中国科学: 数学 2014 年 第 44 卷 第 5 期: 519～534
link.springer.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

粗糙核抛物型奇异积分算子与外插

献给陆善镇教授 75 华诞

刘风, 伍火熊*

厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: liufeng860314@163.com, huoxwu@xmu.edu.cn

收稿日期: 2013-09-23; 接受日期: 2014-01-05; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11071200 和 11371295) 资助项目

摘要 本文研究粗糙核抛物型奇异积分算子及其极大算子. 借助精细的 Fourier 变换估计和 Littlewood-Paley 理论, 并结合外插讨论, 在积分核满足球面 Hardy 函数条件和相当弱的径向尺寸条件下, 本文建立这些算子的 L^p 有界性. 进一步, 关于沿一般光滑曲面的奇异积分算子及其极大算子的相应结果也被建立. 这些结果即使在迷向情形也是新的.

关键词 奇异积分 极大算子 混合齐性 粗糙核 外插
MSC (2010) 主题分类 42B20, 42B25, 42B30

1 引言

自 20 世纪 50 年代 Calderón 和 Zygmund [1] 的开创性工作问世以来, 关于粗糙核奇异积分算子的有界性研究一直受到调和分析学者的广泛关注. 经过近 60 年的发展, 已取得十分丰富的研究成果和重要研究进展. 尽管如此, 仍然有一些本质问题值得进一步探讨. 本文将在前人工作的基础上, 旨在对粗糙核抛物型奇异积分及相应的极大算子作进一步研究, 建立一些新的结果.

在叙述主要结果之前, 我们先回忆一些相关定义、记号和研究背景. 令 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 表示 n- 维 Euclid 空间, S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面, 并赋予相应的诱导 Lebesgue 测度 $d\sigma$. 设 $\alpha_j \geqslant 1\,(j=1,\dots,n)$ 是 n 个固定实数. 定义函数 $F:\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 如下:

$$F(x,\rho)=\sum_{j=1}^{n}x_j^2\rho^{-2\alpha_j},\quad x=(x_1,\dots,x_n).$$

显然, 对每个固定的 $x\in\mathbb{R}^n$, 函数 $F(x,\rho)$ 是关于 $\rho>0$ 的递减函数. 我们用 $\rho(x)$ 表示方程 $F(x,\rho)=1$ 的唯一解. Fabes 和 Riviére [2] 证明了 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是一个度量空间, 通常称为相关于 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ 的混合齐性空间. 进一步, 我们知道 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 关于伸缩变换族 $A_\lambda=\mathrm{diag}\{\lambda^{\alpha_1},\dots,\lambda^{\alpha_n}\}$ 满足齐性条件: $\rho(A_tx)=t\rho(x)$. 为方便起见, 对 $\phi:\mathbb{R}^+\to(0,\infty)$, 我们用 $A_\phi(y)$ 表示 $A_{\phi(\rho(y))}y'$, 其中 $y\in\mathbb{R}^n$, $y'=A_{\rho(y)^{-1}}y\in S^{n-1}$. 不难看出, 若 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=1$, 则有 $\rho(x)=|x|$. 记 $\gamma_\alpha=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\alpha_j$. 对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 容易验证

英文引用格式: Liu F, Wu H X. Parabolic singular integrals with rough kernels and extrapolation (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 519–534, doi: 10.1360/N012013-00147

$$\begin{cases} |x| > \rho(x)^{\gamma_\alpha}, & \text{当 } \rho(x) > 1, \\ |x| < \rho(x)^{\gamma_\alpha}, & \text{当 } \rho(x) < 1, \\ |x| = \rho(x), & \text{当 } \rho(x) = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

相关于空间 $(\mathbb{R}^n, \rho)$ 的变量替换公式为

$$\begin{aligned} &x_1 = \rho^{\alpha_1} \cos\theta_1 \cdots \cos\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}, \\ &x_2 = \rho^{\alpha_2} \cos\theta_1 \cdots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}, \\ &\vdots \\ &x_{n-1} = \rho^{\alpha_{n-1}} \cos\theta_1 \sin\theta_2, \\ &x_n = \rho^{\alpha_n} \sin\theta_1. \end{aligned}$$

因此, $dx = \rho^{\alpha-1} J(x') d\rho d\sigma(x')$, 其中 $\rho^{\alpha-1} J(x')$ 是上述变换的 Jacobian 行列式, $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, $J(x') = \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j')^2$. 显然, $J(x') \in C^\infty(S^{n-1})$, 且存在 $M > 0$ 满足

$$1 \leqslant J(x') \leqslant M, \quad \forall\, x' \in S^{n-1}.$$

设 $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ 且满足

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(y') J(y') d\sigma(y') = 0. \tag{1.2}$$

对于适当函数 $h : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$, 定义抛物型奇异积分算子 $T_{h,\Omega}$ 如下:

$$T_{h,\Omega}(f)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y') h(\rho(y))}{\rho(y)^\alpha} f(x-y) dy, \tag{1.3}$$

其中 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (Schwartz 函数类), $h(\cdot) \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma \geqslant 1$. 这里 $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$ $(\gamma \geqslant 1)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ 上且满足下列条件的可测函数 h 的全体:

$$\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)} := \sup_{R>0} \left(\frac{1}{R} \int_0^R |h(t)|^\gamma dt \right)^{1/\gamma} < \infty.$$

容易验证

$$L^\infty(\mathbb{R}^+) = \Delta_\infty(\mathbb{R}^+) \subsetneq \Delta_{\gamma_2}(\mathbb{R}^+) \subsetneq \Delta_{\gamma_1}(\mathbb{R}^+), \quad 1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \infty.$$

记形如 (1.3) 的奇异积分算子在 $h(t) \equiv 1$ 情形为 T_Ω. 众所周知, T_Ω 的研究源于对热方程和更一般的常系数抛物型微分方程的解的正则性和存在性的研究. 1966 年, Fabes 和 Riviére [2] 在 $\Omega \in C^1(S^{n-1})$ 的条件下证明了 T_Ω 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界性, $1 < p < \infty$. 随后, Nagel 等人[3] 减弱 Ω 的约束条件到 $\Omega \in L \log^+ L(S^{n-1})$ 的情形. 最近, Chen 等人[4] 进一步改进上述条件为 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$. 另一方面, 从文献 [5] 可知, 对某些 $p > 1$, T_Ω 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的. 假定 $\Omega \in \mathcal{F}_\beta(S^{n-1})$, $\beta > 1$, 其中

$$\mathcal{F}_\beta(S^{n-1}) := \left\{ \Omega \in L^1(S^{n-1}) : \sup_{\xi \in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\Omega(y')| \left(\log \frac{1}{|\xi \cdot y'|} \right)^\beta d\sigma(y') < \infty \right\}, \quad \forall\, \beta > 0.$$

应当指出, $\mathcal{F}_\beta(S^{n-1})$ 由 Grafakos 和 Stefanov [6] 引入并给出了下列关系:

$$\bigcap_{\beta>1} \mathcal{F}_\beta(S^{n-1}) \nsubseteq L \log^+ L(S^{n-1}) \subsetneq H^1(S^{n-1}) \nsubseteq \bigcup_{\beta>1} \mathcal{F}_\beta(S^{n-1}). \tag{1.4}$$

对于一般算子 $T_{h,\Omega}$, 在迷向情形: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, Fefferman [7] 首先在 $\Omega \in \mathrm{Lip}_\beta(S^{n-1})$ 和 $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ 的条件下证明了 $T_{h,\Omega}$ 的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界性, $1 < p < \infty$. 在 1986 年, Namazi [8] 改进了 Fefferman 的结果到情形 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$. 随后 Duoandikoetxea 和 Francia [9] 进一步推广 Namazi 在文献 [8] 的结果到情形 $h \in \Delta_2(\mathbb{R}^+)$. 应当指出, 沿多项式曲线的奇异积分算子的 L^p 有界性研究一直受到调和分析学者的广泛关注. 例如, Al-Salman 和 Pan [10] 考虑了情形 $\Omega \in L\log^+ L(S^{n-1})$ 和 $h \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma > 1$; Fan 和 Pan [11] 研究了情形 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 和 $h \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$; Sato [12] 考虑了情形 $\Omega \in L\log^+ L(S^{n-1})$ 和 $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$, 其中 $\mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$ 比 $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$ $(\gamma > 1)$ 更广泛. 这里 $\mathcal{N}_\delta(\mathbb{R}^+)$ $(\delta > 0)$ 表示满足下列条件的 $\mathbb{R}^+$ 上的可测函数 h 的全体函数集: $N_\delta(h) = \sum_{m=1}^\infty m^\delta 2^m d_m(h) < \infty$, 其中 $d_m(h) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k}|E(k,m)|$, $E(k,1) = \{t \in (2^k, 2^{k+1}] : |h(t)| \leqslant 2\}$,

$$E(k,m) = \{t \in (2^k, 2^{k+1}] : 2^{m-1} < |h(t)| \leqslant 2^m\}, \quad m \geqslant 2.$$

容易验证, 对于任意 $\delta > 0$ 和 $1 < \gamma < \infty$, 有 $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+) \subsetneq \mathcal{N}_\delta(\mathbb{R}^+)$. 对于一般情形 $\alpha_i \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$, Liu 和 Wu [13] 中证明了沿复合曲线的奇异积分算子 $T_{h,\Omega}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性, 其中 $|1/p - 1/2| < \min\{1/2, 1/\gamma'\} - 1/\beta$, $h \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma > 1$ 和 $\Omega \in \tilde{\mathcal{F}}_\beta(S^{n-1})$, $\beta > \max\{2, \gamma'\}$. 这里的函数类 $\tilde{\mathcal{F}}_\beta(S^{n-1})$ 首先由 Fan 和 Sato [14] 引入, 且容易验证 $\mathcal{F}_\beta(S^1) \subset \tilde{\mathcal{F}}_\beta(S^1)$. 另外, Sato [15] 证明了 $T_{h,\Omega}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的, $1 < p < \infty$, 如果 $\Omega \in L\log^+ L(S^{n-1})$ 和 $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$.

基于上述, 一个自然的问题是:

问题 1.1 在 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 和 $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$ 条件下, $T_{h,\Omega}$ 是否为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ 上的有界算子?

本文的主要目的旨在解决上述问题. 我们的主要结果如下:

定理 1.1 设 $T_{h,\Omega}$ 如 (1.3) 所定义. 假定 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 且满足 (1.2), $h \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma \in (1,2]$, 则

$$\|T_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

对一切 $1 < p < \infty$ 成立, 其中常数 $C_p > 0$ 与 Ω, h 和 γ 无关.

定理 1.2 设 $T_{h,\Omega}$ 如 (1.3) 所定义. 假定 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 且满足 (1.2), $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$, 则存在常数 $C_p > 0$ 使得

$$\|T_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(1 + N_1(h))\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

对一切 $1 < p < \infty$ 成立.

注 1.1 由于 $L\log^+ L(S^{n-1}) \subsetneq H^1(S^{n-1})$ 和 $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+) \subsetneq \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$, 同文献 [11,15] 的结果相比较, 我们的结果即使在经典的 Euclid 空间中也是新的. 此外, 我们指出定理 1.1 的建立是本质的, 也是本文的主要内容; 而定理 1.2 的证明则直接来自于定理 1.1 和由文献 [12] 发展的外插讨论.

此外, 我们也考虑相应的极大奇异积分算子 $T^*_{h,\Omega}$,

$$T^*_{h,\Omega}(f)(x) := \sup_{\epsilon>0}\left|\int_{\rho(y)>\epsilon}\frac{\Omega(y')h(\rho(y))}{\rho(y)^\alpha}f(x-y)dy\right|, \tag{1.5}$$

其中 h 和 Ω 如 (1.3). 则我们有下列结果.

定理 1.3 设 $T^*_{h,\Omega}$ 如 (1.5) 定义. 假定 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 且满足 (1.2), $h \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma \in (1,2]$, 则

$$\|T^*_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

对一切 $1 < p < \infty$ 成立, 其中常数 $C_p > 0$ 且与 Ω, h 和 γ 无关.

定理 1.4　设 $T^*_{h,\Omega}$ 如 (1.5) 所定义. 假定 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 且满足 (1.2), $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$, 则存在常数 $C_p > 0$ 使得

$$\|T^*_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(1 + N_1(h))\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

对一切 $1 < p < \infty$ 成立.

进一步, 我们能将上述结果推广到沿某些光滑曲面的奇异积分算子. 确切地说, 我们考虑下列沿曲面 $\{A_\varphi(y) : y \in \mathbb{R}^n\}$ 的抛物型奇异积分算子 $T_{h,\Omega,\varphi}$:

$$T_{h,\Omega,\varphi}(f)(x) := p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y')h(\rho(y))}{\rho_d(y)^\alpha} f(x - A_\varphi(y))dy \tag{1.6}$$

和相应的最大奇异积分算子 $T^*_{h,\Omega,\varphi}$:

$$T^*_{h,\Omega,\varphi}(f)(x) := \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{\rho(y)>\epsilon} \frac{\Omega(y')h(\rho(y))}{\rho_d(y)^\alpha} f(x - A_\varphi(y))dy \right|, \tag{1.7}$$

其中 h 和 Ω 如 (1.3), φ 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的一个适当函数. 在 1997 年, Fan 和 Pan [16] 建立了下列结果.

定理 A　设 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, $T_{h,\Omega,\varphi}$ 如 (1.6) 所定义. 假定 φ 满足下列条件:

$$|\varphi(t)| \leqslant C_1|t|^d, \quad |\varphi''(t)| \leqslant C_2|t|^{d-2}, \quad C_3|t|^{d-1} \leqslant |\varphi'(t)| \leqslant C_4|t|^{d-1},$$

其中 $d \neq 0$ 和 $t > 0$. 如果 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 且满足 (1.2), $h \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma > 1$, 那么对于 $|1/p - 1/2| < \min\{1/2, 1/\gamma'\}$, $T_{h,\Omega,\varphi}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的有界算子.

作为定理 1.2 和 1.4 的应用, 我们有下列更一般性的结果.

定理 1.5　设 $T_{h,\Omega,\varphi}$ 如 (1.6) 所定义. 假定 φ 是 $(0,\infty)$ 上非负或非正的单调函数且满足 $|\Phi(t)| \leqslant C$, 其中 $\Phi(t) := \frac{\varphi(t)}{t\varphi'(t)}$, C 是只与 φ 的有关的常数. 假定 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 且满足 (1.2), $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$, 则存在常数 $C_p = C_{p,\varphi} > 0$ 使得

$$\|T_{h,\Omega,\varphi}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(1 + N_1(h))\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

对一切 $1 < p < \infty$ 成立.

定理 1.6　设 $T^*_{h,\Omega,\varphi}$ 如 (1.7) 所定义, φ 如定理 1.5 所述. 假定 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$ 且满足 (1.2), $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$, 则存在常数 $C_p = C_{p,\varphi} > 0$ 使得

$$\|T^*_{h,\Omega,\varphi}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(1 + N_1(h))\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

对一切 $1 < p < \infty$ 成立.

注 1.2　显然, 若 φ 满足定理 A 的假定, 则有 $|\Phi(t)| = |\varphi(t)/(t\varphi'(t))| \leqslant C$. 进一步, 在 φ 满足定理 1.5 的假定下, 下列事实是明显的[17]:

(i) $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t)| = \infty$, 如果 φ 非负单增, 或非正递减;

(ii) $\lim_{t\to 0} |\varphi(t)| = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$, 如果 φ 非负递减, 或非正单增.

注 1.3　由注 1.2 及对任意 $\gamma > 1$ 有 $\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+) \subsetneq \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$ 可知, 即使在迷向情形: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, 定理 1.5 也是定理 A 的本质改进和推广. 同时应当指出 p 的范围在定理 1.5 中比在定理 A 中更广.

本文结构如下: 第 2 节介绍一些已有的记号和引理; 第 3 节证明定理 1.1–1.4; 而定理 1.5 和 1.6 的证明则在第 4 节给出. 我们指出本文所用的主要方法取自于文献 [4, 9, 15, 17].

为方便起见, 下文中我们记 p' 为 p 的共轭数, 即满足 $1/p+1/p'=1$. 令 ϖ 表示 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ 中不同数的个数, $\mathbf{1}=(1,0,\dots,0)\in S^{n-1}$. 用字母 C 或 c 表示独立于本质变量的正常数, 但在不同的位置其值可以不同表示.

2 辅助引理

首先我们回忆一下球面 S^{n-1} 上的 Hardy 空间的定义及其原子分解. Hardy 空间 $H^1(S^{n-1})$ 定义如下:

$$H^1(S^{n-1}):=\left\{\Omega\in L^1(S^{n-1}):\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}=\int_{S^{n-1}}\sup_{0\leqslant r<1}\left|\int_{S^{n-1}}\Omega(\theta)P_{rw}(\theta)d\sigma(\theta)\right|d\sigma(w)<\infty\right\},$$

其中 $P_{rw}(\theta)$ 表示 S^{n-1} 上的 Poisson 核, 其定义为

$$P_{rw}(\theta)=\frac{1-r^2}{|rw-\theta|^n},\quad 0\leqslant r<1,\quad \theta,w\in S^{n-1}.$$

下面我们给出原子的定义和 $H^1(S^{n-1})$ 函数的原子分解.

定义 2.1 称定义在 S^{n-1} 的函数 $a(\cdot)$ 为正则原子, 如果存在 $\theta\in S^{n-1}$ 和 $\varrho\in(0,1]$ 使得

$$\operatorname{supp}(a)\subset S^{n-1}\cap B(\theta,\varrho),\quad \text{其中 } B(\theta,\varrho)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-\theta|<\varrho\},\tag{2.1}$$

$$\|a\|_{L^2(S^{n-1})}\leqslant\varrho^{-(n-1)/2},\tag{2.2}$$

$$\int_{S^{n-1}}a(y)Y_m(y)d\sigma(y)=0\tag{2.3}$$

对任意次数不超过 N 的球面调和多项式 Y_m 成立, 其中 N 是任意固定整数.

由文献 [4,18,19] 知, 对于任意满足 (1.2) 的 $\Omega\in H^1(S^{n-1})$, 存在正则原子 Ω_j 满足 (1.2)、(2.1) 和 (2.2), 及 ω 满足 (1.2) 和 $\|\omega\|_{L^\infty(S^{n-1})}\leqslant 1$ 使得

$$\Omega=\sum_{j=1}^\infty\lambda_j\Omega_j+\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\omega,\tag{2.4}$$

其中 $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ 是负数且满足 $\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|\leqslant\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}$.

下面我们列出几个后面要用的已知结果.

引理 2.2 [16] 假定 $n\geqslant 3$, $b(\cdot)$ 满足 (2.1)、(2.2) 和

$$\int_{S^{n-1}}b(y')d\sigma(y')=0.\tag{2.5}$$

令

$$F_b(s)=(1-s^2)^{(n-3)/2}\chi_{(-1,1)}(s)\int_{S^{n-2}}b(s,(1-s^2)^{1/2}\tilde{y})d\sigma(\tilde{y}),$$
$$G_b(s)=(1-s^2)^{(n-3)/2}\chi_{(-1,1)}(s)\int_{S^{n-2}}|b(s,(1-s^2)^{1/2}\tilde{y})|d\sigma(\tilde{y}),$$

则存在与 $b(\cdot)$ 无关的常数 C 满足

$$\operatorname{supp}(F_b)\subset(\xi_1'-2\varrho(\xi'),\xi_1'+2\varrho(\xi')),\tag{2.6}$$

$$\operatorname{supp}(G_b) \subset (\xi_1' - 2\varrho(\xi'), \xi_1' + 2\varrho(\xi')), \tag{2.7}$$

$$\|F_b\|_\infty \leqslant C/\varrho(\xi'), \quad \|G_b\|_\infty \leqslant C/\varrho(\xi'), \tag{2.8}$$

$$\int_{\mathbb{R}} F_b(s)ds = 0, \tag{2.9}$$

其中 $\varrho(\xi') = |\xi|^{-1}|L_\varrho \xi|$, $L_\varrho \xi = (\varrho^2\xi_1, \varrho\xi_2, \dots, \varrho\xi_n)$.

引理 2.3 [16] 假定 $n = 2$, $b(\cdot)$ 满足 (2.1)、(2.2) 和 (2.5). 令

$$F_b(s) = (1-s^2)^{-1/2}\chi_{(-1,1)}(s)(b(s,(1-s^2)^{1/2}) + b(s,-(1-s^2)^{1/2})),$$
$$G_b(s) = (1-s^2)^{-1/2}\chi_{(-1,1)}(s)(|b(s,(1-s^2)^{1/2})| + |b(s,-(1-s^2)^{1/2})|),$$

则 F_b 满足 (2.6)、(2.9) 和

$$\|F_b\|_{L^q} \leqslant C|L_\varrho \xi'|^{-1+1/q};$$

G_b 满足 (2.7) 和

$$\|G_b\|_{L^q} \leqslant C|L_\varrho \xi'|^{-1+1/q}, \quad q \in (1,2).$$

引理 2.4 [20] 设 ϖ 如第 1 节所述, 则对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和 $0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$,

$$\left| \int_1^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_t x \cdot y} \frac{dt}{t} \right| \leqslant C|x \cdot y|^{-\epsilon/\varpi},$$

其中 C 与 x 和 y 无关.

3 定理 1.1–1.4 的证明

本节致力于定理 1.1–1.4 的证明. 首先我们给出一些记号, 并建立一些引理. 设 $\mathbf{1}$ 和 ϖ 如第 1 节所述. 对 $\beta \geqslant 2$, $k \in \mathbb{Z}$, 我们定义 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 $\{\sigma_k\}$ 和 $\{|\sigma_k|\}$ 如下:

$$\widehat{\sigma_k}(\xi) = \int_{\beta^k \leqslant \rho(y) < \beta^{k+1}} \frac{h(\rho(y))\Omega(y')}{\rho(y)^\alpha} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot y} dy, \tag{3.1}$$

$$\widehat{|\sigma_k|}(\xi) = \int_{\beta^k \leqslant \rho(y) < \beta^{k+1}} \frac{|h(\rho(y))\Omega(y')|}{\rho(y)^\alpha} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot y} dy. \tag{3.2}$$

明显地,

$$T_{h,\Omega}(f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k * f(x). \tag{3.3}$$

引理 3.1 设 $h \in \Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma \in (1,2]$, 而 Ω 是满足 (2.1)–(2.3) $(\theta = \mathbf{1})$ 的正则原子, 则对 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\sigma_k\| \leqslant C \log\beta \|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}, \tag{3.4}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\sigma_k}(\xi)| \leqslant C \log\beta \|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}, \tag{3.5}$$

$$|\widehat{\sigma_k}(\xi)| \leqslant C \log\beta \|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)} |A_{\beta^{k+1}} L_\varrho \xi|^{1/(2\varpi\gamma')}, \tag{3.6}$$

$$|\widehat{\sigma_k}(\xi)| \leqslant C\log\beta\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}|A_{\beta^k}L_\varrho\xi|^{-1/(2\varpi\gamma')}, \tag{3.7}$$

其中常数 C 与 ϱ, γ 和 β 无关.

证明 我们仅对 $n\geqslant 3$ 的情形给出证明, 关于 $n=2$ 情形的证明相对容易些, 其证明将省略. 对于 $\xi\neq 0$, 我们选取一个旋转变换 $\mathcal{O}$ 满足 $\mathcal{O}(A_\rho\xi)=|A_\rho\xi|\mathbf{1}$. 让 $\mathcal{O}^{-1}$ 表示 $\mathcal{O}$ 的逆变换, $\tilde{y'}=(s,y_2',\dots,y_n')$. 选取 $v\in\mathbb{Z}$ 满足 $2^v<\beta\leqslant 2^{v+1}$. 利用变量替换, (3.4) 可由下列不等式得到:

$$\begin{aligned}\|\sigma_k\| &\leqslant \int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\int_{S^{n-1}}|\Omega(y')J(y')|d\sigma(y')|h(\rho)|\frac{d\rho}{\rho}\\ &\leqslant C\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}\sum_{j=0}^{v}\int_{\beta^k2^j}^{\beta^k2^{j+1}}|h(\rho)|\frac{d\rho}{\rho}\\ &\leqslant C(v+1)\|h\|_{\Delta_1(\mathbb{R}^+)}\\ &\leqslant C\log\beta\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)},\end{aligned}$$

其中 $\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}\leqslant C$ (因为 Ω 是一个正则原子). 类似地, 我们容易证明 (3.5). 下面来证明 (3.6). 作变量替换得

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma_k}(\xi) &= \int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\int_{S^{n-1}}\Omega(y')\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}y'\cdot A_\rho\xi}J(y')d\sigma(y')h(\rho)\frac{d\rho}{\rho}\\ &\leqslant \int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\int_{S^{n-1}}\Omega(\mathcal{O}^{-1}(y'))\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}|A_\rho\xi|y'\cdot\mathbf{1}}J(\mathcal{O}^{-1}(y'))d\sigma(y')h(\rho)\frac{d\rho}{\rho}.\end{aligned}$$

令 $\Omega^J(y')=\Omega(\mathcal{O}^{-1}(y'))J(\mathcal{O}^{-1}(y'))/\|J\|_{L^\infty(S^{n-1})}$. 显然, Ω^J 满足 (2.2)、(2.5) 和 $\operatorname{supp}(\Omega^J)\subset B(\varsigma,\varrho)\cap S^{n-1}$, 其中 $\varsigma=A_\rho\xi/|A_\rho\xi|$. 又

$$\widehat{\sigma_k}(\xi)=\|J\|_{L^\infty(S^{n-1})}\int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\int_{\mathbb{R}}F_{\Omega^J}(s)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}|A_\rho\xi|s}dsh(\rho)\frac{d\rho}{\rho},$$

其中 F_{Ω^J} 如引理 2.2 中所定义. 再次利用变量替换可得

$$\widehat{\sigma_k}(\xi)=\|J\|_{L^\infty(S^{n-1})}\int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\int_{\mathbb{R}}N(s)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}|A_\rho L_\varrho\xi|s}dsh(\rho)\frac{d\rho}{\rho},$$

其中 $N(s)=\varrho(\varsigma)F_{\Omega^J}(\varrho(\varsigma)s)$, $\varrho(\varsigma)=|A_\rho L_\varrho\xi|/|A_\rho\xi|$. 由引理 2.2 知, $N(\cdot)$ 是一个紧支撑函数, 其支撑区间为 $(-2+\varsigma_1/\varrho(\varsigma),2+\varsigma_1/\varrho(\varsigma))$, 且 $|N|\leqslant C$ 和 $\int_{\mathbb{R}}N(s)ds=0$, 其中 $\varsigma_1=\rho^{\alpha_1}\xi_1/|A_\rho\xi|$, C 与 s 和 ϱ 无关. 因此, 由 $N(\cdot)$ 的消失性可得

$$\begin{aligned}|\widehat{\sigma_k}(\xi)| &\leqslant \|J\|_{L^\infty(S^{n-1})}\int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\left|\int_{\mathbb{R}}N(s)(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}|A_\rho L_\varrho\xi|s}-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}|A_\rho L_\varrho\xi|\varsigma_1/\varrho(\varsigma)})ds\right||h(\rho)|\frac{d\rho}{\rho}\\ &\leqslant C\int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\int_{|s-\frac{\varsigma_1}{\varrho(\varsigma)}|\leqslant 2}|N(s)||A_\rho L_\varrho\xi|\left|s-\frac{\varsigma_1}{\varrho(\varsigma)}\right|ds|h(\rho)|\frac{d\rho}{\rho}\\ &\leqslant C|A_{\beta^{k+1}}L_\varrho\xi|\int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}|h(\rho)|\frac{d\rho}{\rho}\\ &\leqslant C\log\beta\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}|A_{\beta^{k+1}}L_\varrho\xi|.\end{aligned}$$

由此结合 (3.5) 便得 (3.6). 另一方面, 由变量替换和 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\sigma_k}(\xi)| &\leqslant \int_{\beta^k}^{\beta^{k+1}}\left|\int_{S^{n-1}}\Omega(y')\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}y'\cdot A_\rho\xi}J(y')d\sigma(y')\right||h(\rho)|\frac{d\rho}{\rho}\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{v}\int_{\beta^k2^j}^{\beta^k2^{j+1}}\left|\int_{S^{n-1}}\Omega(y')\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}y'\cdot A_\rho\xi}J(y')d\sigma(y')\right||h(\rho)|\frac{d\rho}{\rho}\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{v}\left(\int_{\beta^k2^j}^{\beta^k2^{j+1}}\left|\int_{S^{n-1}}\Omega(y')\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}y'\cdot A_\rho\xi}J(y')d\sigma(y')\right|^{\gamma'}\frac{d\rho}{\rho}\right)^{1/\gamma'}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\\
&\leqslant \|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}^{(\gamma'-2)/\gamma'}\sum_{j=0}^{v}(H_{j,k}(\xi))^{1/2},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

其中

$$
H_{j,k}(\xi)=\int_{\beta^k2^j}^{\beta^k2^{j+1}}\left|\int_{S^{n-1}}\Omega(y')\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}y'\cdot A_\rho\xi}J(y')d\sigma(y')\right|^2\frac{d\rho}{\rho}.
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
H_{j,k}(\xi) &= \int_{\beta^k2^j}^{\beta^k2^{j+1}}\iint_{S^{n-1}\times S^{n-1}}\Omega(y')\overline{\Omega(x')}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(y'-x')\cdot A_\rho\xi}J(y')d\sigma(y')d\sigma(x')\frac{d\rho}{\rho}\\
&\leqslant \iint_{S^{n-1}\times S^{n-1}}|\Omega(y')\overline{\Omega(x')}|\left|\int_{\beta^k2^j}^{\beta^k2^{j+1}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(y'-x')\cdot A_\rho\xi}\frac{d\rho}{\rho}\right|J(y')J(x')d\sigma(y')d\sigma(x').
\end{aligned}
$$

利用引理 2.4, 我们有

$$
\left|\int_{\beta^k2^j}^{\beta^k2^{j+1}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(y'-x')\cdot A_\rho\xi}\frac{d\rho}{\rho}\right|=\left|\int_1^2\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(y'-x')\cdot A_{\beta^k2^j\rho}\xi}\frac{d\rho}{\rho}\right|\leqslant C|(y'-x')\cdot A_{\beta^k2^j}\xi|^{-1/(2\varpi)}.
$$

因此,

$$
H_{j,k}(\xi)\leqslant C\iint_{S^{n-1}\times S^{n-1}}|\Omega(y')\overline{\Omega(x')}||(y'-x')\cdot A_{\beta^k2^j}\xi|^{-1/(2m)}J(y')J(x')d\sigma(y')d\sigma(x').
$$

同文献 [4, (3.10)] 的证明一样, 我们可得

$$
H_{j,k}(\xi)\leqslant C|A_{\beta^k2^j}L_\varrho\xi|^{-1/(2\varpi)},
\tag{3.9}
$$

其中 C 与 k, j, β 和 ϱ 无关. 从 (3.8) 和 (3.9) 可知,

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\sigma_k}(\xi)| &\leqslant C\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\sum_{j=0}^{v}|A_{\beta^k2^j}L_\varrho\xi|^{-1/(4\varpi)}\\
&\leqslant C(v+1)\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}|A_{\beta^k}L_\varrho\xi|^{-1/(4\varpi)}\\
&\leqslant C\log\beta\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}|A_{\beta^k}L_\varrho\xi|^{-1/(4\varpi)}.
\end{aligned}
$$

由此, 并利用 (3.5) 和 $\gamma\in(1,2]$ 容易导出 (3.7). 引理 3.1 得证. □

引理 3.2 设 h,Ω 和 γ 如引理 3.1 所述, $\beta=2^{\gamma'}$. 定义极大算子 σ_* 如下:

$$
\sigma_*(f)(x)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}||\sigma_k|*f(x)|,
$$

则有

$$\|\sigma_*(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty,$$

其中 $C>0$ 与 γ 无关.

证明 选取非负函数 $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n:\ \rho(x) \leqslant 1\}, \quad \hat{\psi}(0)=1.$$

对 $k\in\mathbb{Z}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, 记 $\psi_k=\beta^{-k\alpha}\psi(A_{\beta^{-k}}x)$, 且定义 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 $\{\mu_k\}$ 如下:

$$\widehat{\mu_k}(\xi)=\widehat{|\sigma_k|}(\xi)-\widehat{\psi}(A_{\beta^k}L_\varrho\xi)\widehat{|\sigma_k|}(0). \tag{3.10}$$

由 (3.10) 和引理 3.1 可得

$$|\widehat{\mu_k}(\xi)| \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}(\min\{1,|A_{\beta^{k+1}}L_\varrho\xi|,|A_{\beta^k}L_\varrho\xi|^{-1}\})^{1/(2m\gamma')}. \tag{3.11}$$

令 $\widehat{\Psi_k}(\xi)=\widehat{\psi}(A_{\beta^k}L_\varrho\xi)\widehat{|\sigma_k|}(0)$. 再次利用 (3.10) 可知,

$$\sigma_*(f) \leqslant G(f)+\Psi_*(|f|), \tag{3.12}$$

$$\mu_*(f) \leqslant \sigma_*(f)+\Psi_*(|f|), \tag{3.13}$$

其中 $\mu_*(f)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}||\mu_k|*f|$, $\Psi_*(f)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}||\Psi_k|*f|$, $G(f)=(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mu_k*f|^2)^{1/2}$. 由 Hardy-Littlewood 极大函数的 L^p 有界性, 我们有

$$\Big\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\psi_k*f|\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.14}$$

其中 $C>0$ 与 γ 无关. 另一方面, 我们容易验证

$$||\Psi_k|*f(x)| \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\psi_k*|f_\varrho|(L_{1/\varrho}x), \tag{3.15}$$

其中函数 f_ϱ 定义为 $f_\varrho(x)=f(L_\varrho x)$. 利用 (3.14) 和 (3.15) 有

$$\|\Psi_*(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty. \tag{3.16}$$

注意到 (3.12) 和 (3.16), 我们只需证明

$$\|G(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.17}$$

其中 C 与 γ 无关. 运用熟知的 Rademacher 函数性质, (3.17) 可由下式导出:

$$\|\tau_\epsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.18}$$

其中 $\tau_\epsilon(f)(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\epsilon_k\mu_k*f(\xi)$, $\epsilon=\{\epsilon_k\}$, $\epsilon_k=1$ 或 -1 (关于 ϵ 一致成立), C 与 γ 无关. 令 $\{\Phi_k\}$ 是 $\mathcal{C}_0^\infty((0,\infty))$ 负函数列, 且满足

$$\operatorname{supp}(\Phi_k) \subset [\beta^{-k-1},\beta^{-k+1}], \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Phi_k(t)^2=1, \quad \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^j\Phi_k(t)\right| \leqslant \frac{C_j}{t^j}, \quad j=1,2,\dots,$$

其中 C_j 与 β 无关. 定义乘子算子 S_k 和 Υ_k 如下:

$$\widehat{S_k}(f)(\xi)=\Phi_k(\rho(L_\varrho\xi))\hat{f}(\xi),\quad \widehat{\Upsilon_k}(f)(\xi)=\Phi_k(\rho(\xi))\hat{f}(\xi).$$

利用 Littlewood-Paley 不等式, 对任意函数 $\{g_k\}\in L^p(\ell^2,\mathbb{R}^n)$ 和 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 存在与 β 和 ϱ 无关的常数 $C_p>0$ 满足

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Upsilon_k(g_k)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_k|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\quad 1<p<\infty,\tag{3.19}$$

$$\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\Upsilon_k(f)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\quad 1<p<\infty.\tag{3.20}$$

容易验证

$$S_k(f)(\xi)=\Upsilon_k(f_\varrho)(L_{1/\varrho}\xi),\tag{3.21}$$

其中 f_ϱ 如 (3.15) 所述. 由 (3.19)–(3.21) 可得

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}S_k(g_k)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_k|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\quad 1<p<\infty,\tag{3.22}$$

$$\Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|S_k(f)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\quad 1<p<\infty,\tag{3.23}$$

其中 $\{g_k\}$ 是任意的且满足 $\{g_k\}\in L^p(\ell^2,\mathbb{R}^n)$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $C_p>0$ 与 β 和 ϱ 无关. 由 S_k 定义, 我们可写

$$\tau_\epsilon(f)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\epsilon_k S_{j+k}(\mu_k*S_{j+k}(f)):=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\tau_j(f).\tag{3.24}$$

故由 Plancherel 定理、(1.1) 和 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}\|\tau_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2&\leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\beta^{-k-j-1}\leqslant\rho(L_\varrho\xi)\leqslant\beta^{-k-j+1}}|\hat{f}(\xi)|^2|\widehat{\mu_k}|^2d\xi\\&\leqslant C((\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}B_j)^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,\end{aligned}$$

其中

$$B_j=2^{(2-j)\lambda_\alpha/(2\varpi)}\chi_{\{j\geqslant3\}}(j)+\chi_{\{-2<j<3\}}(j)+2^{(j+1)\lambda_\alpha/(2\varpi)}\chi_{\{j\leqslant-2\}}(j).\tag{3.25}$$

因而有

$$\|\tau_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}2^{-\delta|j|}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\tag{3.26}$$

其中 C 和 δ 与 γ 和 ϱ 无关. 再结合 (3.24) 可推得

$$\|\tau_\epsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

于是有

$$\|G(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

进而综合 (3.12)、(3.13) 和 (3.16) 导出

$$\|\mu_*(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

由此, 利用 (3.11) 和文献 [9, 第 544 页] 的证明可知,

$$\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\mu_k * g_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.27}$$

对任意函数 $\{g_k\}\in L^p(\ell^2,\mathbb{R}^n)$ 和 $|1/2-1/p|=1/4$ 成立. 又由 (3.22) 和 (3.23) 有

$$\|\tau_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|=\frac{1}{4}. \tag{3.28}$$

借助于 (3.24) 及在 (3.26) 与 (3.28) 之间插值可得

$$\|\tau_\epsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant (\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p\in\left(\frac{4}{3},4\right).$$

因而,

$$\|G(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant (\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p\in\left(\frac{4}{3},4\right).$$

基于上述讨论, 利用 (3.11)–(3.13)、(3.16)、(3.22)、(3.23) 和 (3.26) 及文献 [9, 第 544 页] 证明和插值定理, 我们有

$$\|G(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant (\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p\in\left(\frac{8}{7},8\right).$$

重复上述讨论, 我们能获得 (3.17). 引理 3.2 得证. □

利用引理 3.2 和类似于文献 [9, 第 544 页] 的证明, 我们能获得下面的引理.

引理 3.3 设 h, Ω 和 γ 如引理 3.1 所述, $\beta=2^{\gamma'}$, 则

$$\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_k * g_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

对 $1<p<\infty$ 和任意函数 $\{g_k\}\in L^p(\ell^2,\mathbb{R}^n)$ 成立, 其中常数 $C>0$ 与 γ 无关.

现在我们来证明定理 1.1–1.4.

定理 1.1 的证明 设 $\Omega\in H^1(S^{n-1})$ 满足 (1.2), $h\in\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma\in(1,2]$. 由 (2.4), 存在正则原子 Ω_j 满足 (1.2)、(2.1) 和 (2.2), 而 ω 满足 (1.2) 及 $\|\omega\|_{L^\infty(S^{n-1})}\leqslant 1$ 使得

$$\Omega=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\Omega_j+\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\omega,$$

其中 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是负数且满足 $\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\leqslant\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}$. 利用文献 [12, 命题 2.4] 和事实 $L^\infty(S^{n-1})\subset L\log^+L(S^{n-1})$, 我们有

$$\|T_{h,\omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty.$$

因此, 为证明定理 1.1, 只需证明当 Ω 是满足 (2.1)–(2.3) 的正则原子时, 有

$$\|T_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.29}$$

其中常数 C 与 γ 无关. 下面设 Ω 是一个满足 (2.1)–(2.3) 的正则原子. 不失一般性, 可假定 $\theta=\mathbf{1}$ 为 Ω 的支集中心. 设乘子算子 S_k 如引理 3.2 证明所述, $\beta=2^{\gamma'}$. 由 (3.1) 和 S_k 的定义, 我们可写

$$T_{h,\Omega}(f)(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}S_{j+k}(\sigma_k*S_{j+k}f)(\xi):=\sum_{j\in\mathbb{Z}}T_j(f)(\xi). \tag{3.30}$$

类似于 (3.26) 的证明可得

$$\|T_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}2^{-\delta|j|}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.31}$$

其中 C 和 δ 如 (3.22) 一样. 另一方面, 由 (3.22) 和 (3.23) 及引理 3.3, 我们有

$$\|T_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty. \tag{3.32}$$

利用 (3.30), 及在 (3.31) 与 (3.32) 插值可得 (3.29). 定理 1.1 证毕. □

定理 1.3 的证明 由 (2.4) 和类似于文献 [12, 定理 3] 的证明, 我们只需证明当 Ω 为满足 (2.1)–(2.3) 的正则原子时, 有

$$\|T^*_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.33}$$

其中常数 C 与 γ 无关. 我们将运用 Fan 等人[21] 的方法作证. 设 Ω 是满足 (2.1)–(2.3) 的正则原子. 不失一般性, 可假定 $\theta=\mathbf{1}$. 对任意 $\epsilon>0$, 存在整数 k 满足 $\beta^{k-1}\leqslant\epsilon<\beta^k$, 则

$$T^*_{h,\Omega}(f)(\xi)\leqslant\sigma_*(|f|)(\xi)+\sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigg|\sum_{j=k}^{\infty}\sigma_k*f(\xi)\bigg|. \tag{3.34}$$

利用引理 3.2, 只需证明

$$\bigg\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigg|\sum_{j=k}^{\infty}\sigma_k*f(\xi)\bigg|\bigg\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.35}$$

其中 C_p 与 γ 无关. 令 $\Gamma\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 其支集为 $\{x\in\mathbb{R}^n:\ \rho(x)\leqslant1\}$, 且 $\Gamma(x)=1$, 当 $\rho(x)<1/2$. 定义 Θ_k 为 $\widehat{\Theta_k}(\xi)=\Gamma(A_{\beta^k}L_\varrho\xi)$, 及 Γ_k 为 $\Gamma_k(\xi)=\beta^{-k\alpha}\Gamma(A_{\beta^{-k}}\xi)$, 则我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{\infty}\sigma_k*f(\xi)&=(\delta-\Theta_k)*\sum_{j=k}^{\infty}\sigma_k*f(\xi)+\Theta_k*T_{h,\Omega}(f)(\xi)-\Theta_k*\sum_{j=-\infty}^{k-1}\sigma_k*f(\xi)\\&=:I_{k,1}(f)(\xi)+I_{k,2}(f)(\xi)+I_{k,3}(f)(\xi),\end{aligned}$$

其中 δ 是 Dirac 函数. 因此,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigg|\sum_{j=k}^{\infty}\sigma_k*f(\xi)\bigg|\leqslant\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,1}(f)(\xi)|+\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,2}(f)(\xi)|+\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,3}(f)(\xi)|. \tag{3.36}$$

容易验证

$$\Theta_k*f(x)=\Gamma_k*f_\varrho(L_{1/\varrho}x),$$

其中 f_ϱ 如 (3.15) 所定义. 类似于 (3.13) 的证明可推得

$$\Big\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\Theta_k * f|\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.37}$$

其中常数 $C_p>0$ 与 β 和 ϱ 无关. 又由 (3.29) 和 (3.37), 我们有

$$\Big\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,2}(f)|\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|T_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty. \tag{3.38}$$

下面我们来估计 $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,1}(f)|$. 记

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,1}(f)(\xi)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|(\delta-\Theta_k)*\sigma_{j+k}*f(\xi)| =: \sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_j(f)(\xi). \tag{3.39}$$

由引理 3.2 和 Hardy-Littlewood 极大函数的性质可知,

$$\|\Lambda_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p\|\sigma_*(|f|)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty. \tag{3.40}$$

另一方面, 利用 Plancherel 定理、(1.1)、引理 3.1 和 Θ_k 的选取, 容易推出

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leqslant \|(|(\delta-\Theta_k)*\sigma_{j+k}*f|^2)^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\beta^k\rho(L_\varrho\xi)\geqslant 1/2}|\widehat{\sigma_{j+k}}(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=-\infty}^{k}\int_{\beta^{-i}/2\leqslant\rho(L_\varrho\xi)<\beta^{-i+1}/2}|\widehat{\sigma_{j+k}}(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi \\
&\leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=-\infty}^{k}((\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}2^{(i-k-j)\lambda_\alpha/(2m)})^2\int_{\beta^{-i}/2\leqslant\rho(L_\varrho\xi)<\beta^{-i+1}/2}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi \\
&\leqslant C((\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)})^2 2^{-j\lambda_\alpha/\varpi}\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i\lambda_\alpha/\varpi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\leqslant C((\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)})^2 2^{-j\lambda_\alpha/\varpi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

故有

$$\|\Lambda_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}2^{-j\lambda_\alpha/(2\varpi)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.41}$$

再由 (3.39) 和在 (3.40) 与 (3.41) 之间插值可得

$$\Big\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,1}(f)|\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.42}$$

其中常数 C 与 γ 无关. 最后, 我们来估计 $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,3}(f)|$,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,3}(f)(\xi)| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigg|\sum_{j=1}^{\infty}\Theta_k*\sigma_{k-j}*f(\xi)\bigg| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\Theta_k*\sigma_{k-j}*f(\xi)| =: \sum_{j=1}^{\infty}H_j(f)(\xi). \tag{3.43}$$

由引理 3.2 有

$$\|H_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1<p<\infty. \tag{3.44}$$

又由 Plancherel 定理得

$$\begin{aligned}\|H_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leqslant \left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\Theta_k*\sigma_{k-j}*f|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\beta^k\rho(L_\varrho\xi)\leqslant 1}|\widehat{\sigma_{k-j}}(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\\&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\sigma_{k-j}}(\xi)|^2\chi_{\{\beta^k\rho(L_\varrho\xi)\leqslant 1\}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&\leqslant C((\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)})^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_{\beta^{k-j+1}}L_\varrho\xi|^{1/(2m\gamma')}\chi_{\{\beta^k\rho(L_\varrho\xi)\leqslant 1\}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&\leqslant C((\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)})^2 2^{-2j\eta}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,\end{aligned}$$

其中上述最后不等式由缺项序列的性质得到, 而 η 与 γ 无关. 于是,

$$\|H_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}2^{-j\eta}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.45}$$

插值 (3.44) 和 (3.45), 并结合 (3.43) 得到

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|I_{k,3}(f)|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.46}$$

从而由 (3.36)、(3.38)、(3.42) 和 (3.46) 可推出 (3.5). 定理 1.3 得证. □

定理 1.2 和 1.4 的证明 两个定理的证明是类似的, 下面我们将采用文献 [12] 中的外插方法给出定理 1.2 的证明. 设 $d_m(h)$ 如第 1 节所述, 令 $E_1=\{t\in\mathbb{R}^+:\ 0<|h(t)|\leqslant 2\}$ 和 $E_m=\{t\in\mathbb{R}^+: 2^{m-1}<|h(t)|\leqslant 2^m\}$ $(m\geqslant 2)$. 由文献 [12] 可知,

$$\|h\chi_{E_m}\|_{\Delta_{1+1/m}(\mathbb{R}^+)} \leqslant 2^m d_m^{m/(m+1)}(h), \tag{3.47}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m2^m d_m^{m/(m+1)}(h) \leqslant C(1+N_1(h)). \tag{3.48}$$

由此, 应用 Minkowski 不等式和定理 1.1 得

$$\begin{aligned}\|T_{h,\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\|T_{h\chi_{E_m},\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\&\leqslant C\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\sum_{m=1}^{\infty}m2^m d_m^{m/(m+1)}(h)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\&\leqslant C(1+N_1(h))\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

$1<p<\infty$. 定理 1.2 得证. □

4 定理 1.5 和 1.6 的证明

本节我们将证明定理 1.5 和 1.6. 定理的证明需要用到如下重要引理.

引理 4.1 [17] 设 Φ 和 φ 如定理 1.5 所述. 若 $h\in\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\gamma>1$, 则

$$\|h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1})\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)} \leqslant C\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)},$$

其中 C 是仅与 φ 有关的常数.

引理 4.2 设 Φ 和 φ 如定理 1.5 所述, 则

(i) 当 φ 是非负单增函数时, $T_{h,\Omega,\varphi}(f)=T_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\Omega}(f)$;

(ii) 当 φ 是非负递减函数时, $T_{h,\Omega,\varphi}(f)=-T_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\Omega}(f)$;

(iii) 当 φ 是非正递减函数时, $T_{h,\Omega,\varphi}(f)=T_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\tilde{\Omega}}(f)$;

(iv) 当 φ 是非正单增函数时, $T_{h,\Omega,\varphi}(f)=-T_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\tilde{\Omega}}(f)$;

(v) 当 φ 是非负单增函数时, $T^*_{h,\Omega,\varphi}(f)=T^*_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\Omega}(f)$;

(vi) 当 φ 是非负递减函数时, $T^*_{h,\Omega,\varphi}(f)=-T^*_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\Omega}(f)$;

(vii) 当 φ 是非正递减函数时, $T^*_{h,\Omega,\varphi}(f)=T^*_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\tilde{\Omega}}(f)$;

(viii) 当 φ 是非正单增函数时, $T^*_{h,\Omega,\varphi}(f)=-T^*_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\tilde{\Omega}}(f)$,

其中 $\tilde{\Omega}(y)=\Omega(-y)$.

证明 注意到注 1.2, 类似于文献 [17, 引理 2.3] 中的讨论, 我们容易建立引理 4.2. 这里我们省略其证明细节. □

下面我们来证明定理 1.5 和 1.6.

定理 1.5 和 1.6 的证明 由定理 1.1 和 1.3 可知,

$$\|T_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1})\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|T^*_{h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1}),\Omega}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h(\varphi^{-1})\Phi(\varphi^{-1})\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中 C_p 是与 γ 无关的常数. 应用引理 4.1 和 4.2 可得

$$\|T_{h,\Omega,\varphi}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|T^*_{h,\Omega,\varphi}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_p(\gamma-1)^{-1}\|h\|_{\Delta_\gamma(\mathbb{R}^+)}\|\Omega\|_{H^1(S^{n-1})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

由此, 结合如定理 1.2 证明中的外插讨论便得. □

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Calderón A P, Zygmund A. On singular integral. Amer J Math, 1956, 78: 289–309
2 Fabes E, Reviére N. Singular integrals with mixed homogeneity. Studia Math, 1966, 27: 19–38
3 Nagel A, Riviére N, Wainger S. On Hilbert transforms along curve (II). Amer J Math, 1976, 98: 395–403
4 Chen Y, Ding Y, Fan D. A parabolic singular integral operator with rough kernel. J Aust Math Soc, 2008, 84: 163–179
5 Chen Y, Wang F, Yu W. L^p bounds for the parabolic singular integral operator. J Inequal Appl, 2012, 121: 1–9
6 Grafakos L, Stefanov A. L^p bounds for singular integrals and maximal singular integrals with rough kernels. Indiana Univ Math J, 1998, 47: 455–469
7 Fefferman R. A note on singular integrals. Proc Amer Math Soc, 1979, 74: 266–270
8 Namazi J. A singular integral. Proc Amer Math Soc, 1986, 96: 201–219
9 Duoandikoetxea J, Rubio de Francia J L. Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates. Invent Math, 1986, 84: 541–561
10 Al-Salman A, Pan Y. Singular integrals with rough kernels in $L\log^+L(S^{n-1})$. J Lond Math Soc (2), 2002, 66: 153–174
11 Fan D, Pan Y. Singular integral operators with rough kernels supported by subvarieties. Amer J Math, 1997, 119: 799–839
12 Sato S. Estimates for singular integrals and extrapolation. Studia Math, 2009, 192: 219–233
13 Liu F, Wu H. Rough singular integrals and maximal operators with mixed homogeneity along compound curves. Math Nachr, in press, 2014

14 Fan D, Sato S. A note on the singular integrals associated with a variable surface of revolution. Math Inequal Appl, 2009, 12: 441–454
15 Sato S. Estimates for singular integrals along surfaces of revolution. J Aust Math Soc, 2009, 86: 413–430
16 Fan D, Pan Y. A singular integral operators with rough kernel. Proc Amer Math Soc, 1997, 125: 3695–3703
17 Ding Y, Xue Q, Yabuta K. On singular integral operators with rough kernel along surface. Integral Equations Operator Theory, 2010, 68: 151–161
18 Colzani L. Hardy spaces on spheres. PhD thesis. St Louis: Washington University in St Louis, 1982
19 Ricci F, Weiss G. A characterization of $H^1(\sum_{n-1})$. Proc Sympos Pure Math, 1979, 35: 289–294
20 Ding Y, Xue Q, Yabuta K. Parabolic Littlewood-Paley g-function with rough kernels. Acta Math Sin Engl Ser, 2008, 24: 2049–2060
21 Fan D, Guo K, Pan Y. A note of a rough singular integral operator. Math Inequal Appl, 1999, 1: 73–81

Parabolic singular integrals with rough kernels and extrapolation

LIU Feng & WU HuoXiong

Abstract This paper is devoted to studying the parabolic singular integrals with rough kernels both on the unit sphere and in the radial direction, as well as the corresponding maximal singular integrals. By the estimates of Fourier transforms, the Littlewood-Paley theory and the extrapolation arguments, under the rather weak size conditions, which are the best known ones so far, the L^p bounds for such operators are established. As applications, the corresponding results for the corresponding operators associated to certain smooth surfaces are also obtained.

Keywords singular integrals, maximal singular integrals, mixed homogeneity, rough kernels, extrapolation

MSC(2010) 42B20, 42B25, 42B30

doi: 10.1360/N012013-00147