第 51 卷 第 5 期
2013 年 9 月
吉 林 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Jilin University (Science Edition)
Vol. 51 No. 5
Sep 2013

研究简报

doi: 10.7694/jdxblxb20130522

和与积相等的矩阵对及其多项式表示

陈梅香[1], 吕洪斌[2], 冯晓霞[3], 杨忠鹏[1], 徐晨雨[4]
(1. 莆田学院 数学系, 福建 莆田 351100; 2. 北华大学 数学学院, 吉林 吉林 132033;
3. 漳州师范学院 数学系, 福建 漳州 363000; 4. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 用矩阵 Jordan 标准形理论, 证明了和与积相等的矩阵对的 Jordan 标准形具有互为确定的性质, 进而得到由和与积相等的矩阵对的最小多项式及交换子空间确定的多项式表示的新结果.

关键词: 和与积相等的矩阵对; Jordan 标准形; 多项式; 最小多项式
中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2013)05-0867-04

Matrix Pair with the Sum and Product Being Equal and Its Polynomial Denotation

CHEN Mei-xiang[1], LÜ Hong-bin[2], FENG Xiao-xia[3], YANG Zhong-peng[1], XU Chen-yu[4]
(1. *Department of Mathematics, Putian University, Putian* 351100, *Fujian Province, China*;
2. *School of Mathematics, Beihua University, Jilin* 132033, *Jilin Province, China*;
3. *Department of Mathematics, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou* 363000, *Fujian Province, China*;
4. *School of Mathematics Sciences, Xiamen University, Xiamen* 361005, *Fujian Province, China*)

Abstract: Applying the theory of Jordan canonical form, we proved the properties of Jordan canonical forms of the matrix pair with the sum and product being equal are determined mutually, obtaining the new results of polynomial denotation determined by minimal polynomial and commutative subspaces.

Key words: matrix pair with the sum and product being equal; Jordan canonical form; polynomial; minimal polynomial

0 引 言

用 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $\mathbb{C}[x]$ 分别表示复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n\times n$ 矩阵及一元多项式的集合; $\mathbb{Z}^+$ 表示正整数; $\deg f(x)$ 为 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ 的次数; $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}_n)$ 表示 $(n\times n)$ 单位矩阵; $\boldsymbol{J}_A, f_A(x)=\det(x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, $m_A(x)\in\mathbb{C}[x]$ 分别表示 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 Jordan 标准形、特征多项式和最小多项式. 约定 n 次幂零矩阵 $\boldsymbol{N}_n=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{E}_{n-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

由于和与积相等的矩阵对[1]性质优良, 因此引起人们广泛关注[2-9]. 约定矩阵类 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C})=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}\}$, 用 $C(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\}$ 和 $W(\boldsymbol{A})=\{g(\boldsymbol{A})\mid g(x)\in\mathbb{C}[x]\}$ 分别表示由给定 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 所确定的 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 交换子空间和多项式子空间, 显然 $W(\boldsymbol{A})\subseteq C(\boldsymbol{A})$. 由文献[2-3]知,

收稿日期: 2012-12-31.
作者简介: 陈梅香(1982—), 女, 汉族, 硕士, 讲师, 从事代数理论及应用的研究, E-mail: cmxmath@126.com. 通信作者: 杨忠鹏(1947—), 男, 汉族, 教授, 从事矩阵及应用的研究, E-mail: yangzhongpeng@126.com.
基金项目: 福建省自然科学基金(批准号: 2010J01018)、福建省教育厅科研项目基金(批准号: JA12286; JA08196)和福建省高校服务海西建设重点项目(批准号: 2008HX03).

当$(A,B)\in T_n(\mathbb{C})$时，必有$AB=BA$.

命题1[1] 设$(A,B)\in T_n(\mathbb{C})$，若A有n个不同的特征值，则存在$u(x)\in\mathbb{C}[x]$且$\deg u(x)\leqslant n-1$，使得$B=u(A)$.

本文先证明了$(A,B)\in T_n(\mathbb{C})$的Jordan标准形具有互为确定的关系，然后作为应用，给出了用$m_A(x)$，$f_A(x)$，$C(A)$，$W(A)$所确定的积与和相等的矩阵对A，B的多项式表示的新结论，从而推广了文献[1]的相应结果.

1 积与和相等的矩阵对的Jordan标准形

由n次幂零矩阵的性质易得：由$\lambda(\neq 0)\in\mathbb{C}$所确定的Jordan块矩阵$J=\lambda E+N_n\in\mathbb{C}^{n\times n}$，从而

$$J^{-1}=(\lambda E+N_n)^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} & \cdots & (-1)^{n-2}\lambda^{-n+1} & (-1)^{n-1}\lambda^{-n}\\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \cdots & (-1)^{n-3}\lambda^{-n+2} & (-1)^{n-2}\lambda^{-n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}. \tag{1}$$

由此及Jordan标准形的性质易得：

引理1 设可逆矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的Jordan标准形

$$J_A=\operatorname{diag}(J_1(A),J_2(A),\cdots,J_s(A)), \tag{2}$$

$$J_i(A)=\lambda_i E_{n_i}+N_{n_i}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i},\quad i=1,2,\cdots,s;\quad n=\sum_{i=1}^{s}n_i, \tag{3}$$

则A^{-1}的Jordan标准形

$$J_{A^{-1}}=\operatorname{diag}(J_1(A^{-1}),J_2(A^{-1}),\cdots,J_s(A^{-1})),$$

$$J_i(A^{-1})=\lambda_i^{-1}E_{n_i}+N_{n_i}\in\mathbb{C}^{n\times n},\quad i=1,2,\cdots,s;\quad n=\sum_{i=1}^{s}n_i. \tag{4}$$

由式(1)知，Jordan块矩阵$J=\lambda E+N_n(\lambda\neq 0)$的逆$J^{-1}$一般不再是Jordan块矩阵，因此，一般$J_i(A^{-1})\neq J_i(A)^{-1}$，但$J_i(A^{-1})$与$J_i(A)$具有相近的密切关系(见式(3)，(4)).

引理2[1] 设$(A,B)\in T_n(\mathbb{C})$，则：

1) $AB=BA$;

2) A，B的特征值均不为1;

3) λ是A的特征值$\Leftrightarrow\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$为$B$的特征值;

4) $A-E$与$B-E$互为逆矩阵.

当$(A,B)\in T_n(\mathbb{C})$时，由引理3知$J_{A-E}=J_A-E$，$J_{B-E}=J_{(A-E)^{-1}}$，这样由式(1)及引理1和引理2易得：

定理1 设$(A,B)\in T_n(\mathbb{C})$，A的Jordan标准形如式(2)，(3)，则B的Jordan标准形为

$$\operatorname{diag}(J_1(B),J_2(B),\cdots,J_s(B))=J_B,$$

$$J_i(B)=\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}E_{n_i}+N_{n_i}\in\mathbb{C}^{n\times n},\quad i=1,2,\cdots,s;\quad n=\sum_{i=1}^{s}n_i.$$

引理3[6] 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的所有不同特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$，则$A$的最小多项式$m_A(x)=\prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{k_i}$，其中$k_i$为特征值$\lambda_i$确定的Jordan块的最高阶数；同时，$A$可对角化$\Leftrightarrow m_A(x)=\prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)\Leftrightarrow A$的每个Jordan块都是1阶的.

由引理2和定理1可得：

定理2 设$(A,B)\in T_n(\mathbb{C})$，如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是$A$的所有两两不同的重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_t$的特征值，且$A$的特征多项式和最小多项式分别为

$$f_A(x)=\prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{n_i},\qquad m_A(x)=\prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{k_i};\tag{5}$$

则$(x-\lambda_i)^{r_i}$是 A 的初等因子$\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i-1}\right)^{r_i}$是 B 的初等因子，$i=1,2,\cdots,t$；

$$f_B(x)=\prod_{i=1}^{t}\left(x-\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}\right)^{n_i};\qquad m_B(x)=\prod_{i=1}^{t}\left(x-\frac{\lambda_i}{\lambda_i-1}\right)^{k_i};\tag{6}$$

$$f_A(x)=m_A(x)\Leftrightarrow f_B(x)=m_B(x).\tag{7}$$

定理 1 和定理 2 表明，当$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C})$时，$\boldsymbol{J}_A$ 与 $\boldsymbol{J}_B$ 互为确定，从而$f_A(x)$与$f_B(x)$，$m_A(x)$与 $m_B(x)$与也互为确定. 于是由引理 3 和定理 2 及式(5),(6)可知：当$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C})$时，$\boldsymbol{A}$ 可对角化$\Leftrightarrow\boldsymbol{B}$ 可对角化；当$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C})$时，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 有 n 个不同的特征值.

于是命题 1 可改进为：

推论 1　设$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C})$，如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之一有 n 个不同的特征值，则存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg u(x)$，$\deg v(x)\leqslant n-1$，使得 $\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}=v(\boldsymbol{B})$.

2　和与积相等的矩阵对的多项式表示

非减次矩阵是一类重要的矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 是非减次矩阵的充要条件是

$$f_A(x)=\det(x\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=m_A(x),\qquad \boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}.\tag{8}$$

非减次矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 具有如下性质[6]：$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换$\Leftrightarrow$存在 $u(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg u(x)\leqslant n-1$，使得 $\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})$.

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则有[5,7]：

$$C(\boldsymbol{A})=W(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\deg m_A(x)=n\Leftrightarrow\dim C(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow\dim W(\boldsymbol{A})=n,\tag{9}$$

式中 $\dim C(\boldsymbol{A})$和 $\dim W(\boldsymbol{A})$分别表示 $C(\boldsymbol{A})$和 $W(\boldsymbol{A})$的维数.

定理 3　设$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C})$，且 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形如式(2),(3)所示. 如果满足下列条件之一，则存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg u(x)$,$\deg v(x)\leqslant n-1$，使得 $\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}=v(\boldsymbol{B})$：

1) $\deg m_A(x)=n$；
2) $\deg m_B(x)=n$；
3) $C(\boldsymbol{A})=W(\boldsymbol{A})$；
4) $C(\boldsymbol{B})=W(\boldsymbol{B})$；
5) $\dim C(\boldsymbol{A})=n$；
6) $\dim C(\boldsymbol{B})=n$；
7) $\dim W(\boldsymbol{A})=n$；
8) $\dim W(\boldsymbol{B})=n$.

证明：1) 当 $\deg m_A(x)=n$ 时，由 $\deg f_A(x)=n$ 和 $m_A(x)$整除$f_A(x)$知$f_A(x)=m_A(x)$，由式(8)知 $\boldsymbol{A}$ 是非减次的，又由引理 2 和非减次矩阵的性质知，存在 $u(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg u(x)\leqslant n-1$，使得 $\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})$；此时由式(7)可得$f_B(x)=m_B(x)$，再由引理 2 和非减次矩阵的性质知，存在 $v(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且$\deg v(x)\leqslant n-1$，使得 $\boldsymbol{A}=v(\boldsymbol{B})$.

2) 当 $\deg m_B(x)=n$ 时，类似 1) 知 $f_B(x)=m_B(x)$，再应用式(7)知，必有 $\deg m_A(x)=n$，从而由 1)知存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg u(x)$,$\deg v(x)\leqslant n-1$，使得 $\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}=v(\boldsymbol{B})$.

1)和 2)的讨论表明，当$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C})$时，$\deg m_A(x)=n\Leftrightarrow\deg m_B(x)=n$，因此由式(9)可得

$$\dim C(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow\dim C(\boldsymbol{B})=n\Leftrightarrow\dim W(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow\dim W(\boldsymbol{B})=n\Leftrightarrow$$
$$C(\boldsymbol{A})=W(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow C(\boldsymbol{B})=W(\boldsymbol{B}),\quad(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_n(\mathbb{C}).$$

从而由 1)和 2)知定理 3 所有的结论成立. 证毕.

显然，文献[1]所得命题 1 是定理 3 的一个特例.

例1 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&-1&-3&-8\\0&0&-1&-3\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$由文献[1]给出，由文献[1]知$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in T_4(\mathbb{C})$. 由$f_A(x)=m_A(x)=x^4$知$A$不满足命题1的要求；但由定理3知，可设$u(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，使得

$$u(\boldsymbol{A})=a\boldsymbol{E}+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{A}^2+d\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}a&b&2b+c&3b+4c+d\\0&a&b&2b+c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&-3&-8\\0&0&-1&-3\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

比较得$\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3$，即有$u(x)=-x-x^2-x^3$，使得$\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})$，类似可知有$v(x)=-x-x^2-x^3$，使得$\boldsymbol{A}=v(\boldsymbol{B})$.

例2 矩阵$A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&-1&1\\-1&-5&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\3&2&2\end{pmatrix}$是文献[1]给出的和与积相等的矩阵对，文献[1]未讨论多项式表示. 类似例1知，存在$u(x)=6-3x+x^2$，$v(x)=6-5x+x^2$，使得$\boldsymbol{B}=u(\boldsymbol{A})=6\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}=v(\boldsymbol{B})=6\boldsymbol{E}-5\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$.

参考文献

[1] SHAO Yi-min. On Matrix Pair $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ with the Condition $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$ [J]. Journal of Zhejiang University: Science Edition, 2009, 36(6): 609-612. (邵逸民. 关于和与积相等的矩阵对[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2009, 36(6): 609-612.)

[2] ZHANG Fu-zhen. Matrix Theory: Basic Results and Techniques [M]. 2nd ed. New York: Springer, 2011.

[3] 王卿文. 线性代数核心思想及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[4] YANG Zhong-peng, WANG Hai-ming, ZHANG Jin-hui, et al. Discussing on Commutative Problem of Linear Transform [J]. Journal of Beihua University: Natural Science, 2010, 11(4): 307-311. (杨忠鹏, 王海明, 张金辉, 等. 关于线性变换的可交换问题的一些讨论[J]. 北华大学学报: 自然科学版, 2010, 11(4): 307-311.)

[5] YANG Zhong-peng, FENG Xiao-xia, ZHANG Qing-xin. The Polynomial Denotation for the Matrix Being Changeable with a Given Matrix [J]. College Mathematics, 2012, 28(1): 99-106. (杨忠鹏, 冯晓霞, 张清新. 关于与给定矩阵可交换的矩阵的多项式表示[J]. 大学数学, 2012, 28(1): 99-106.)

[6] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis [M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[7] LIN Jian-fu, DU Cui-zhen. Sufficient and Necessary Conditions of Commutative Matrices [J]. Journal of Jilin Normal University: Natural Science Edition, 2012, 33(4): 59-61. (林建富, 杜翠真. 矩阵可交换的充要条件[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2012, 33(4): 59-61.)

[8] LÜ Hong-bin, YANG Zhong-peng, FENG Xiao-xia, et al. Necessary and Sufficient Conditions and Applications of Generalized m Involutory Matrix and (m,l) Idempotent Matrix [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2012, 50(6): 1069-1074. (吕洪斌, 杨忠鹏, 冯晓霞, 等. 广义m对合矩阵和(m,l)幂等矩阵的充要条件及应用[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2012, 50(6): 1069-1074.)

[9] CHEN Mei-xiang, LÜ Hong-bin, FENG Xiao-xia. The Essential (m,l)-Idempotent Matrix and Its Mininal Polyromial [J]. International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2013, 41(11): 31-41.

(责任编辑: 赵立芹)