View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Xiamen University Institutional Repository

第43卷 第1期 福州大学学报(自然科学版) Vol. 43 No. 1
2015年2月 Journal of Fuzhou University(Natural Science Edition) Feb. 2015

DOI: 10.7631/issn.1000-2243.2015.01.0016 文章编号: 1000-2243(2015)01-0016-05

修正 q - Phillips 算子的逼近性质

任美英[1]，曾 亮[2]

(1. 武夷学院数学与计算机学院，福建 武夷山 354300; 2. 厦门大学数学科学学院，福建 厦门 361005)

摘要: 引进一类修正 q - Phillips 算子，并研究该算子列的一些逼近性质. 得到算子列的一个 Korovkin 型收敛定理，给出了算子列收敛速度的估计和一个 Voronovskaja 型结果.

关键词: q - Phillips 算子; Korovich 型定理; Voronovskaja 型结果; 收敛性; q - 积分

中图分类号: O.174.41 **文献标识码**: A

Approximation properties of modified q - Phillips operators

REN Meiying[1], ZENG Liang[2]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Wuyi University, Wuyishan, Fujian 354300, China;
2. College of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiaomen, Fujian 361005, China)

Abstract: In this paper, a kind of modified q - Phillips operators is introduced, some approximate properties of the operators are studied. A convergence theorem of Korovkin type is established. Also, an estimate for the rate of convergence and a Voronovskaja - type result are given.

Keywords: q - Phillips operators; Korovkin type theorem; Voronovskaja type result; convergence; q - integral

0 引言

自 1997 年 Phillips[1] 提出并研究 q - Bernstein 算子以来，q - 微积分在逼近论中的应用成为了一个研究热点，很多逼近论方向的专家学者致力于该领域的研究，获得了许多很好的结果，如文献[2-6]. 2011 年，Yüksel[7] 研究了 q - Phillips 算子的逼近性质. 提出修正的 q - Phillips 算子，并研究修正 q - Phillips 算子的逼近性质.

首先，引入 q - 整数和 q - 微积分的若干概念，这里所述的概念详细可见文献[8-12]. 对任意固定的实数 $q>0$ 和非负整数 k，q - 整数和 q - 阶乘分别定义为:

$$[k]_q=\begin{cases}\dfrac{1-q^k}{1-q} & (q\neq 1)\\ k & (q=1)\end{cases},\quad [k]_q!=\begin{cases}[k]_q[k-1]_q\cdots[1]_q & (k\geqslant 1)\\ 1 & (k=0)\end{cases}$$

对非负整数 $n,k,n\geqslant k$，q - 二项式系数定义为 $\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q=\dfrac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$.

两个 q - 模拟指数函数分别定义为:

$$e_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_q!}=\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}\qquad \left(|x|<\frac{1}{1-q},\ |q|<1\right)$$

$$E_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n-1)/2}\frac{x^n}{[n]_q!}=(1+(1-q)x)_q^{\infty}\qquad (|q|<1)$$

收稿日期: 2012-10-11
通讯作者: 任美英(1965-)，教授，主要从事函数逼近论研究，npmeiyingr@163.com
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61170324)；福建省自然科学基金资助项目(2014J01021)；福建省教育厅科技资助项目(2012JA12324)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

q - Jackson 积分和 q - 广义积分分别定义为：

$$\int_0^a f(t)\,d_q(t) = a(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n \quad (a>0),\quad \int_0^{\infty/A} f(t)\,d_q(t) = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\frac{q^n}{A} \quad (A>0)$$

假设级数绝对收敛．对 $t>0$，q - Gamma 函数定义为：

$$\Gamma_q(s) = K(A,s)\int_0^{\infty/A(1-q)} t^{s-1}e_q(-t)\,d_q(t)$$

其中：$K(A,s) = \frac{A^s}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^s(1+A)_q^{1-s}$．特别地，对 $s\in\mathbf{N}$，$K(A,s) = q^{s(s-1)/2}$，$K(A,0)=1$，且 $\Gamma_q(s+1) = [s]_q\Gamma_q(s)$，$\Gamma_q(1)=1$.

1　算子的构造

设 $f\in C[0,\infty)$，$q\in(0,1)$，$x\in[0,\infty)$，$n\in\mathbf{N}$，文献[7]定义了如下 q - Phillips 算子：

$$P_n^q(f;x) = [n]_q\sum_{k=1}^{\infty}p_{n,k}(x,q)\int_0^{\infty/A(1-q)} q^{k(k-1)}p_{n,k-1}(t,q)f(t)\,d_q(t) + e_q(-[n]_qx)f(0) \tag{1}$$

其中：

$$p_{n,k}(x,q) = \frac{([n]_qx)^k}{[k]_q!}e_q(-[n]_qx) \tag{2}$$

可以计算得到算子 $P_n^q(f;x)$ 的如下各阶矩量（见文献[7]）．

引理 1[7]　对式(1)给出的算子 $P_n^q(f;x)$，让 $e_m(t)=t^m$，$m=0,1,2,3,4$，则

(Ⅰ) $P_n^q(e_0;x) = 1$；(Ⅱ) $P_n^q(e_1;x) = \frac{x}{q}$；(Ⅲ) $P_n^q(e_2;x) = \frac{x^2}{q^4} + \frac{[2]_q}{q^3[n]_q}x$；

(Ⅳ) $P_n^q(e_3;x) = \frac{x^3}{q^9} + \frac{[2]_qq+[4]_q}{q^8[n]_q}x^2 + \frac{[2]_q[3]_q}{q^6[n]_q^2}x$；

(Ⅴ) $P_n^q(e_4;x) = \frac{x^4}{q^{16}} + \frac{[2]_qq^2+[4]_qq+[6]_q}{q^{15}[n]_q}x^3 + \frac{[2]_q[3]_qq^2+[2]_q[5]_qq+[4]_q[5]_q}{q^{13}[n]_q^2}x^2 + \frac{[2]_q[3]_q[4]_q}{q^{10}[n]_q^3}x.$

由引理 1 知，算子 $P_n^q(f;x)$ 只保持常数．为了提高算子列 $\{P_n^q(f;x)\}$ 的收敛速度，可以将它进行修正，使得修正后的算子能保持线性函数．

设 $f\in C[0,\infty)$，$q\in(0,1)$，$x\in[0,\infty)$，$n\in\mathbf{N}$，定义修正的 q - Phillips 算子如下：

$$\tilde{P}_n^q(f;x) = [n]_q\sum_{k=1}^{\infty}p_{n,k}(qx,q)\int_0^{\infty/A(1-q)} q^{k(k-1)}p_{n,k-1}(t,q)f(t)\,d_q(t) + e_q(-q[n]_qx)f(0) \tag{3}$$

其中：$p_{n,k}(x,q)$ 由(2)式给出．

引理 2　对(3)式定义的算子 $\tilde{P}_n^q(f;x)$，让 $e_m(t)=t^m$，$m=0,1,2,3,4$，则

(Ⅰ) $\tilde{P}_n^q(e_0;x) = 1$；(Ⅱ) $\tilde{P}_n^q(e_1;x) = x$；(Ⅲ) $\tilde{P}_n^q(e_2;x) = \frac{x^2}{q^2} + \frac{[2]_q}{q^2[n]_q}x$；

(Ⅳ) $\tilde{P}_n^q(e_3;x) = \frac{x^3}{q^6} + \frac{[2]_qq+[4]_q}{q^6[n]_q}x^2 + \frac{[2]_q[3]_q}{q^5[n]_q^2}x$；

(Ⅴ) $\tilde{P}_n^q(e_4;x) = \frac{x^4}{q^{12}} + \frac{[2]_qq^2+[4]_qq+[6]_q}{q^{12}[n]_q}x^3 + \frac{[2]_q[3]_qq^2+[2]_q[5]_qq+[4]_q[5]_q}{q^{11}[n]_q^2}x^2 + \frac{[2]_q[3]_q[4]_q}{q^9[n]_q^3}x.$

证明　比较(1)、(3)式给出的定义知，$\tilde{P}_n^q(f;x) = P_n^q(f;qx)$，因此由引理 1 易得所述的结果．

引理 3　设序列 $\{q_n\}$ 满足 $q_n\in(0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}q_n = 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n^n = c$（$c$ 是常数），则对 $\forall x\in[0,\infty)$，有

(Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n}\tilde{P}_n^{q_n}((t-x)^2;x) = 2x[(1-c)x+1]$；

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2\widetilde{P}_n^{q_n}((t-x)^4;x)=12x^2+28(1-c)x^3+12(1-c)^2x^4$.

证明 基于 $[n]_{q_n}=\dfrac{1-q_n^n}{1-q_n}$. 根据 $\widetilde{P}_n^{q}(f;x)$ 的线性性和引理 2，有：

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\widetilde{P}_n^{q_n}((t-x)^2;x)=\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\left[\left(\frac{1}{q_n^2}-1\right)x^2+\frac{[2]_{q_n}}{q_n^2[n]_{q_n}}x\right]=2x[(1-c)x+1]$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_n^{q_n}((t-x)^4;x)\\
&=\frac{[2]_{q_n}[3]_{q_n}[4]_{q_n}}{q_n^9[n]_{q_n}^3}x+\frac{x^2}{[n]_{q_n}^2}\left(\frac{[2]_{q_n}[3]_{q_n}q_n^2+[2]_{q_n}[5]_{q_n}q_n+[4]_{q_n}[5]_{q_n}}{q_n^{11}}-\frac{4[2]_{q_n}[3]_{q_n}}{q_n^5}\right)\\
&\quad+\frac{x^3}{[n]_{q_n}}\left(\frac{[2]_{q_n}q_n^2+[4]_{q_n}q_n+[5]_{q_n}}{q_n^{12}}-\frac{4([2]_{q_n}q_n+[4]_{q_n})}{q_n^6}+\frac{6[2]_{q_n}}{q_n^2}\right)+\left(\frac{1}{q_n^{12}}-\frac{4}{q_n^6}+\frac{6}{q_n^2}-3\right)x^4\\
&=:A_{n,q_n}+B_{n,q_n}+C_{n,q_n}+D_{n,q_n}
\end{aligned}$$

基于 $q_n\in(0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$ 时，由 $n\to\infty$ 可得 $[n]_{q_n}\to\infty$（见文献[13]）和 $[n]_{q_n}=\dfrac{1-q_n^n}{1-q_n}$，易知，

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2A_{n,q_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2B_{n,q_n}=12x^2,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2D_{n,q_n}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-q_n^n}{1-q_n}\right)^2\frac{1-4q_n^6+6q_n^{10}-3q_n^{12}}{q_n^{12}}x^4\\
&=\lim_{n\to\infty}(1-q_n^n)^2\frac{-3q_n^{10}-6q_n^9-3q_n^8+3q_n^6+6q_n^5+5q_n^4+4q_n^3+3q_n^2+2q_n+1}{q_n^{12}}x^4\\
&=12(1-c)^2x^4
\end{aligned}$$

经类似计算可得，$\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2C_{n,q_n}=28(1-c)x^3$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2\widetilde{P}_n^{q_n}((t-x)^4;x)=12x^2+28(1-c)x^3+12(1-c)^2x^4$.

2 主要结果及其证明

让 $m>0$，令 $B_m[0,\infty)=\{f|f:[0,\infty)\to\mathbf{R},|f(x)|\leqslant M_f(1+x^m)\}$，其中 M_f 为仅依赖于 f 的正常数. 构造 $C_m[0,\infty)=\left\{f|f\in B_m[0,\infty)\cap C[0,\infty);\ \|f\|_m=\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\dfrac{|f(x)|}{1+x^m}\right\}$，$C_m^*[0,\infty)=\{f|f\in C_m[0,\infty),\exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{1+x^m}<\infty\}$. 下面给出算子列 $\{\widetilde{P}_n^{q}(f;x)\}$ 的 Korovkin 型定理.

定理 1 设 $q_n\in(0,1)$，则对任意 $f\in C_2^*[0,\infty)$，序列 $\{\widetilde{P}_n^{q_n}(f;x)\}$ 在区间 $[0,A]$ 上一致收敛于 f 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$. 对固定的 $A>0$，考虑格同态 $T_A:C[0,\infty)\to C[0,A]$，使得 $T_A(f)=f_{[0,A]}$，则对 $e_m(t)=t^m(m=0,1,2)$，有 $T_A(\widetilde{P}_n^{q_n}(e_m;\cdot))$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛于 $T_A(e_m(t))$. 由文献[14]中命题 4.2.5(6) 的证明知，$C_2^*[0,\infty)$ 与 $C[0,1]$ 同构，且集合 $\{1,t,t^2\}$ 是 $C_2^*[0,\infty)$ 中的 Korovkin 集合. 因此，对 $f\in C_2^*[0,\infty)$，由通常的 Korovkin 型性质[14]可知，对 $e_m(t)=t^m(m=0,1,2)$，$T_A(\widetilde{P}_n^{q_n}(e_m;x))$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛于 $T_A(e_m(t))$，蕴含 $\{\widetilde{P}_n^{q_n}(f;x)\}$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛于 f.

另一方面，若对 $f\in C_2^*[0,\infty)$，序列 $\{\widetilde{P}_n^{q_n}(f;x)\}$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛于 f，则 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$. 事实上，若不然，注意到 $q_n\in(0,1)$，则必存在一个子列 $\{q_{n_k}\}\subset(0,1)$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}q_{n_k}=q_0\in[0,1)$，这样，$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{[n_k]_{q_{n_k}}}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1-q_{n_k}}{1-q_{n_k}^{n_k}}=1-q_0$. 从而，$\lim\limits_{k\to\infty}(\widetilde{P}_{n_k}^{q_{n_k}}(t^2;x)-x^2)=\left(\dfrac{1}{q_0^2}-1\right)x^2+\dfrac{1-q_0^2}{q_0^2}x\neq0$. 这表明序

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

列$\{\widetilde{P}_n^{q_n}(f;x)\}$ 在 $[0,A]$ 上非一致收敛于f，与已知矛盾. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1$. **定理证毕**.

由定理 1 可以得到算子列$\{\widetilde{P}_n^{q}(f;x)\}$ 的 Voronovskaja 型结果.

定理 2　设序列$\{q_n\}$ 满足$q_n\in(0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} q_n^n=c$($c$ 是常数)，则对任意$f\in C_2^*[0,\infty)$ 使得$f',f''\in C_2^*[0,\infty)$，有$\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n}(\widetilde{P}_n^{q_n}(f;x)-f(x))=[(1-c)x+1]xf''(x)$.

证明　让$f,f',f''\in C_2^*[0,\infty)$ 且$x\in[0,\infty)$ 固定. 利用泰勒公式，有$f(t)-f(x)=f'(x)(t-x)+\dfrac{f''(x)}{2}(t-x)^2+\psi(t,x)(t-x)^2$，其中: $\psi(\cdot,x)\in C_2^*[0,\infty)$ 且$\psi(t,x)\to 0(t\to x)$. 从而由引理 2 可得:

$$[n]_{q_n}(\widetilde{P}_n^{q_n}(f;x)-f(x))=\frac{f''(x)}{2}[n]_{q_n}\widetilde{P}_n^{q_n}((t-x)^2;x)+[n]_{q_n}\widetilde{P}_n^{q_n}(\psi(t,x)(t-x)^2;x) \tag{4}$$

由 Cauchy - Schwartz 不等式，有

$$[n]_{q_n}\widetilde{P}_n^{q_n}(\psi(t,x)(t-x)^2;x)\leqslant\sqrt{\widetilde{P}_n^{q_n}(\psi^2(t,x);x)}\cdot\sqrt{[n]_{q_n}^2\widetilde{P}_n^{q_n}((t-x)^4;x)} \tag{5}$$

又注意到$\psi^2(x,x)=0$ 且$\psi^2(\cdot,x)\in C_2^*([0,\infty))$，因此由定理 1 可得: $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{P}_n^{q_n}(\psi^2(t,x);x)=\psi^2(x,x)=0$. 这样，由(5) 式和引理 3 可得: $\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n}\widetilde{P}_n^{q_n}(\psi(t,x)(t-x)^2;x)=0$，从而由式(4) 和引理 3 有$\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n}(\widetilde{P}_n^{q_n}(f;x)-f(x))=[(1-c)x+1]xf''(x)$. **定理证毕**.

最后，给出算子列$\{\widetilde{P}_n^{q}(f;x)\}$ 的局部逼近性质.

令 $C_B[0,\infty)=\{f|f$ 在 $[0,\infty)$ 上连续有界$\}$，并赋予范数$\|f\|=\sup\limits_{x\in[0,\infty)}|f(x)|$.

设 $W^2=\{g\in C_B[0,\infty): g',g''\in C_B[0,\infty)\}$，对$f\in C_B[0,\infty)$ 和$\delta>0$，Peetre K - 泛函定义为 $K_2(f,\delta)=\inf\limits_{g\in W^2}\{\|f-g\|+\delta\|g''\|\}$. 对 $f\in C_B[0,\infty)$ 和 $\delta>0$，f 的连续模定义为 $\omega(f,\delta)=\sup\limits_{0<h\leqslant\delta}\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\{|f(x+h)-f(x)|\}$，$f$ 的二阶光滑模定义为:

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\sup_{x\in[0,\infty)}\{|f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)|\}$$

由文献[15] 有:

$$K_2(f,\delta)\leqslant c\omega_2(f,\sqrt{\delta}) \tag{6}$$

其中: c 是一个正常数.

定理 3　设$q\in(0,1)$，$f\in C_B[0,\infty)$，则对任意的$x\in(0,\infty)$，有:

$$|\widetilde{P}_n^{q}(f;x)-f(x)|\leqslant c\omega_2\left(f,\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}-1\right)x^2+\frac{[2]_q}{q^2[n]_q}x}\right)$$

其中: c 是一个正常数.

证明　设$g\in W^2$，$x\in(0,\infty)$，由泰勒公式知，

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\int_x^t(t-u)g''(u)\,\mathrm{d}u\qquad(t\in[0,\infty))$$

从而由引理 2，有$\widetilde{P}_n^{q}(g;x)=g(x)+\widetilde{P}_n^{q}\left(\int_x^t(t-u)g''(u)\,\mathrm{d}u;x\right)$，因此，

$$\left|\widetilde{P}_n^{q}(g;x)-g(x)\right|\leqslant\left|\widetilde{P}_n^{q}\left(\int_x^t(t-u)g''(u)\,\mathrm{d}u;x\right)\right|\leqslant\widetilde{P}_n^{q}\left(\left|\int_x^t|t-u||g''(u)|\,\mathrm{d}u\right|;x\right)$$
$$\leqslant\widetilde{P}_n^{q}((t-x)^2;x)\|g''\|=\left[\left(\frac{1}{q^2}-1\right)x^2+\frac{[2]_q}{q^2[n]_q}x\right]\|g''\|$$

因为对$f\in C_B[0,\infty)$，$n\in\mathbf{N}$ 和$x\in(0,\infty)$，由式(3) 和引理 2 可得:

$$|\widetilde{P}_n^{q}(f;x)|\leqslant\|f\|\widetilde{P}_n^{q}(1;x)=\|f\|$$

因此，有:

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$|\widetilde{P}_n^q(f;x)-f(x)| \leqslant |\widetilde{P}_n^q(f-g;x)|+|\widetilde{P}_n^q(g;x)-g(x)|+|g(x)-f(x)|$$
$$\leqslant 2\|f-g\|+\left[\left(\frac{1}{q^2}-1\right)x^2+\frac{[2]_q}{q^2[n]_q}x\right]\|g''\|$$

对上式右边关于 $g \in W^2$ 取下确界，有:

$$|\widetilde{P}_n^q(f;x)-f(x)| \leqslant 2K_2\left(f,\left(\frac{1}{q^2}-1\right)x^2+\frac{[2]_q}{q^2[n]_q}x\right)$$

从而由式(6)知，存在常数 $c>0$，使得:

$$|\widetilde{P}_n^q(f;x)-f(x)| \leqslant c\omega_2\left(f,\sqrt{\left(\frac{1}{q^2}-1\right)x^2+\frac{[2]_q}{q^2[n]_q}x}\right)$$

定理证毕.

参考文献:

[1] Philips G M. Bernstein polynomials based on the q – integers [J]. Ann Numer math, 1997, 4(1): 511 – 518.

[2] Agratini O, Nowak G. On a generalization of Bleimann, Butzer and Hahn operators based on q – integers [J]. Math Comput Model, 2011, 53 (5/6): 699 – 706.

[3] Dogru O, Orkcu M. Statistical approximation by a modification of q – Meyer – KÄonig – Zeller operators [J]. Appl Math Lett, 2010, 23: 261 – 266.

[4] Gupta V, Radu C. Statistical approximation properties of q – Baskakov Kan – torovich operators [J]. Cent Eur J Math, 2009, 7 (4): 809 – 818.

[5] Gal S G. Voronovskaja's theorem, shape preserving properties and iterations for complex q – Bernstein polynomials [J]. Studia Sci Math Hungar, 2011, 48 (1): 23 – 43.

[6] Guptal V, Sharma H, Kim T, *et al*. Properties of q – analogue of Beta operator [J]. Adv Differ Equ – Ny, 2012(1): 86 – 101.

[7] Yüksel I. Apptocimsyion by q – Phillips operators [J]. Hacet J Math Stat, 2011, 40(2): 191 – 201.

[8] Sole A D, Kac V G. On integral representations of q – gamma and q – betta functions [J]. Rend Mat Acc Lincei, 2005, 9 (16): 11 – 29.

[9] Gasper G, Rahman M. Basic hypergeometrik series [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[10] Jackson F H. On a q – definite integrals [J]. Quarterly J Pure Appl Math, 1910, 41: 193 – 203.

[11] Kac V G, Cheung P. Quantum calculus [M]. New York: Springer – Verlag, 2002.

[12] Koelink H T, Koornwinder T H. q – Special functions [J]. Contemp Math, 1992, 134: 46 – 103.

[13] Videnskii V S. On q – Bernstein polynomials and related positive linear operators [C] // Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education. St – Petersburg: Hertzen Readings Press, 2004: 118 – 126.

[14] Altomare F, Campiti M. Korovkin – type approximation theory and its applications [M]. Berlin: De Gruyter Studies in Mathematics, 1994.

[15] Devore R A, Lorentz G G. Construtive approximation [M]. Berlin: Springer, 1993.

(责任编辑: 林晓)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net