

## 非均匀 B 样条曲面的自适应节点设置方法

曹娟<sup>1,2)</sup>, 欧阳永昇<sup>3)</sup>, 陈中贵<sup>3)\*</sup>, 曾晓明<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup>(厦门大学数学科学学院 厦门 361005)

<sup>2)</sup>(福建省数学建模与高性能科学计算重点实验室 厦门 361005)

<sup>3)</sup>(厦门大学计算机科学系 厦门 361005)

(chenzhonggui@xmu.edu.cn)

**摘要:** 针对非均匀 B 样条的节点设置问题, 提出一种利用非均匀 B 样条曲面拟合离散数据的迭代算法, 通过优化节点分布来改进拟合曲面的质量. 该算法以带参数化的三角网格曲面为输入, 在首次迭代中根据输入曲面的几何特征将其对应的参数域划分成若干个子区域, 并使得每个子区域上累积的几何特征信息量近似相等, 子区域的重心坐标将取为首次迭代的节点; 在随后的迭代中, 保证前次迭代生成的重心位置固定不变, 并根据前次迭代得到的曲面拟合误差再次将区域划分成累积误差接近相等的子区域, 新增加的子区域重心的坐标选为拟加入的节点. 文中算法自适应地在曲面形状复杂或拟合误差大的区域引入更多的控制顶点, 使得拟合曲面的质量得以逐步改进. 实验结果表明, 该算法快速有效, 在拟合具有明显几何特征的输入数据时具有优势.

**关键词:** B 样条; 样条节点; 最小二乘; 网格参数化  
**中图分类号:** TP391

## Adaptive Knot Placement in Non-uniform B-spline Surface Fitting

Cao Juan<sup>1,2)</sup>, Ouyang Yongsheng<sup>3)</sup>, Chen Zhonggui<sup>3)\*</sup>, and Zeng Xiaoming<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

<sup>2)</sup>(Fujian Provincial Key Laboratory of Mathematical Modeling and High-Performance Scientific Computation, Xiamen University, Xiamen 361005)

<sup>3)</sup>(School of Information Science and Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005)

**Abstract:** Knot placement of non-uniform B-spline is studied, and an iterative surface fitting scheme is proposed by exploring the degrees of freedom of knots to improve the fitting surface's quality. Our algorithm takes as input triangular meshes with parameterization. In the first iteration, the parametric domain is partitioned into several sub-regions with equally accumulated surface geometric information, and the coordinates of the centroids are chosen as the candidates of knots; in the following iteration steps, we partition the regions according to the fitting errors analogously while the centroids generated by previous steps remain unchanged. The fitting surface's quality is progressively improved as more control points are adaptively introduced into the region of the surface with more features or larger fitting error. Several experiments demonstrate the efficacy of our method in fitting surface with distinct geometric features.

**Key words:** B-spline; spline knot; least-squares; mesh parameterization

曲线曲面重建被广泛应用于逆向工程、几何造型、几何处理、计算机视觉等各领域。重建的目

的是将离散的数据潜在的几何形状用一定的数学模型表示出来。将离散的数据转换为连续曲面的

收稿日期: 2013-10-29; 修回日期: 2014-05-19. 基金项目: 国家自然科学基金(61100105, 61100107, 61170324, 61272300); 福建省自然科学基金(2011J05007, 2012J01291). 曹娟(1983—), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向为 CAGD/CG; 欧阳永昇(1989—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 陈中贵(1982—), 男, 博士, 副教授, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算机图形学; 曾晓明(1956—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为逼近论、CAGD.

过程也称为曲面拟合. 用于曲面拟合的连续曲面大致可分为隐式代数曲面、细分曲面和参数样条曲面三大类. 其中参数样条曲面由于具有显式表示、几何直观、便于求导求积等优点而得到广泛的应用. 而用样条曲面拟合离散数据已成为计算机辅助几何设计领域的一经典问题. 过去的几十年间, 涌现出大量的用各种样条拟合数据的理论和实践工作, 被用于数据拟合的样条有经典的 B 样条或 Bézier 曲面片的<sup>[1]</sup>、径向基函数<sup>[2]</sup>、T 样条<sup>[3-4]</sup>、Delaunay Configuration B 样条<sup>[5-6]</sup>、Triangular B 样条<sup>[7]</sup>、流形样条<sup>[8-9]</sup>等.

B 样条具有几何直观性、自动连续性等诸多优点, 因此它是被广泛采用的用于表示连续曲面的样条类型之一. 在 B 样条曲面拟合中,  $u, v$  2 个参数方向上的节点(或节点线, 即与节点对应的穿过四边形参数区域的线段)设置对最终拟合曲面的质量和计算的效率有着重要的影响. 例如, 在同一参数区域上节点线的个数直接影响到在这一区域上控制顶点的个数. 节点线越密集的地方, 控制顶点具有的自由度越多, 越能构造复杂的形状. 反之, 对于简单的形状, 需要的控制顶点自由度越少, 应设置较少的节点线以提高曲面计算的效率. 因此, 有效的节点线设置方法对 B 样条曲面拟合具有重要的意义.

三角网格曲面是现今数字几何处理中被广泛采用的离散数据表达方式之一. 本文针对输入数据为三角网格曲面的情况, 提出由曲面几何特征及拟合误差驱动的张量积 B 样条自适应节点线设置方法. 通过该方法, 更多的节点线将自动地添加到对应于更多曲面细节的参数区域中.

## 1 相关工作

在 B 样条曲面拟合中, 参数化和节点线位置都影响着最终拟合曲面的形状. 在参数化和节点线都固定的情况下, 控制顶点一般可通过求解一个最小二乘的办法得到. B 样条曲面拟合方法中, 最普遍、也是最直接的方法为依次通过以下几个步骤得到拟合曲面<sup>[1,10]</sup>: 选择一种参数化; 选择拟合曲面的阶数和控制顶点个数; 设置各参数方向上的节点向量从而确定节点线; 而后通过求解最小二乘问题得到控制顶点位置. 早期的工作中, 大多假设输入数据为格子状的, 其节点设置基本上依照一个较简单的原则: 即在每个节点区间上包含差

不多数量的参数点, 由此得到的最小二乘问题可被稳定地求解. 但这类方法无法根据曲面的情况自适应地在特征多的地方设置更多的节点线. 因此, 不利于构造具有突出几何特征的曲面.

B 样条拟合的第 2 类方法是直接将数据点的参数化、节点线个数与位置及控制顶点的位置都作为未知量, 通过求解一个非线性的最优化问题来得到. 然而, B 样条基函数是关于局部节点的高度非线性函数, 且合理的节点数也一般无法事先预知. 因此, 以上的最优化问题是一个多模态、高度非线性的优化问题, 可采用如遗传算法<sup>[11-12]</sup>、人工免疫系统算法<sup>[13]</sup>、模拟退火算法<sup>[14]</sup>、分布评估算法<sup>[15]</sup>、粒子群算法<sup>[16]</sup>等人工智能算法求解, 或者用迭代的方法交替优化参数化和节点线<sup>[17-18]</sup>. 这类全局优化算法一般能得到较好的拟合效果, 但大多是针对 B 样条曲线拟合提出, 仅有部分办法被推广到曲面拟合之上. 全局优化算法存在各自固有的一些缺点, 如需固定节点线数, 计算效率低, 在曲面拟合时需要几分钟甚至几个小时不等的计算时间, 并且一般不能保证得到全局最优解.

为提高 B 样条拟合效率, 可通过将最小二乘问题中参数化或节点固定, 从而使问题得到简化. 因此, 第 3 类方法是将节点线数及位置固定而优化参数化或固定参数化而优化节点线位置. 例如, 在用最小二乘法优化拟合的 B 样条曲面控制顶点的方法中, Ma 等<sup>[19]</sup>提出了为随机测量得到的数据指定参数的方法. Floater<sup>[20]</sup>提出了适用于曲面插值与逼近的“保形”参数化方法. Lai 等<sup>[21]</sup>提出了对特征敏感的参数化方法, 即给定的离散曲面几何特征越多的部位对应参数域上所在区域越大, 该方法有利于均匀 B 样条曲面的拟合. Park 等<sup>[22]</sup>提出了在输入数据中选取所谓的主导点(dominate points)的方法, 这些主导点的参数即作为 B 样条曲线拟合的节点线的参数. 此后, 该方法被推广到 B 样条曲面拟合的情形上<sup>[23]</sup>, 但该方法适用于规则的呈格子状分布的离散数据.

此外, 在参数和节点固定的情况下, 传统的方法是通过求解一个线性最小二乘问题, 得到拟合曲面控制顶点的位置. Wang 等<sup>[24]</sup>提出了二次误差函数的概念, 将传统的线性最小二乘问题转化为非线性的最优问题求解, 在节点数量和位置固定的情况下, 控制顶点的位置和参数化交替优化得到.

事实上, 在参数化固定的情况下讨论节点线设置的问题具有重要的意义. 例如, 某些情况下要

求输入数据和其参数化固定, 因此, 后续的拟合过程不允许参数化被修改. 再如, 当输入数据远大于需要的节点线数时, 优化参数化的问题比单纯设置节点的问题复杂度高很多, 因此固定参数化而只优化节点位置可提高整个拟合算法的效率.

本文提出了在参数化固定的情况下, 逐步增加节点个数并自适应调整节点位置的办法. 本文算法以带参数化结果的三角网格为输入数据, 输出为一个拟合的非均匀 B 样条曲面. 本文的主要贡献在于提出了几何特征或拟合误差驱动的迭代增加节点的方法, 即每次迭代都依据输入网格自身的几何特征或迭代过程中得到的拟合误差将参数区域重新划分成更多的子区域, 使得每一子区域上累积的几何特征或拟合误差总量差不多, 同时保持原有子区域重心仍为新划分后子区域的重心, 而新的重心作为节点参数加入到节点集中. 直观来讲, 新加入的节点线总是穿过局部弯曲最大的地方或者拟合误差最大的地方, 即更多的控制顶点将被逐步引入到几何特征多或误差大的区域, 从而拟合曲面质量被逐步改进.

## 2 B 样条曲面的最小二乘拟合

B 样条理论是计算机辅助设计领域中的一项经典理论, 已在各领域被广泛学习和采用. 本文假设读者已熟悉 B 样条曲线曲面的理论, 因此, 只简要介绍 B 样条的概念和引入必要的符号为后文讨论做准备.

不失一般性, 设 B 样条曲面 2 个参数分别为  $u, v \in [0, 1]$ . 给定参数轴  $u$  和  $v$  上递增节点序列  $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p}\}$  和  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+q}\}$ ,  $p \times q$  阶  $((p-1) \times (q-1))$  次 B 样条曲面定义为

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{p}_{ij} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{p}_{ij} (i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n)$  是空间中的控制多边形, 构成控制网格.  $N_{i,p}(u)$  和  $N_{j,q}(v)$  为  $U, V$  定义的  $p$  阶和  $q$  阶 B 样条基函数. 以点  $(u_i, 0)$  和  $(u_i, 1)$  为端点的线段, 即为  $u$  向上节点  $u_i$  对应的节点线. 对  $v$  向节点线也类似定义. 节点线和节点一一对应, 因此, 在不混淆的情况下, 节点线与节点可互换使用.

给定三角网格顶点  $X = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3, i=0, 1, \dots, N\}$  及对应的参数化  $\Phi = \{(s_i, t_i) \in [0, 1] \times [0, 1], i=0, 1,$

$\dots, N\}$ , 若用指定阶数的 B 样条曲面式(1)去拟合离散数据  $X$ , 可通过求解以下最小二乘问题得到 B 样条曲面控制顶点的位置

$$f(\{\mathbf{p}_{ij} | 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}) = \sum_{i=0}^k \|S(s_i, t_i) - \mathbf{x}_i\|^2,$$

即等价于求解一个线性方程组问题, 一般可通过 SVD 分解法(奇异值分解法)或 LU 分解法计算得到.

在实际应用中, 大多测量得到的数据都是圆盘同胚的面片. 因此本文假设离散点集采样源于某三维物体表面的单连通面片上. 在上述最小二乘问题中, 参数化、节点向量等都影响到最终的曲面形状. 本文主要讨论的是在离散数据及其参数化给定的条件下, 如何设定有利于最小二乘拟合的节点向量  $U, V$  的问题.

## 3 自适应的节点设置方法

本文提出 B 样条曲面拟合过程中, 采用自适应的方法设置节点线位置. 该方法自动地在对应较多曲面特征或对应拟合误差较大的参数区域加入更多的节点线. 该方法的优点在于: 1) 适用于较大规模的离散的三角网格数据, 并且可避免将三角网格转化为四边形网格; 2) 节点数无需预先设定, 依据输入数据的特点自适应地增加; 3) 算法简单, 实现方便, 且执行效率高.

本文算法的提出是基于以下观察给出的: 对指定次数的 B 样条子面片, 即定义在某子矩形区域  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$  上的面片, 其控制顶点的自由度是相同的, 即逼近几何形状的能力是相同的. 因此, 对输入的数据对应几何形状越复杂的部分, 需要越多的 B 样条子面片才能达到较好的逼近效果; 反之, 形状越简单的部分, 需要的子面片数越少.

假设输入的离散数据已参数化到  $[0, 1] \times [0, 1]$  的矩形区域上. 根据输入曲面的几何特征将参数域划分成若干子块, 使得每个子块对应的输入曲面复杂程度相近, 即每子块上的累加的几何特征相近. 每子块重心的参数坐标被用作 2 参数方向上的节点. 由于一般无法预知合理的节点线数, 因此, 若以上得到的拟合曲面效果还不理想, 则再次根据当前的拟合误差, 将输入曲面在参数域上分割成更多数量的子块, 使得每一子块累积的拟合误差差不多. 新得到的子块重心参数坐标将被添加到节点向量中. 这一算法的效果是使得节点线趋向集中于参数域上对应几何特征多或拟合误差大

的区域, 从而在曲面复杂的地方, 对应更多的控制顶点, 即有更多的自由度构造复杂的几何形状. 本算法的基本框架如图 1 所示, 下面将会对各步骤进行具体的说明.

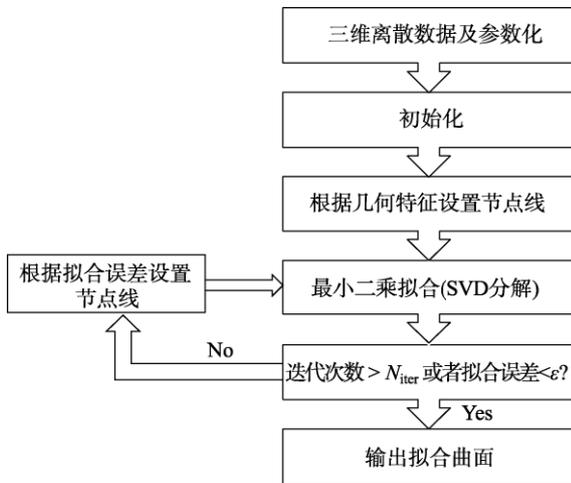


图 1 算法概况

### 3.1 曲面拟合的初始化

本文输入为给定的离散三角网格曲面  $X = \{x_i \in \mathbb{R}^3, i = 0, 1, \dots, N\}$  及其参数化  $\Phi = \{(s_i, t_i) \in [0, 1] \times [0, 1], i = 0, 1, \dots, N\}$ , 分别如图 2a, 2b 所示. 指定拟合的 B 样条曲面的阶数为  $m \times n$  阶, 节点向量为  $U = \{u_0, \dots, u_{\#U}\}$ ,  $V = \{v_0, \dots, v_{\#V}\}$ , 其中  $\#U, \#V$  分别为  $U, V$  中非重节点个数减 1. 初始化时  $\#U = \#V = 1, u_0 = v_0 = 0, u_{\#U} = v_{\#V} = 1$  分别为  $m$  重和  $n$  重节点. 下文中更新的节点向量  $U, V$  元素按升序排列, 且只有首尾节点为重节点( $u$  向为  $m$  重,  $v$  向为  $n$  重).

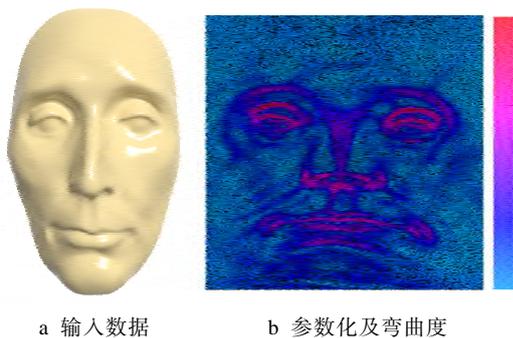


图 2 输入数据及曲面弯曲度的颜色表示

### 3.2 根据几何特征加入节点

#### 3.2.1 几何特征度量

曲率是描述曲面局部弯曲程度的重要度量. 对于嵌入在三维空间中的二维流形曲面, 有 2 种曲

率存在: 高斯曲率和平均曲率, 它们分别为主曲率  $k_{\min}$  和  $k_{\max}$  的乘积和平均. 主曲率描述了曲面在给定点处不同方向的弯曲程度的最大值和最小值. 本文采用主曲率绝对值之和的 4 次方  $(|k_{\min}| + |k_{\max}|)^4$  作为衡量曲面局部弯曲程度度量, 并称之为弯曲度.

离散曲率的估计是离散微分几何的一项重要研究内容, 根据离散曲面的表示方法与应用的不同, 离散曲率的估计方法也各不相同. 本文采用文献[25]的方法, 通过估计每个网格顶点上的曲率张量, 从而得到曲面上每点的最大最小主曲率及弯曲度. 记每个顶点  $x_i$  对应的弯曲度为  $\rho_i$ . 如图 2a, 算法输入为 1 张人脸曲面, 其弯曲度在参数域上的分布如图 2b 所示, 其中, 红色越深表示弯曲度越大, 蓝色越浅, 表示弯曲度越小. 每个三角片上的弯曲度由其对应顶点的弯曲度线性插值得到, 由此得到弯曲度函数  $\rho(u, v), (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

#### 3.2.2 节点线的设置及扰动

如前所述, 若将控制顶点自由度个数作为衡量 B 样条曲面造型能力的度量, 则每个子矩形域上固定次数的 B 样条面片造型能力是一致的. 假设用具有  $K_0$  个这样的面片拼成的 B 样条曲面拟合输入的离散数据, 则每一面片应分担的输入离散数据的复杂度应相近, 其中曲面复杂度用 3.2.1 节定义的弯曲度来衡量. 因此将参数域分成  $K_0$  小块  $\Omega_i, i = 1, \dots, K_0$ , 使得每一块对应的曲面弯曲度一致, 即  $\int_{\Omega_i} \rho(u, v) d\sigma$  相等. 满足这一条件的区域划分有多种办法. 为避免  $\Omega_i$  的形状过于狭长, 将弯曲度结合每一片的形状考虑. 设  $y_i = (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$  为区域  $\Omega_i$  重心, 则  $\Omega_i$  关于其重心的转动惯量的计算式为  $\int_{\Omega_i} \|(u, v) - y_i\|^2 d\sigma$ . 已知对于面积给定的块, 圆盘的转动惯量最小. 于是, 在弯曲度的积分中添加有关区域  $\Omega_i$  的形状度量为

$$\tau_i \propto \int_{\Omega_i} \rho(u, v) \|(u, v) - y_i\|^2 d\sigma,$$

其中,  $\|\cdot\|$  计算 2 个点之间的距离, 该距离可由参数域上的测地距离给出<sup>[26]</sup>, 这里为简单起见, 我们采用欧氏距离. 由此可得整体区域划分的目标函数

$$E(\{y_i | i = 1, \dots, K_0\}) = \sum_{i=1}^{K_0} \tau_i \quad (2)$$

注意到, 当函数式(2)被最小化时, 和式中的每一项  $\tau_i$  大小应一致, 且由于加入了形状的约束,  $\Omega_i$

的直径不至于太大. 事实上, 函数式(2)为典型的重心 Voronoi 剖分(centroidal Voronoi tessellation, CVT)能量函数<sup>[27]</sup>. 理论上,  $\Omega$  的形状应趋向于正六边形. 函数式(2)最小化可通过 Lloyd 迭代法<sup>[28]</sup>或拟牛顿法<sup>[29]</sup>计算, 本文采用前者的方法. 将式(2)最小值的解  $y_i = (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$  对应的参数值按升序排列得节点集  $\tilde{U}_0 = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{K_0}\}$  和  $\tilde{V}_0 = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{K_0}\}$ . 这些节点为拟添加到节点序列  $U, V$  的候选点.

根据 Schoenberg-Whitney 理论<sup>[30]</sup>, 为保证最小二乘系数矩阵为非奇异的, 对  $\tilde{U}_0, \tilde{V}_0$  中的节点进行适当的局部修正和扰动, 使得  $\tilde{U}_0, \tilde{V}_0$  中的点添加到节点向量  $U, V$  后, 每个基函数支集上至少包含 1 个数据的参数点. 具体修正分为如下 2 步:

1) 合并间距过小的相邻节点. 对序列  $\tilde{U}_0$ , 若存在  $i_0$ , 使得  $\tilde{u}_{i_0+1} - \tilde{u}_{i_0} < \frac{1}{\sqrt{N}}$ , 则用  $\tilde{u}_{i_0+1}$  和  $\tilde{u}_{i_0}$  的中点代替这 2 点, 即  $\tilde{U}_0 = \tilde{U}_0 \cup \left\{ \frac{\tilde{u}_{i_0+1} + \tilde{u}_{i_0}}{2} \right\} \setminus \{\tilde{u}_{i_0+1}, \tilde{u}_{i_0}\}$ , 其中  $N$  为输入网格曲面的顶点数; 更新过的  $\tilde{U}_0$  元素仍按升序排列. 对  $\tilde{V}_0$  也做同样的操作.

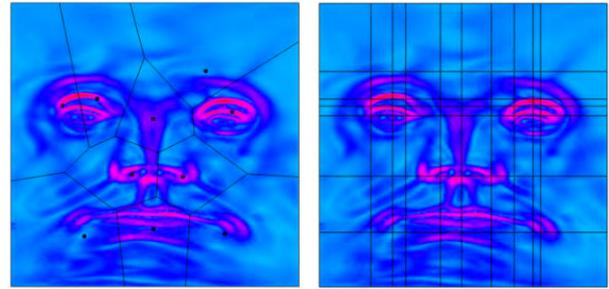
2) 删除可能引起系数矩阵奇异的候选节点. 对  $\tilde{U}_0$  中的每一个元素  $\tilde{u}_{i_0} \in [u_i, u_{i+1}]$ , 若存在  $j_0$ , 使得  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_{j_0}, v_{j_0+1}]$  不包含任何参数化点  $(s_i^*, t_i^*)$ , 则  $\tilde{u}_{i_0}$  不被添加到  $U$  中; 若落在每个区域  $[u_i, \tilde{u}_{i_0}] \times [v_j, v_{j+1}]$ ,  $[\tilde{u}_{i_0}, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ ,  $j=0, \dots, \#V-1$  上的参数点  $(s_i^*, t_i^*)$  非空, 则  $U = U \cup \{\tilde{u}_{i_0}\}$ ; 除此之外, 设

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \max\{s_i^* \mid (s_i^*, t_i^*) \in [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]\}, \\ \beta_j &= \min\{s_i^* \mid (s_i^*, t_i^*) \in [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]\}, \\ j &= 0, \dots, \#V-1; \end{aligned}$$

则  $U = U \cup \{(\min\{\alpha_j\} + \max\{\beta_j\})/2\}$ . 对向量  $\tilde{V}_0$  也做同样的操作.

图 3a 中, 根据弯曲度参数域被分为 10 个区域, 对应 10 个重心  $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$ , 其参数作为拟插入节点的参数. 经过修正和扰动后, 如图 3b 中所示, 最终  $U$  向节点序列中新增的节点数为 9 个, 而  $V$  向节点序列中新增节点数为 6 个. 注意到, 虽然最后添加到节点序列  $U, V$  的节点个数与最初设置的个数不一致, 且得到的子矩形区域比设定的要多, 但得到的节点线在曲面弯曲程度较大的部分分布密集, 而弯曲程度较小的部分分布稀疏. 值得指出的是,

本文弯曲度定义为主曲率绝对值之和的 4 次方是一个经验值. 事实上, 次方越高节点线在弯曲度大的地方分布将越密, 而本文发现采用 4 次方时得到的效果较好.



a 初始子区域及重心 b 实际加入的节点线

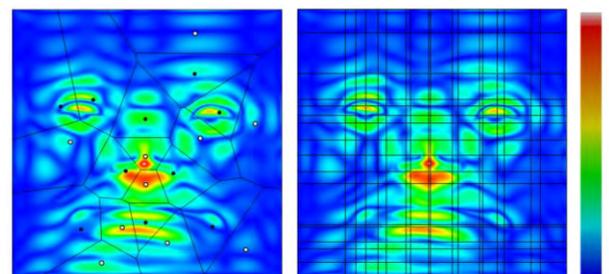
图 3 初始节点线分布

### 3.3 根据逼近误差加入节点

由于一般无法预知所需要的节点线数量, 因此, 前一步根据曲面几何特征添加一定数量的节点后, 得到的拟合曲面未必能达到预期指定的拟合误差. 为此, 根据当前得到的拟合曲面的误差分布, 进一步加入更多的节点. 与根据曲面弯曲度设置节点类似, 我们期望拟合误差大的区域加入更多的节点线; 反之, 拟合误差小的地方节点线要少. 设拟添加到  $U, V$  的节点数为  $K_1$ . 设计函数为

$$E(\{y_i\}) = \sum_{i=1}^{K_0+K_1} \int_{\Omega} e^4(u, v) \|(u, v) - y_i\|^2 d\sigma \quad (3)$$

其中  $e(u, v)$  为拟合误差函数, 由输入数据各顶点的拟合误差线性插值得到(如图 4 所示, 右边颜色条最顶端对应误差最大值, 最底端对应误差最小值), 其中前  $K_0$  个  $\Omega$  的重心  $y_i = (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i), i=1, \dots, K_0$  不变. 通过最优化函数式(3), 得到新重心集合  $y_i = (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i), i=K_0+1, \dots, K_0+K_1$  以及对应的节点集  $\tilde{U}_1 = \{\tilde{u}_{K_0+1}, \tilde{u}_{K_0+2}, \dots, \tilde{u}_{K_0+K_1}\}$  和  $\tilde{V}_1 = \{\tilde{v}_{K_0+1}, \tilde{v}_{K_0+2}, \dots, \tilde{v}_{K_0+K_1}\}$ . 函数式(3)的最小化方法基本与最小化函数式(2)一致, 只是前  $K_0$  个重心保持不变. 如图 4a 所示.



a 新老区域重心 b 修正后节点线

图 4 拟合误差及节点线设置

黑色点为第 1 次迭代得到的重心, 白色点为第 2 次迭代新增的 10 个重心点. 同样地, 对  $\tilde{U}_1$  和  $\tilde{V}_1$  作修正后合并到节点序列  $U, V$  中. 如图 4b 所示,  $U, V$  方向各添加了若干节点线. 算法迭代执行, 每次迭代中, 之前迭代得到的重心固定不动, 直到拟合误差小于给定的值或迭代次数达到指定的阈值.

### 4 实验结果

本文将算法用在若干个网格曲面数据中, 以检验算法对离散数据的拟合能力. 本文的算法使用 C++ 语言实现, 实验平台是配置 Intel i7 2.7GHz 处理器和 4GB 内存的笔记本电脑. 用  $3 \times 3$  次的非均匀 B 样条拟合数据, 并指定每次增加中新增加的子区域个数为 10 个. 规定当拟合的均方根误差小于 0.1% (相对于输入网格曲面的最小包围盒的最长边) 或迭代次数为 10 次时, 算法结束. 如表 1~4 为本算法用  $3 \times 3$  次非均匀 B 样条曲面拟合人脸模型、Moai 模型、螺丝刀手柄模型以及耳朵模型的效果. 表 1 中, 人脸的模型采用  $41 \times 46$  个控制点. 表 2 中螺丝刀手柄模型采用了  $18 \times 21$  个控制顶点. 表 3 中, 耳朵模型采用了  $39 \times 33$  个控制顶点. 表 4 中, Moai 模型采用了  $42 \times 57$  个控制顶点. 表 5 给出了输入数据和拟合结果的统计, 其中 R.M.S.E 表示均

表 1 人脸模型( $41 \times 46$  个控制顶点)

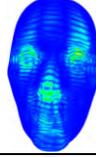
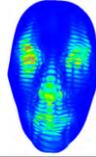
方法	拟合曲面	拟合曲面 对应的控制网格	拟合误差的 颜色表示
本文 算法			
均匀 B 样 条			

表 2 螺丝刀手柄模型( $18 \times 21$  个控制顶点)

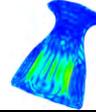
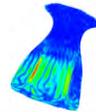
方法	拟合曲面	拟合曲面 对应的控制网格	拟合误差的 颜色表示
本文 算法			
均匀 B 样 条			

表 3 耳朵模型( $39 \times 33$  个控制顶点)

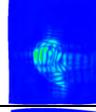
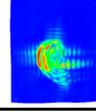
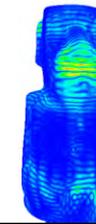
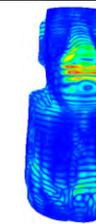
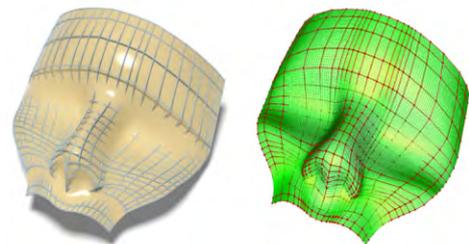
方法	拟合曲面	拟合曲面 对应的控制网格	拟合误差的 颜色表示
本文 算法			
均匀 B 样 条			

表 4 Moai 模型( $42 \times 57$  个控制顶点)

方法	拟合曲面	拟合曲面 对应的控制网格	拟合误差的 颜色表示
本文 算法			
均匀 B 样 条			

方根误差, M.E. 表示最大误差. 从表 1~5 中显示的拟合结果和误差比较可以看出, 本文算法在构造细节方面具有明显优势. 此外, 文献[23]解决的问题与本文最接近, 即通过求解最小二乘问题取得 B 样条拟合, 拟合过程中不修改参数化, 但该文只适用于格子状数据. 用本文的算法拟合文献[23]中图 3 中的 Mask 模型(数据由文献[23]提供)我们发现本文方法未见优势. 例如, 为得到最大误差控制在  $10^{-3}$  的拟合曲面, 本文方法用了 500 个控制顶点, 而文献[23]用了 506 个控制顶点(如图 5 所示), 但为得到最大误差控制在  $10^{-4}$  内的拟合曲面, 本文需要比文献[23]更多的控制顶点.



a 本文方法的结果 (20 × 25 个控制顶点)      b 文献[23]的结果 (23 × 22 个控制顶点)

图 5 Mask 模型

表 5 算法拟合数据统计

模型	顶点数	控制顶点数	RMSE/%		ME/%		迭代次数	运行时间/s
			均匀	非均匀	均匀	非均匀		
人脸	42 000	41 × 46	0.11	0.06	0.73	0.40	5	4.375
螺丝刀柄	57 000	18 × 21	0.15	0.10	0.83	0.66	3	2.325
耳朵	14 000	39 × 33	0.19	0.08	1.12	0.61	4	1.84
Moai	82 000	42 × 57	0.08	0.05	0.56	0.40	6	8.196

## 5 结 论

本文提出了一种自适应设置非均匀 B 样条曲面节点的算法, 该方法根据被拟合数据的几何特点和迭代过程中的拟合误差, 自适应地添加节点线, 为 B 样条曲面拟合提供了另一种可供选择的节点设置方法。

本文提出的节点线设置的方法是一种自适应的启发式算法, 因此得到的节点线数量与位置一般并非最佳结果. 对于输入数据特征不多, 且特征分布较为平均的数据, 本文算法不具明显的优势. 本文算法优势在于可处理非格子状的数据, 且计算快, 对于 0.1% 的均方根误差阈值, 几步迭代就能达到。

迭代过程中, 区域的划分(即节点的更新)计算时间很短, 一般在 0.1 s 之内就可以完成. 最耗时的部分为求解最小二乘问题, 本文实验的例子中, 根据网格大小不同, 每步迭代在几秒内都能完成. 对高度非线性的最优化问题, 好的初始值有利于算法快速收敛. 因此本文的结果作为求解节点线、参数化和控制顶点的全局最优解问题的初始化, 有利于算法的收敛. 此外, 由于本算法中自适应节点设置的方法独立于网格的拓扑连接关系, 因此, 本算法也适用于具有参数化信息的点云数据。

本文算法目前考虑输入数据带有合理的参数化信息. 坏的参数化结果, 如输入数据的参数点在参数域上分布非常不均匀, 则不利于样条的拟合. 因此, 将来的一项工作为将有利于样条拟合的参数化的优化纳入到算法中来。

## 参考文献(References):

- [1] Piegl L, Tiller W. The NURBS book [M]. 2nd ed. Heidelberg: Springer, 1997.
- [2] Carr J C, Beatson R K, Cherrie J B, *et al.* Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions [C]// Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 2001: 67-76
- [3] Zheng J M, Wang Y M, Seah H S. Adaptive T-spline surface fitting to z-map models [C]// Proceedings of the 3rd Interna-

tional Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and South East Asia. New York: ACM Press, 2005: 405-411

- [4] Wang J, Yang Z W, Jin L B, *et al.* Parallel and adaptive surface reconstruction based on implicit PHT-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(8): 463-474
- [5] Cao J, Li X, Wang G Z, *et al.* Surface reconstruction using bivariate simplex splines on Delaunay configurations [J]. Computers & Graphics, 2009, 33(3): 341-350
- [6] Cao J, Li X, Chen Z G, *et al.* Spherical DCB-spline surfaces with hierarchical and adaptive knot insertion [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2012, 18(8): 1290-1303
- [7] He Y, Qin H. Surface reconstruction with triangular B-splines [C]// Proceedings of Geometric Modeling and Processing. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2004: 279-287
- [8] Gu X F, He Y, Qin H. Manifold splines [J]. Graphical Models, 2006, 68(3): 273-254
- [9] Wang H Y, He Y, Li X, *et al.* Polycube splines [J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(6): 721-733
- [10] Weiss V, Andor L, Renner G, *et al.* Advanced surface fitting techniques [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(1): 19-42
- [11] Yoshimot F, Moriyama M, Harada T. Automatic knot placement by a genetic algorithm for data fitting with a spline [C]// Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1999: 162-169
- [12] Sarfraz M, Raza S A. Capturing outline of fonts using genetic algorithm and splines [C]// Proceedings of the 5th International Conference on Information Visualisation. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2001: 738-743
- [13] Ulker E, Arslan A. Automatic knot adjustment using an artificial immune system for B-spline curve approximation [J]. Information Sciences, 2009, 179(10): 1483-1494
- [14] Sarfraz M, Riyazuddin M. Curve fitting with NURBS using simulated annealing [M]// Applied Soft Computing Technologies: The Challenge of Complexity. Heidelberg: Springer, 2006, 34: 99-112.
- [15] Zhao X Y, Zhang C M, Yang B, *et al.* Adaptive knot placement using a GMM-based continuous optimization algorithm in B-spline curve approximation [J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(6): 598-604
- [16] Gálvez A, Iglesias A. Particle swarm optimization for non-uniform rational B-spline surface reconstruction from clouds of 3D data points [J]. Information Sciences, 2012, 192: 174-192
- [17] Xie W C, Zou X F, Yang J D, *et al.* Iteration and optimization scheme for the reconstruction of 3D surfaces based on non-uniform rational B-splines [J]. Computer-Aided Design, 2012, 44(11): 1127-1140
- [18] Gálvez A, Iglesias A, Puig-Pey J. Iterative two-step genetic-algorithm-based method for efficient polynomial B-spline surface reconstruction [J]. Information Sciences, 2012, 182(1): 56-76

- [19] Ma W Y, Kruth J P. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces [J]. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(9): 663-675
- [20] Floater M S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1997, 14(3): 231-250
- [21] Lai Y K, Hu S H, Pottmann H. Surface fitting based on a feature sensitive parametrization [J]. *Computer-Aided Design*, 2006, 38(7): 800-807
- [22] Park H, Lee J H. B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points [J]. *Computer-Aided Design*, 2007, 39(6): 439-451
- [23] Park H. B-spline surface fitting based on adaptive knot placement using dominant columns [J]. *Computer-Aided Design*, 2011, 43(3): 258-264
- [24] Wang W P, Pottmann H, Liu Y. Fitting B-spline curves to point clouds by curvature-based squared distance minimization [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2006, 25(2): 214-238
- [25] Cohen-Steiner D, Morvan J M. Restricted delaunay triangulations and normal cycle [C]// *Proceedings of the 19th Annual Symposium on Computational Geometry*. New York: ACM Press, 2003: 312-321
- [26] Chen Zhonggui, Ouyang Yongsheng, Cao Juan. Feature-preserving method for mosaic image generation [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2014, 26(4): 520-527(in Chinese)  
(陈中贵, 欧阳永昇, 曹娟. 特征保持的马赛克图像生成方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2014, 26(4): 520-527)
- [27] Wang Jiaye, Wang Wenping, Tu Changhe, *et al.* *Computational geometry and its applications* [M]. Beijing: Science Press, 2011 (in Chinese)  
(汪嘉业, 王文平, 屠长河, 等. *计算几何及应用* [M]. 北京: 科学出版社. 2011)
- [28] Lloyd S. Least squares quantization in PCM [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1982, 28(2): 129-137
- [29] Liu Y, Wang W P, Lévy B, *et al.* On centroidal voronoi tessellation-energy smoothness and fast computation [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2009, 28(4): Article No.101
- [30] de Boor C. *A practical guide to splines* [M]. New York: Springer, 1978