第49卷 第8期 山东大学学报(理学版) 2014年8月
Vol.49 No.8 Journal of Shandong University(Natural Science) Aug. 2014

文章编号:1671-9352(2014)08-0086-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.1.2014.061

一类覆盖粗糙直觉模糊集模型的模糊粗糙度和粗糙熵

石素玮[1],李进金[1*],谭安辉[2]
(1. 闽南师范大学数学与统计学院,福建 漳州 363000;
2. 厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要: 在覆盖粗糙直觉模糊集模型的基础上,将粗糙度和粗糙熵的概念引入到该模型中,研究直觉模糊集的不确定程度,讨论了该度量的相关性质,并通过两个例子证明了直觉模糊集的模糊粗糙度和粗糙熵随着该模型覆盖变细而单调减少。

关键词: 覆盖;模糊粗糙度;直觉模糊集;粗糙熵;粗糙集
中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

Fuzzy roughness and rough entropy of covering based generalized rough intuitionistic fuzzy set model

SHI Su-wei[1], LI Jin-jin[1*], TAN An-hui[2]
(1. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China;
2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian, China)

Abstract: On the basis of the covering rough intuitionistisc fuzzy set model, this paper introduces the notions of roughness and rough entropy, by which the uncertainty measure of intuitionistisc fuzzy set is investigated and their properties are discussed. It is proved that the fuzzy roughness and rough entropy of intuitionistisc fuzzy sets are monotonously decreasing with the subdivision of covering sets by examples.

Key words: covering; fuzzy roughness; intuitionistic fuzzy sets; rough entropy; rough set

0 引言

粗糙集理论[1]是处理不确定、不精确信息的数学理论,已成功应用于很多领域。由于客观事物所具有的模糊性、随机性以及复杂性,Dubois和Prade结合模糊集理论,提出模糊粗糙集和粗糙模糊集,该理论得到了广泛的研究与应用[2-3]。对象分类可以是划分分类,但更多的是覆盖分类,学者们将粗糙集模型推广到覆盖粗糙集和覆盖粗糙模糊集模型[4]。大部分粗糙模糊集模型是将模糊集定义在全邻域或近邻域上,并考虑它的不确定性度量。文献[7]从规则的置信度考虑,构造了一类覆盖粗糙模糊集模型,该模型比之前的模型能更好地解决对象中存在上、下近似不确定可分的问题。文献[8-10]讨论了在该模型下的不确定性研究。

收稿日期:2014-06-02; 网络出版时间:2014-07-08 10:22
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.6040/j.issn.1671-9352.1.2014.061.html
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61379021,11301367,11061004);福建省自然科学基金资助项目(2013J01029);闽南师范大学研究生科研立项资助(YJS201409)
作者简介:石素玮(1988-),女,硕士,研究方向为粗糙集不确定性理论. Email:shisuwei2008@126.com
* 通讯作者:李进金(1960-),男,博士,教授,研究方向为拓扑学与不确定性理论的研究. E-mail:jinjinli@mnnu.edu.cn

考虑到模糊集的隶属函数是单一的值无法同时表示支持、反对和犹豫，Atanassov 将模糊集理论进行推广，提出了直觉模糊集[1]，相对于模糊集只考虑隶属度而直觉模糊集既能考虑隶属度、非隶属度，还能考虑犹豫度，故在处理不确定信息时具有更强表达能力。

本文在一类覆盖的粗糙直觉模糊集模型的基础上，将粗糙度和粗糙熵的概念引入到该模型中，用于讨论直觉模糊集的不确定的程度，得出直觉模糊集的粗糙度和粗糙熵随着覆盖变细而单调减少，再通过实例进行验证。

1　预备知识

约定　文中的 U 表示为非空有限论域，C 表示为 U 的一个覆盖。

定义 1[5]　设 U 是非空有限论域，$C=\{X \mid X\subseteq U\}$ 是 U 的非空子集族，若 $\cup C=U$，则称 C 是 U 的覆盖，称序对 (U,C) 为覆盖近似空间。由于 U 的划分是 U 的一个覆盖，可知覆盖是划分的推广。

定义 2[5]　设 (U,C) 为覆盖近似空间，$x\in U$，$Md_C(x)=\{K\in C \mid x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\subseteq K\Rightarrow K=S)\}$ 称为 x 的最小描述。

定义 3[7]　设 (U,C) 为覆盖近似空间，$\forall x\in U$，$K\in C$，若 $K\in Md_C(x)$，则称 K 为 x 的一个领域。$\bigcup_{K\in Md_C(x)} K$ 称为 x 的全邻域，记为 $AN(x)$。$\bigcap_{K\in Md_C(x)} K$ 称为 x 的近邻域，记为 $CN(x)$。

定义 4[7]　设 C_1，C_2 是 U 上的两个覆盖，$x\in U$，若对于 $\forall K'\in Md_{C_1}(x)$，都 $\exists K''\in Md_{C_2}(x)$，使得 $K''\subseteq K'$，则称 C_2 比 C_1 更细，记为 $C_2\subseteq C_1$。若 $C_1\subseteq C_2$ 且 $C_2\subseteq C_1$，则称 C_1 与 C_2 相等。

定义 5[12]　设 C 是论域 U 的一个覆盖且 $K\in C$，若 K 是 $C-\{K\}$ 中某些集合的并，则称 K 是 C 的一个可约元，否则称 K 是 C 的一个不可约元。若 C 中去掉所有可约元后所得到的覆盖，称为最简覆盖，记为 $C_{(\mathrm{reduct})}$。

设 (U,C) 是覆盖近似空间，$C_{(\mathrm{reduct})}$ 为 C 的约简，有 $C_{(\mathrm{reduct})}=C$（因为 $Md_C(x)=Md_{C_{(\mathrm{reduct})}}(x)$）并且 $\forall A\in IF(U)$，A 相对于覆盖近似空间 (U,C) 和 $(U,C_{(\mathrm{reduct})})$ 上、下近似是分别相等。

定义 6[11]　称 $A=\{<x,\mu_A(x),v_A(x)> \mid x\in U\}$ 为 U 上直觉模糊集，$\mu_A:X\to[0,1]$ 和 $v_A:X\to[0,1]$ 分别为 U 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度且满足条件 $0\leqslant\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$，$\forall x\in U$。

记 U 中所有的直觉模糊集合为 $IF(U)$。

定义 7[11]　对任一直觉模糊 $\alpha_i=(\mu_i,v_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，记 α_i 的得分函数为 $S(\alpha_i)$，且 $S(\alpha_i)=\mu_i-v_i$。若 $\alpha_1=(\mu_1,v_1)$，$\alpha_2=(\mu_2,v_2)$，有：

(1) $\alpha_1=\alpha_2\Leftrightarrow\mu_1=\mu_2\wedge v_1=v_2$；

(2) $\tilde{\alpha}=(v_\alpha,\mu_\alpha)$；

(3) $\alpha_1\cap\alpha_2\Leftrightarrow\langle\min\{\mu_1,\mu_2\},\max\{v_1,v_2\}\rangle$；

(4) $\alpha_1\cup\alpha_2\Leftrightarrow\langle\max\{\mu_1,\mu_2\},\min\{v_1,v_2\}\rangle$。

定义 8[10]　设 (U,C) 是覆盖近似空间，$A\in IF(U)$，则 A 关于 (U,C) 的下近似 $\underline{C}(A)$ 和上近似 $\overline{C}(A)$ 表示为 U 上的一对直觉模糊集合，其隶属函数和非隶属函数分别表示为：

$$u_{\underline{C}(A)}(x)=\sup_{K\in Md_C(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\},\ v_{\underline{C}(A)}(x)=\inf_{K\in Md_C(x)}\{\sup_{y\in K}\{v_A(y)\}\},$$

$$u_{\overline{C}(A)}(x)=\inf_{K\in Md_C(x)}\{\sup_{y\in K}\{u_A(y)\}\},\ v_{\overline{C}(A)}(x)=\sup_{K\in Md_C(x)}\{\inf_{y\in K}\{v_A(y)\}\}。$$

其中 $0\leqslant u_{\underline{C}(A)}(x)+v_{\underline{C}(A)}(x)\leqslant 1$，$0\leqslant u_{\overline{C}(A)}(x)+v_{\overline{C}(A)}(x)\leqslant 1$。

若 $\forall x\in U$，$\underline{C}(A)=\overline{C}(A)$，则称 A 关于覆盖近似空间 (U,C) 是可定义的，否则是粗糙的，即称 A 为粗糙直觉模糊集。

定义 9[8]　设 (U,C) 为覆盖近似空间，$A\in F(U)$，那么 A 关于覆盖近似空间 (U,C) 的模糊粗糙度定义为 $\rho_A=1-\dfrac{|\underline{C}(A)|}{|\overline{C}(A)|}$，其中 $|\underline{C}(A)|=\sum\underline{C}(A)(x)$，$|\overline{C}(A)|=\sum\overline{C}(A)(x)$，若 $|\overline{C}(A)|=0$ 时约定 $\rho_A=0$。

2 主要结论

2.1 该模型下的性质

性质1[10] 设(U,C)为覆盖近似空间,覆盖粗糙直觉模糊集的上、下近似算子具有性质:

(1) $\underline{C}(U)=\overline{C}(U)=U$,$\underline{C}(\phi)=\overline{C}(\phi)=\phi$;(2) $\underline{C}(A)\subseteq A\subseteq\overline{C}(A)$;

(3) $\underline{C}(\sim A)=\sim\underline{C}(A)$,$\overline{C}(\sim A)=\sim\overline{C}(A)$;(4) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{C}(A)\subseteq\underline{C}(B)$ 且 $\overline{C}(A)\subseteq\overline{C}(B)$;

(5) $\underline{C}(A)=\underline{C}(\underline{C}(A))$,$\overline{C}(A)=\overline{C}(\overline{C}(A))$。

证明 见文献[7]。

性质2 设C_1,C_2为论域U上的两个覆盖,$A\in IF(U)$,若$C_1\subseteq C_2$时,则$\underline{C_2}(A)\subseteq\underline{C_1}(A)\subseteq A\subseteq\overline{C_1}(A)\subseteq\overline{C_2}(A)$。

证明 设$x\in U$,有

$$u_{\underline{C_1}(A)}(x)=\sup_{K\in Md_{C_1}(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\},\quad v_{\underline{C_1}(A)}(x)=\inf_{K\in Md_{C_1}(x)}\{\sup_{y\in K}\{v_A(y)\}\},$$
$$u_{\underline{C_2}(A)}(x)=\sup_{K'\in Md_{C_2}(x)}\{\inf_{y\in K'}\{u_A(y)\}\},\quad v_{\underline{C_2}(A)}(x)=\inf_{K'\in Md_{C_2}(x)}\{\sup_{y\in K'}\{v_A(y)\}\},$$

由于$C_1\subseteq C_2$,有$\forall K'\in Md_{C_2}(x)$,都$\exists K\in Md_{C_1}(x)$,使得$K\subseteq K'$。又因为$\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\geqslant\inf_{y\in K'}\{u_A(y)\}$,$\sup_{y\in K}\{v_A(y)\}\leqslant\sup_{y\in K'}\{v_A(y)\}$,故$\sup_{K\in Md_{C_1}(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\}\geqslant\sup_{K\in Md_{C_2}(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\}$,$\inf_{K\in Md_{C_1}(x)}\{\sup_{y\in K}\{v_A(y)\}\}\leqslant\inf_{K'\in Md_{C_2}(x)}\{\sup_{y\in K'}\{v_A(y)\}\}$,即$u_{\underline{C_1}(A)}(x)\geqslant u_{\underline{C_2}(A)}(x)$,$v_{\underline{C_1}(A)}(x)\leqslant v_{\underline{C_2}(A)}(x)$。即$\underline{C_2}(A)\subseteq\underline{C_1}(A)$,由上、下近似的对偶性可知$\overline{C_1}(A)\subseteq\overline{C_2}(A)$。故$\underline{C_2}(A)\subseteq\underline{C_1}(A)\subseteq A\subseteq\overline{C_1}(A)\subseteq\overline{C_2}(A)$。

当上、下近似越贴近概念本身,可知近似空间对概念的刻画能力越强。性质2说明,随着覆盖越细,刻画能力越强。

2.2 该模型下的两种不确定性度量

2.2.1 基于模糊距离下的模糊粗糙度

定义10 设(U,C)为覆盖近似空间,$A\in IF(U)$,那么A关于覆盖近似空间的模糊粗糙度定义为

$$\rho_A^C=1-\frac{|\underline{C}(A)|}{|\overline{C}(A)|},$$

其中$|\underline{C}(A)|=\min\{\sum_{x\in U}|S_{\underline{C}(A)}(x)|,\sum_{x\in U}|S_{\overline{C}(A)}(x)|\}$,$|\overline{C}(A)|=\max\{\sum_{x\in U}|S_{\underline{C}(A)}(x)|,\sum_{x\in U}|S_{\overline{C}(A)}(x)|\}$,$S_A(x)=\mu_A(x)-v_A(x)$。

若$|\overline{C}(A)|=0$时,约定$\rho_A=0$。

可得以下性质:(1) 若$A\in IF(U)$,则$0\leqslant\rho_A^C\leqslant1$;(2) 若$A\subseteq B$,则$\rho_{(A\cup B)}^C=\rho_B^C$;(3) 若$A\subseteq B$,则$\rho_{(A\cap B)}^C=\rho_A^C$。

证明 显然可证。

模糊粗糙度在一定程度上可以用来衡量其不确定的程度,但在有些情况下它并不能精确地反映出,见例1。

例1 设(U,C)为覆盖近似空间,论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,覆盖$C_1=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\}\}$且

$$A_1=\{(0.7,0.1)/x_1,\ (0.6,0.2)/x_2,\ (0.7,0.1)/x_3,\ (0.7,0.2)/x_4\},$$
$$A_2=\{(0.6,0.2)/x_1,\ (0.45,0.2)/x_2,\ (0.5,0.3)/x_3,\ (0.6,0.3)/x_4\},$$

可得

$$\underline{C}(A_1)=\{(0.6,0.2)/x_1,\ (0.6,0.2)/x_2,\ (0.7,0.2)/x_3,\ (0.7,0.2)/x_4\},$$
$$\overline{C}(A_1)=\{(0.7,0.1)/x_1,\ (0.7,0.1)/x_2,\ (0.7,0.1)/x_3,\ (0.7,0.1)/x_4\},$$
$$\underline{C}(A_2)=\{(0.45,0.2)/x_1,\ (0.45,0.2)/x_2,\ (0.5,0.3)/x_3,\ (0.5,0.3)/x_4\},$$
$$\overline{C}(A_2)=\{(0.6,0.2)/x_1,\ (0.5,0.2)/x_2,\ (0.5,0.3)/x_3,\ (0.6,0.3)/x_4\},$$

则

$$\rho_{A_1}^{C}=1-\frac{|\underline{C}(A_1)|}{|\overline{C}(A_1)|}=1-\frac{1.8}{2.4}=\frac{1}{4},\quad \rho_{A_2}^{C}=1-\frac{|\underline{C}(A_2)|}{|\overline{C}(A_2)|}=1-\frac{0.9}{1.2}=\frac{1}{4}。$$

一般而言,直觉模糊集合中的隶属度被看作是客观事物接近标准的度量,非隶属度被看作偏离标准的度量。本文在模糊集中定义一个极值模糊集,并将模糊集的距离引入模糊粗糙度度量中可以解决上述问题。

定义 11[1]　设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$A_1,A_2\in IF(U)$,令

$$d^{\lambda}(A_1,A_2)=\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i\{|u_{A_1}(x)-u_{A_2}(x)|^{\lambda}+|v_{A_1}(x)-v_{A_2}(x)|^{\lambda}\}\right]^{\frac{1}{\lambda}},$$

其中 $0\leqslant w_i\leqslant 1(i=1,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

特别地,$w_i=\frac{1}{n}$, 若 $\lambda=1$,称 $d^1(A_1,A_2)$ 是标准的 Hamming 距离;若 $\lambda=2$,称 $d^2(A_1,A_2)$ 是基于标准的 Euclidean 距离(下文统一采用 $d^2(A_1,A_2)$)。

定义 12　设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A_1,\cdots,A_n\in IF(U)$, $\Lambda=\{A_1,\cdots,A_n\}$,记 $M_{\Lambda}(x_i)=\max\{u_{A_1}(x_i),u_{A_2}(x_i),\cdots,u_{A_n}(x_i)\}$,$I_{\Lambda}(x_i)=\min\{v_{A_1}(x_i),v_{A_2}(x_i),\cdots,v_{A_n}(x_i)\}$,称 $(M_{\Lambda}(x_i),I_{\Lambda}(x_i))$ 为极值直觉模糊集,记 $T_{\Lambda}(x_i)=(M_{\Lambda}(x_i),I_{\Lambda}(x_i))$,若 $d^2(A_1,T_{\Lambda})\geqslant d^2(A_2,T_{\Lambda})$,则称 A_2 优于 A_1。

定义 13　设 (U,C) 为覆盖近似空间,$A_1,\cdots,A_n\in IF(U)$,$\Lambda=\{A_1,\cdots,A_n\}$,那么 Λ 基于模糊距离下的模糊粗糙度可定义为

$$\rho_{A_i}^{\prime C}=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}d^2(A_i,T_{\Lambda})\right]\rho_{A_i}^{C}。$$

对例 1 来说,两个直觉模糊集 A_1 和 A_2 具有相同的模糊粗糙度,令 $\Lambda=\{A_1,A_2\}$,此时

$$T_{\Lambda}(x_i)=\{(0.7,0.1)/x_1,(0.6,0.2)/x_2,(0.7,0.1)/x_3,(0.7,0.2)/x_4\},$$

$$d^2(A_1,T_{\Lambda})=0\leqslant d^2(A_2,T_{\Lambda})=0.133\,5。$$

故直觉模糊集 A_1 优于 A_2,即 $\rho_{A_1}^{\prime C}=0.125<0.127=\rho_{A_2}^{\prime C}$。

以下是直觉模糊集 A 在不同粗细的覆盖下的模糊粗糙度。

定理 1　设 U 是非空有限论域,C_1,C_2 为 U 中的两个覆盖,且 $C_1\subseteq C_2$, $A\in IF(U)$,有 $\rho_A^{C_1}\leqslant\rho_A^{C_2}$。特别地,当 $C_1\subset C_2$ 时,$\rho_A^{C_1}<\rho_A^{C_2}$。

证明　由已知 C_1,C_2 是 U 的两个最简覆盖,若 $C_1\subseteq C_2$,有 $\underline{C_1}(A)\supseteq\underline{C_2}(A)$ 和 $\overline{C}_1(A)\subseteq\overline{C}_2(A)$。故 $\frac{|\underline{C_1}(A)|}{|\overline{C_1}(A)|}\geqslant\frac{|\underline{C_2}(A)|}{|\overline{C_2}(A)|}$,即 $\rho_A^{C_1}\leqslant\rho_A^{C_2}$。对于 $\rho_A^{C_1}<\rho_A^{C_2}(C_1\subset C_2)$,类似可证。

2.2.2　基于最简覆盖的粗糙直觉模糊集 A 的粗糙熵

例 2　设 (U,C) 为覆盖近似空间,论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,两个覆盖 C_1,C_2,其中 $C_1=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_3,x_4\}\}$,$C_2=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\}\}$,若 $A=\{(0.7,0.1)/x_1,(0.6,0.2)/x_2,(0.7,0.1)/x_3,(0.7,0.2)/x_4\}$,可求得

$$\underline{C_1}(A)=\{(0.6,0.2)/x_1,(0.6,0.2)/x_2,(0.7,0.2)/x_3,0.7,0.2)/x_4\},$$

$$\overline{C}_1(A)=\{(0.7,0.1)/x_1,(0.7,0.1)/x_2,(0.7,0.1)/x_3,(0.7,0.1)/x_4\},$$

$$\underline{C_2}(A)=\{(0.6,0.2)/x_1,(0.6,0.2)/x_2,(0.7,0.2)/x_3,(0.7,0.2)/x_4\},$$

$$\overline{C}_2(A)=\{(0.7,0.1)/x_1,(0.7,0.1)/x_2,(0.7,0.1)/x_3,(0.7,0.1)/x_4\},$$

则 $\rho_A^{C_1}=1-\frac{|\underline{C_1}(A)|}{|\overline{C_1}(A)|}=1-\frac{1.8}{2.4}=\frac{1}{4}$, $\rho_B^{C_2}=1-\frac{|\underline{C_2}(A)|}{|\overline{C_2}(A)|}=1-\frac{1.8}{2.4}=\frac{1}{4}$。

该模糊粗糙度没有反应出 C_2 比 C_1 细的这一特征,为了克服上述问题,有必要定义一个新的关于覆盖粗糙直觉模糊集的不确定性度量标准。

定义 14[13]　设 (U,C) 为覆盖近似空间,其中 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$,则知识的粗糙熵定义为

$$E(C)=\sum_{i=1}^{m}\frac{|C_i|}{m}\log_2^{|C_i|}。$$

粗糙性是通过知识的粒度大小来表示的,当颗粒越小,则不确定性就越小,即粗糙性就越小;信息熵是通

过信息源提供平均信息量的大小来表示的，当信息量越大，则不确定性也越大，即信息熵也就越大。

例2 中的覆盖 C_1 与 C_2 知识的粗糙熵分别为 $E(C_1)=\frac{3}{2}\log_2^3+\frac{2}{2}\log_2^1=\frac{3}{2}\log_2^3=2.38$，$E(C_2)=\frac{2}{3}\log_2^2+\frac{2}{3}\log_2^2+\frac{2}{3}\log_2^2=2$，显然 $E(C_1)>E(C_2)$。

定理2[13]　设 C_1,C_2 为 U 的两个覆盖，且 $C_1\subseteq C_2$ 时，则 $E(C_1)\leqslant E(C_2)$。特别地，当 $C_1\subset C_2$ 时，$E(C_1)<E(C_2)$。

这说明了知识的粗糙熵随着最简覆盖变细而单调减少，由于对象的不确定性和本身的模糊粗糙度有关，还和知识的粗糙熵大小有关。下面给出覆盖粗糙直觉模糊集的粗糙熵。

定义15　设 (U,C) 是覆盖近似空间，$A\in IF(U)$，则 A 在 (U,C) 中粗糙熵为

$$E_C(A)=\rho_A^{\sim C}E(C),$$

其中 $\rho_A^{\sim C}$ 为 A 在覆盖 C 下的模糊粗糙度，$E(C)$ 为覆盖 C 的粗糙熵。

根据定义15，对于例2，在覆盖 C_1 下 A 的粗糙熵为 $E_{C_1}(A)=\rho_A^{\sim C_1}E(C_1)=\frac{1}{4}\times 2.38=0.595$，在覆盖 C_2 下 A 的粗糙熵为 $E_{C_2}(A)=\rho_A^{\sim C_2}E(C_2)=\frac{1}{4}\times 2=0.5$，故 $E_{C_1}(A)>E_{C_2}(A)$。显然，粗糙熵比模糊粗糙度更能反映该模型下的不确定性度量。

定理3　设 (U,C) 是覆盖近似空间，C_1,C_2 为 U 的两个覆盖，$A\in IF(U)$，若 $C_1\subseteq C_2$，有 $E_{C_1}(A)\leqslant E_{C_2}(A)$。即随着覆盖越细，覆盖粗糙直觉模糊集粗糙熵越小。

2.3　两个覆盖生成相同的覆盖粗糙直觉模糊集的充要条件

推论1　设 (U,C) 是覆盖近似空间，$C_{(\mathrm{reduct})}$ 为 C 的约简，则 $\forall A\in IF(U)$ 在 (U,C) 和 $(U,C_{(\mathrm{reduct})})$ 中有相同的覆盖粗糙直觉模糊上、下近似。

证明　已知 $C_{(\mathrm{reduct})}=C$，即 $C_{(\mathrm{reduct})}\subseteq C$ 且 $C\subseteq C_{(\mathrm{reduct})}$。由于 $C\subseteq C_{(\mathrm{reduct})}$，由性质2可得 $\underline{C}(A)\supseteq\underline{C_{(\mathrm{reduct})}}(A)$。又 $C_{(\mathrm{reduct})}\subseteq C$，有 $\underline{C}(A)\subseteq\underline{C_{(\mathrm{reduct})}}(A)$。即 $\underline{C}(A)=\underline{C_{(\mathrm{reduct})}}(A)$。由对偶性可知 $\overline{C}(A)=\overline{C_{(\mathrm{reduct})}}(A)$。

推论2　设 C 是论域 U 的一个覆盖且 $K\in C$，若 K 是 C 的一个可约元当且仅当任意 $x\in U$，K 不在 x 的最小描述中。

证明　*必要性*。采用反证法。假设存在 $x\in U$，使得 K 为 x 的最小描述中。

由于 K 是 C 的一个可约元，则存在 K' 且 $K'\neq K$，有 $K=\cup K'$。即存在 $x\in K'$，有 $x\in K$，又 $K'\in K$，但 $K'\neq K$，故与假设矛盾。即 K 是 C 的一个可约元有任意 $x\in U$，K 不在 x 的最小描述中。

充分性。任意 $x\in U$，K 不在 x 的最小描述中，即存在 K'，使得 $K'\in K$，由于 x 的任意性，使得 $K=\cup K'$，故 K 是 C 的一个可约元。

定理4　设 C_1,C_2 是 U 上的两个覆盖，则 $\forall A\in IF(U)$ 在 (U,C_1) 和 (U,C_2) 中有相同的覆盖粗糙直觉模糊上、下近似当且仅当 $C_{1(\mathrm{reduct})}=C_{2(\mathrm{reduct})}$。

证明　*必要性*。采用反证法。假设 $C_{1(\mathrm{reduct})}\neq C_{2(\mathrm{reduct})}$。令 $K\notin C_{1(\mathrm{reduct})}$，$K\in C_{2(\mathrm{reduct})}$，当 $K\in C_{2(\mathrm{reduct})}$，即 K 中不存在可约元，存在 $x_0\in U$，使得有 K 在 x_0 的最小描述中，当 $x\in K$，取 $u_{\underline{A}}(x)=1$，$v_{\underline{A}}(x)=0$，当 $x\notin K$，取 $u_{\underline{A}}(x)=0$，$v_{\underline{A}}(x)=1$，有 $\underline{C_2}(A)=\{(1,0)/x_0\}$。当 $K\notin C_{1(\mathrm{reduct})}$ 可知，任意 $x\in U$，K 不在 x 的最小描述中。则 $\underline{C_1}(A)=\{(0,1)/x_0\}$，即在 (U,C_1) 和 (U,C_2) 中的覆盖粗糙直觉模糊下近似不相同，和已知条件矛盾，故 $C_{1(\mathrm{reduct})}=C_{2(\mathrm{reduct})}$。

充分性。由于 $C_{1(\mathrm{reduct})}=C_{2(\mathrm{reduct})}$，$\forall A\in IF(U)$，有

$$\underline{C_{1(\mathrm{reduct})}}(A)=\underline{C_{2(\mathrm{reduct})}}(A),\ \overline{C_{1(\mathrm{reduct})}}(A)=\overline{C_{2(\mathrm{reduct})}}(A)。$$

由定义5可知，

$$\underline{C_1}(A)=\underline{C_{1(\mathrm{reduct})}}(A),\ \overline{C_1}(A)=\overline{C_{1(\mathrm{reduct})}}(A),\ \underline{C_2}(A)=\underline{C_{2(\mathrm{reduct})}}(A),\ \overline{C_2}(A)=\overline{C_{2(\mathrm{reduct})}}(A)。$$

综上可知，$\forall A\in IF(U)$ 在 (U,C_1) 和 (U,C_2) 中也有相同的覆盖粗糙模糊上、下近似。

定理4 说明，$\forall A\in IF(U)$，当两个覆盖的约简相同时，对应的具有相同的知识分辨能力。故给不同覆盖

近似空间的知识分辨能力提供了理论依据。

3 结语

本文将粗糙集理论的粗糙熵和粗糙度的概念引入到覆盖的粗糙直觉模糊集的模型中,用来度量该模型下的不确定程度,并讨论相关性质,得到直觉模糊集的模糊粗糙度和粗糙熵随着该模型的覆盖变细而单调减少,从而加强了粗糙集和模糊集的联系。

参考文献:

[1] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Science, 1982, 11(5): 341-356.

[2] MI Jusheng, LEUNG Y, ZHAO Huiyin, et al. Generalized fuzzy rough sets determined by a triangular norm [J]. Information Sciences, 2008, 178(16): 3202-3213.

[3] JENSEN R, SHEN Q. Fuzzy-rough sets assisted attribute selection [J]. IEEE Trans,on Fuzzy Systems, 2007, 15(1): 73-89.

[4] ZHU William. Topological approaches to covering rough sets [J]. Information Science, 2007, 177(6): 1949-1508.

[5] ZHU William. Relation between generalized rough sets based on binary relation and covering [J]. Information Science, 2009, 179(3): 210-225.

[6] 王国胤, 张清华. 不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究 [J]. 计算机学报, 2008, 31(9): 1588-1598.
WANG Guoyin, ZHANG Qinghua. Uncertainty of rough sets in different knowledge granularities [J]. Chinese Journal of Computer, 2008, 31(9): 1588-1598.

[7] 胡军, 王国胤, 张清华. 一种覆盖粗糙集模型 [J]. 软件学报, 2010, 21(5): 968-977.
HU Jun, WANG Guoyin, ZHANG Qinghua. Covering based generalized rough fuzzy set model [J]. Journal of Software, 2010, 21(5): 968-977.

[8] 余美真, 李进金. 覆盖粗糙模糊集的不确定性度量 [J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(6): 145-148.
YU Meizhen, LI Jinjin. Uncertainty measure of rough-fuzzy sets based on covering [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2009, 23(6): 145-148.

[9] 王青海. 多粒度覆盖粗糙模糊集模型的不确定性研究 [J]. 小型微型计算机系统, 2012, 33(7): 1592-1595.
WANG Qinghai. Uncertainty of multiple granularity rough fuzzy set madel [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2012, 33(7): 1592-1595.

[10] 王艳平, 孙静, 陈美巍. 基于覆盖的区间直觉模糊粗糙集 [J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(2): 155-157.
WANG Yanping, SUN Jing, CHEN Meiwei. Interval-valued intuitionistics fuzzy rough sets based on coverings [J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(2): 155-157.

[11] ATANASSOV K. More on intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(1):37-46.

[12] ZHU William, WANG Feiyue. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets [J]. Information Science, 2003, 152: 217-230.

[13] 黄兵, 何新, 周献中. 基于广义粗集覆盖约简的粗糙熵 [J]. 软件学报, 2004, 15(2): 215-220.
HUANG Bing, HE Xin, ZHOU Xianzhong. Rough entropy based on generalized rough sets covering reduction [J]. Journal of Software, 2004, 15(2): 215-220.

(编辑: 陈丽萍)