干对量子逻辑门操作效果的影响。

通常控制相位量子逻辑门操作写为

$$\boldsymbol{U}_{cp}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{3}$$

设 ε_{cp} 是两量子位体系控制相位量子门操作,则量子位 2, 3 子空间的控制相位量子门对输入态的操作可以写为

$$\varepsilon_{cp23}(\rho_1\otimes\rho_{23})=(I\otimes\varepsilon_{cp})(\rho_1\otimes\rho_{23})=\rho_1\otimes\varepsilon_{cp}(\rho_{23}) \tag{4}$$

量子位 2, 3 子空间内的控制相位量子门操作 ε_{cp23}的脉冲序列

$$\left(-\frac{\pi}{2}\right)_x^3-\left(-\frac{\pi}{2}\right)_y^3-\left(\frac{\pi}{2}\right)_x^3-J_{23}\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^3-\left(\frac{\pi}{2}\right)_x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^2 \tag{5}$$

子空间控制相位量子门中的纠缠非局域操作通过 J_{23}耦合演化实现。由于量子逻辑门操作具线性,若将子空

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

间的一组完备基矢输入该量子逻辑门,由输出的变换结果可以完全确定该量子逻辑门操作。

3 量子逻辑门的输入

核自旋系统初始时刻处于热平衡状态 $\rho_{eq}^{3bit}=I_z^1+I_z^2+I_z^3$,用以下 3 个脉冲序列制备量子门过程输入态

$$(\frac{\pi}{2})_x^{12}-J_{12}(\frac{\pi}{4})-(\frac{\pi}{2})_x-J_{23}(\frac{\pi}{2})-(\frac{\pi}{2})_x^3 \tag{6}$$

$$(\frac{\pi}{2})_x^{12}-J_{12}(\frac{\pi}{4})-(\frac{\pi}{2})_x-J_{23}(\frac{\pi}{2})-(\frac{\pi}{2})_y^3 \tag{7}$$

$$(\frac{\pi}{2})_x^{2}\rightarrow J_{12}(\frac{\pi}{2})\rightarrow(\frac{\pi}{2})_y^3\rightarrow J_{23}(\frac{\pi}{4})\rightarrow(\frac{\pi}{2})_x^{23} \tag{8}$$

分析以上 3 个序列的积算符演化,脉冲序列(6)

$$\rho_{eq}=I_z^1+I_z^2+I_z^3$$

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{2})_x^{12}} I_y^1-I_y^2+I_z^3$$

$$\xrightarrow{J_{12}(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{\sqrt{2}}I_y^2+I_z^3+\sqrt{2}I_x^1I_z^2-\frac{1}{\sqrt{2}}I_y^1+\sqrt{2}I_z^1I_x^2=\sigma_1$$

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{2})_x} \frac{1}{\sqrt{2}}I_z^2-I_y^3-\sqrt{2}I_x^1I_y^2-\sqrt{2}I_y^1I_x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}I_z^1=\sigma_2$$

$$\xrightarrow{J_{23}(\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}I_z^2+2I_z^2I_x^3+2\sqrt{2}I_x^1I_x^2I_z^3-2\sqrt{2}I_y^1I_y^2I_z^3-\frac{1}{\sqrt{2}}I_z^1=\sigma_3$$

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{2})_x^3} \frac{1}{\sqrt{2}}I_z^2-2I_z^2I_x^3-2\sqrt{2}I_x^1I_x^2I_y^3+2\sqrt{2}I_y^1I_y^2I_y^3-\frac{1}{\sqrt{2}}I_z^1=\sigma_4 \tag{9}$$

脉冲序列(7)的前 4 步与序列(6)相同,最后一步

$$\sigma_3\xrightarrow{(\frac{\pi}{2})_y^3} \frac{1}{\sqrt{2}}I_z^2-2I_z^2I_z^3+2\sqrt{2}I_x^1I_x^2I_x^3-2\sqrt{2}I_y^1I_y^2I_x^3-\frac{1}{\sqrt{2}}I_z^1=\sigma_5 \tag{10}$$

脉冲序列(8)

$$I_z^1+I_z^2+I_z^3$$

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{2})_x^2} I_z^1-I_y^2+I_z^3$$

$$\xrightarrow{J_{12}(\frac{\pi}{2})} I_z^1+2I_z^1I_x^2+I_z^3$$

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{2})_y^3} I_z^1+2I_z^1I_x^2+I_x^3$$

$$\xrightarrow{J_{23}(\frac{\pi}{4})} I_z^1+\sqrt{2}I_z^1I_x^2+2\sqrt{2}I_z^1I_y^2I_z^3+\frac{\sqrt{2}}{2}I_x^3+\sqrt{2}I_z^2I_y^3$$

$$\xrightarrow{(\frac{\pi}{2})_x^{23}} I_z^1+\sqrt{2}I_z^1I_x^2-2\sqrt{2}I_z^1I_y^2I_y^3+\frac{\sqrt{2}}{2}I_x^3-\sqrt{2}I_y^2I_z^3=$$

$$I_z^1\otimes(E^{23}+\sqrt{2}I_x^2-2\sqrt{2}I_z^2I_y^3)+E^1\otimes(\frac{\sqrt{2}}{2}I_x^3-\sqrt{2}I_y^2I_z^3)=\sigma_6 \tag{11}$$

由这 3 个脉冲序列可以制备得到 $\sigma_1\sim\sigma_6$ 共 6 个量子门输入态。下面从包含 2,3 子空间态矢成份上分析这 6 个制备出的量子门输入态。由量子门输入态积算符所包含的项对量子位 2,3 子空间全部基矢的遍历列表 1,表 1 中第 1 行是 6 个量子门输入态,第 1 列是辅助系统量子位 1 密度算符空间的 4 个基矢态。以最后

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

一列 σ_6 的情况做为例子, 在 σ_6 输入态中量子位 1 取 E^1 的项是 $E^1\otimes(\frac{\sqrt{2}}{2}I_x^3-\sqrt{2}I_y^2I_z^3)$, 即 σ_6 在量子位 1 的 E^1 状态标记下, 包含了两个 2, 3 子空间基矢成份: I_x^3, $I_y^2I_z^3$, 得第 7 列第 2 行元素; 量子位 1 取 I_z^1 的项是 $I_z^1\otimes(E^{23}+\sqrt{2}I_x^2-2\sqrt{2}I_z^2I_y^3)$, 即 σ_6 在量子位 1 的 I_z^1 状态标记下, 包含了三个 2, 3 子空间基矢成份: E^{23}, I_x^2, $I_z^2I_y^3$, 得第 7 列第 5 行元素。按此分析, 表 1 表明{ $\sigma_1\sim\sigma_6$} 输入态集合包含了量子位 2, 3 子空间的所有基矢。

表 **1** 量子门输入态积算符包含项对量子位 **2, 3** 子空间全部基矢的遍历

量子态	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
E^1	I_y^2, I_z^3	I_z^2, I_y^3	I_z^2, $I_z^2I_x^3$	I_z^2, $I_z^2I_x^3$	I_z^2, $I_z^2I_z^3$	I_x^3, $I_y^2I_z^3$
I_x^1	I_z^2	I_y^2	$I_x^2I_z^3$	$I_x^2I_y^3$	$I_x^2I_x^3$	
I_y^1	E^{23}	I_x^2	$I_y^2I_z^3$	$I_y^2I_y^3$	$I_y^2I_x^3$	
I_z^1	I_x^2	E^{23}	E^{23}	E^{23}	E^{23}	E^{23}, I_x^2, $I_z^2I_y^3$

4 结 语

完备的输入态集合{ $\sigma_1\sim\sigma_6$}作为控制相位量子逻辑门的输入, 根据相应的输出可测量出量子逻辑门。针对具体情况设计的脉冲序列方案可有效地减少实验时间, 削弱了系统所受到的弛豫和环境噪声导致的量子退相干的影响。同无辅助位方法相比, 具有标记位的量子逻辑门测量以适当的辅助量子位资源为代价, 有效地缩减输入的所需次数和制备时间, 对量子逻辑门快速准确的测量有助于及时了解量子计算的实际执行情况。

参考文献

[1] Shor P W. Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring[C] // Proc of the 35th Annual Symposium on the Foundation of Computer Sciences Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1994: 20-22.

[2] 方细明, 冯 芒, 高克林, 等. 核磁共振量子计算中的赝纯态制备[J]. 物理学报, 1999, 48(8): 1405-1411.

[3] Yuan Z S, Chen Y A, Zhao B, et al. Experimental Demonstration of a BDCZ Quantum Repeater Node[J]. Nature, 2008, 454(7208): 1098-1101.

[4] Guo G C, Han Z F, Hong P L et al. The Queueing Model for Quantum Key Distribution Network[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(1): 46-50.

[5] 杨俊安, 庄镇泉. 多宇宙并行量子遗传算法[J]. 电子学报, 2004, 32(6): 923-928.

[6] 周毓萍. 基于量子比特遗传算法的外商对华投资项目优选[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 29(6): 147-150.

[7] 廖京川, 余先伦, 程 伟. 光场压缩态及其在量子通信中的应用[J]. 武汉理工大学学报: 信息与管理工程版, 2008, 30(3): 363-367.

[8] Negrevergne C, Mahesh T S, Ryan C A, et al. Benchmarking Quantum Control Methods on a 12-Qubit System[J]. Physical Review Letters, 2006, 96: 170501.

[9] Altepeter J B, Branning D, Jeffrey E, et al. Ancilla-Assisted Quantum Process Tomography[J]. Physical Review Letters, 2003, 90: 193601.

[10] Riebe M, Kim K, Schindler P, et al. Process Tomography of Ion Trap Quantum Gates[J]. Physical Review Letters, 2006, 97: 220407.

[11] Yao X W, Xue F, Pang W M, et al. Liquid Nuclear Magnetic Resonance Implementation of Quantum Computation in Subspace[J]. Chinese Physics Letters, 2006, 23(8): 1996-1999.

[12] Kim K, Song M, Lee S. Quantum Process Tomography with an Arbitrary Number of Ancillary Qubits in Nuclear Magnetic Resonance[J]. Journal of the Korean Physical Society, 2005, 47(4): 736-739.

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net