1998年 青海师范大学学报(自然科学版) 1998
第 4期 Journal of Qinghai Normal University (Natural Science) No. 4

集合的基数与一一对应原理

钱建国

(厦门大学数学系 厦门 361005)

摘 要 集合的基数是学习实变函数论这一课程的重点和难点。深入地理解一一对应原理是学好这一内容的关键所在。

关键词 集合 一一对应 基数

集合论的创立者,伟大的数学家 Georg Cantor(1845~ 1918)的集合理论使人们“数数”的能力从有限提高到了无限,并为实变函数论的建立奠定了坚实的理论基础。随着这一理论的日益完善,它已成为今天大学数学课程的重要内容。这不仅仅是因为它在内容上拓广了微积分,更重要的是它将人类一个古老而又朴素的思想成功地运用到了现代数学中,并由此解决了许多悬而未决的数学及数学哲学问题。这个古老而又朴素的思想就是“一一对应”原理。

在人类认识数字以前,原始部族人采用把珠子和铜币逐个相比的方法来判别珠子和铜币哪一个多(〔2〕)。这一朴素的“一一对应”原理仍是我们今天“数数”的方法。所不同的是我们不必再把实物与实物进行比较,而是把实物与{1, 2,… , n}进行比较。例如,当我们数 5个珠子时,实际上是把它们分别与 1, 2, 3, 4, 5一一对应而“数”出来的。因此,{1, 2,… , n}是一个用来衡量其它集合元素多少的特殊集合。这与商品交换活动中的货币是极其相似的。这一思想被 Cantor成功地用来比较无穷集合的大小:如果两个集合之间存在一一对应,则这两个集合一样大(即它们有相同数目的元素)。Gamow曾幽默地将这一景象描述为“原始部族人和 Cantor教授都在用同样的方法比较他们数不出来的数目的大小”(见〔2〕)。

要比较无穷集合的大小,我们很自然地想到了用{1, 2,… , n,… }来衡量它们。结果发现并非所有的无穷集合都与{1, 2,… , n,… }存在着一一对应(如实数集〔4〕)。这一结果结束了人们长期以来一直争论不休的问题:无穷集合是否都是一样大的?既然无穷集合不一样大,那么怎样去判断一个无穷集合比另一集合大呢?是否有最大的集合呢?这些问题正是集合的基数理论所研究的。所谓集合的基数是指衡量这个集合大小的值。如{a, b, c}的基数为 3;空集为 0,等等。因此两个集合的基数相等当且仅当它们之间存在一一对应。按照这一原则,要说明一个集合 M的基数比另一个集合 N的大,就必须证明下述两点。

1). M与 N不对等(即不存在一一对应)。

2). M的一个子集与 N对等。

其中 1)是保证 M与 N的基数不相等; 2)是保证 M的基数不比 N的小。需要指出的是

一个有限集不可能与其任意真子集对等。这说明,对于有限集 M和 N,1)和 2)等价于: 2)。′

2) ′M的一个真子集与 N对等。

这一点对于无穷集合来说是不成立的。例如{1,2,…,n,…}与{2,3,…,n,…}就是对等的: $k \to k+1, k=1,2,\cdots$。德国著名数学家 Hilbert对此曾讲过这样一则生动的故事:有一家旅店,内设有限个房间且所有房间均已客满。这时来了一位新客想订个房间。“对不起”店主说,“所有房间均已住满了”。这位新客又来到另一家旅店。这家旅店有无限个房间且也都客满了。但这位店主却对这位新客说“不成问题”。他把一号房间的旅客移至二号房间;把二号房间的旅客移至三号房间;…,依此类推。这一来,这位新客便住进了已被腾空的一号房间。

由1)和2)不难看到{1,2,…,n,…}的基数 $\aleph_0$ 小于实数集的基数 C_0 这为无穷集合的排序迈出了第一步:$\aleph_0 < C_0$ 更进一步地,Cantor构造了一个基数比C更大的集合 Z_3(其基数记为 $\aleph_2$),并以一个精彩的证明说明任何集合(有限或无穷)的所有子集构成的集合的基数比前者的要大(见〔4〕)。这等于回答了前面所提的问题:不存在最大基数。因此,我们今天可以数到远比 $\aleph_2$ 大得多的数。

$1,2,\cdots,n,\cdots,\aleph_0,C,\aleph_2,\cdots$

但值得指出的是我们今天对无穷大基数的认识还是相当初级的,甚至不知道在 $\aleph_0$ 与 C之间是否存在第三个基数。这好比是我们在这样数数:1,3,4,…,却又不知道在1和3之间少数了一个2。

已经证明: $\aleph_2$ 与平面上所有曲线构成的集合的基数相等。这一集合是目前人们能够想象出来的最大集合。“我们现在的处境正好跟我们前面的原始部落人相反,他们有许多儿子,却数不清。我们什么都数得清,却又没有那么多东西来让我们数”(〔2〕)。

参 考 文 献

1 M. Kline.古今数学思想(第四册).北大数学系数学史翻译组译.上海科技出版社,1981

2 G· Gamow.从一到无穷大.暴永宁译.科学出版社,1978

3 鲁又文.数学古今谈.天津科技出版社,1984

4 江泽坚,吴智泉.实变函数论.人民教育出版社,1961