科学通报
第41卷 第24期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1996年12月

# 具有离散核的 Bochner-Martinelli 公式*

林良裕
(厦门大学数学研究所, 厦门 361005)

**关键词** Bochner-Martinelli 公式 有界域 离散核

周知, 在一般有界域上至今尚未建立具有全纯核的多复变数整体积分公式. 本文的目的是要在一般有界域上建立一类具有离散全纯核的 Bochner-Martinelli 整体积分公式, 并能在$\bar{\partial}$方程和奇异积分方程等研究中得到重要的应用.

设 D 是$\mathbb{C}^n$中具有 $C^1$ 光滑边界$\partial D$的有界域, $\mathscr{B}=\{B_n \mid n\in\mathbb{N}\}$是 D 的一个 σ 局部有限开覆盖, $\bigcup\mathscr{B}=D$, $B_n=B_{\delta_n}(a_n)=\{z \mid |z-a_n|<\delta_n\}\subset D$, $\mathbb{N}=\{1,\cdots,n,\cdots\}$, $\mathscr{F}=\{B_J=\bigcap\limits_{j\in J}B_j\neq\varnothing \mid B_j\in\mathscr{B}$, $J$ 是$\mathbb{N}$的有限子集$\}$是$\mathscr{B}$的一个 σ 局部有限加细, 记为$\mathscr{F}\ll\mathscr{B}$. $\mathscr{T}$表示$\mathbb{C}^n$ 中的欧氏拓扑, $\mathscr{S}$表示$\mathscr{T}$在 D 中的相对拓扑.

## 1 构造单位分解和离散核

**定义 1.1** 设 $\Psi$ 是拓扑空间$(\mathbb{C}^n,\mathscr{T})$的子空间$(D,\mathscr{S})$中一可数可积函数族, 若对每一点 $z\in D$, 存在 $z$ 的邻域 $U$, 使得除了 $\Psi$ 的有限个成员之外在点 $z$ 或 $U$ 上均为零, 而这有限个成员在 $U$ 中是全纯的, 则称 $\Psi$ 是 D 上的一个 σ 点有限局部全纯的函数族.

**定义 1.2** 设$\mathscr{U}$是域 D 的一个开覆盖, $\Psi=\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$是 D 上的一个 σ 点有限局部全纯的函数族, 若对每一点 $z\in D$, 满足 $\sum\limits_{f_n\in\Psi}f_n(z)=1$, 并且对每一 $f_n\in\Psi$, 存在一个 $U\in\mathscr{U}$, 使得$\{z\in D \mid f_n(z)\neq 0\}=U$, 则称 $\Psi$ 是 D 上的一个从属于$\mathscr{U}$的 σ 点有限局部全纯的单位分解.

我们容易验证下面的引理.

**引理 1.1** 设$\mathscr{U}$是域 D 的一个开覆盖, 那么存在一个由包含在 D 内的可数开球族构成的$\mathscr{U}$的局部有限加细开覆盖$\mathscr{B}$, 使得$\bigcup\mathscr{B}=D$, 并称$\mathscr{B}$是 D 的一个 σ 局部有限开覆盖.

定义$(\zeta,z)\in\partial D\times D$上的可积向量函数族 $w=(w_1,\cdots,w_n)$, 满足 $w_k$, $1\leqslant k\leqslant n$ 关于 $z\in D$ 是 σ 点有限局部全纯的函数族, 关于 $\zeta\in\partial D$ 是 $C^1$ 的.

$$w_k(\zeta,z)=\sum_J\sum_{j\in J}\chi_{B_j}(z)(\bar{\zeta}_k-\bar{a}_{jk}),\tag{1.1}$$

其中和式$\sum\limits_J$是对所有使 $B_J\in\mathscr{F}$的$\mathbb{N}$的有限子集 $J$ 求和, $\chi_{B_j}$为 $B_J$ 的特征函数, $a_j$ 为 $B_j$ 的中心.

**引理 1.2** 设$\mathscr{F}\ll\mathscr{B}$, $\bigcup\mathscr{B}=\bigcup\mathscr{F}=D$, 那么对任意的$(\zeta,z)\in\partial D\times D$,

1996-01-03 收稿, 1996-05-07 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目

$$\operatorname{Re}\langle \zeta - z, w\rangle > \frac{1}{2}\sum_{J}\sum_{j\in J}\chi_{B_j}(z)\,|\zeta - z|^2 > 0. \tag{1.2}$$

特别地,当 $\zeta\in\partial D\cap\bar{B}_J$, $z\in B_J=\bigcap_{j\in J}B_{\delta_j}(a_j)$,且 $z\in\overline{a_j\zeta}$沿 $B_{\delta_j}(a_j)$的径向即边界$\partial D$于点 $\zeta$ 的法向趋于$\zeta$时,对足够小的$|\zeta-z|>0$,有

$$\operatorname{Re}\langle \zeta - z, w\rangle = \sum_{J}\sum_{j\in J}\chi_{B_j}(z)\,|\zeta - a_j|\,|\zeta - z|. \tag{1.3}$$

**证**　对每一点 $z\in D$, 由文献[1]引理 1 知,对 $\zeta\in\partial D$, $z\in B_j\subset D$,有

$$\operatorname{Re}\langle \zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{a}_j\rangle > \frac{1}{2}\,|\zeta - z|^2 > 0. \tag{1.4}$$

特别地,当 $\zeta\in\partial D\cap\bar{B}_J$, $B_J\in\mathscr{F}$时,由$\partial D$的光滑性知,每一个 $j\in J$, $B_j$ 的中心点$a_j$ 均落在$\partial D$于 $\zeta$ 处的内法线上. 若 $z\in\overline{a_j\zeta}$,并且 $z$ 沿 $B_j$ 的径向趋于$\zeta$时,对足够小的$|\zeta-z|>0$,有

$$\operatorname{Re}\langle \zeta - \bar{a}_j\rangle = |\zeta - z|\,|\zeta - a_j|. \tag{1.5}$$

由(1.4)和(1.5)式分别立得(1.2)和(1.3)式. 于是引理得证.

现在构造域 D 上的一个单位分解. 对$(\zeta, z)\in\partial D\times D$,定义 $\Phi(\zeta,z)=\langle\zeta-z,w\rangle$,易知 $\Phi(\zeta,z)\neq0$. 因此,对$(\zeta,z)\in\partial D\times D$ 可定义,列向量族如下,令 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$

$$\eta_k = \frac{w_k}{\Phi} = \sum_{J}\sum_{j\in J}f^J_{jk},\quad 1\leqslant k\leqslant n,\ j\in J, \tag{1.6}$$

$$f^J_{jk}(\zeta,z) = \chi_{B_j}(z)(\bar{\zeta}_k - \bar{a}_{jk})\frac{1}{\Phi(\zeta,z)}.$$

对$(\zeta,z)\in\partial D\times D$, $z$ 仅属于有限个球$B_j$. 假定 $j\in J$, $z\in B_J\in\mathscr{F}$, $J=\{j_1,\cdots,j_l\}\subset\mathbb{N}$. 固定 $k$, $1\leqslant k\leqslant n$,显然函数族$\{f^J_{jk}\mid B_J\in\mathscr{F},\ J\subset\mathbb{N}\}$满足:(i) $\{z\in D\mid f^J_{jk}\neq0\}=B_J$, (ii)每一个 $j\in J$. $f^J_{jk}$关于$z\in B_J$ 是全纯的,关于 $\zeta\in\partial D$ 是 $C^1$ 的. 由(1.1)和(1.6)式,有

$$\langle\zeta - z, \eta\rangle = \sum_{k=1}^{n}(\zeta_k - z_k)\eta_k = 1, \tag{1.7}$$

因此,$\{\eta_k\}_1^n$ 是一个从属于域 D 的开覆盖$\mathscr{F}$的 $\sigma$ 点有限局部全纯的单位分解.

若 $\zeta\in\partial D\cap\bar{B}_J$, $z$ 沿与$B_J$ 的径向$\overline{a_j\zeta}$相同的方向趋于$\zeta$时,由(1.1),(1.3)和(1.6)式立得

$$|\eta_k| = |w_k|\,|\Phi|^{-1}\leqslant\frac{1}{|\zeta - z|}. \tag{1.8}$$

其次,令 $H=(H_1,\cdots,H_n)^{\mathrm{T}}$, $h=(h_1,\cdots,h_n)^{\mathrm{T}}$,对$(\zeta,z)\in\partial D\times D$,定义

$$H_k = \lambda h_k + (1-\lambda)\eta_k,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \lambda\in\mathbb{R}, \tag{1.9}$$

$$h_k = (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\,|\zeta - z|^{-2},\ 1\leqslant k\leqslant n. \tag{1.10}$$

由(1.7),(1.9)和(1.10)式,对$(\zeta,z)\in\partial D\times D$,可得

$$\langle\zeta - z,\ H\rangle = 1, \tag{1.11}$$

于是,$\{H_k\}_1^n$ 是一个 $\sigma$ 点有限局部可微分的单位分解.

现在定义域 D 上的一个关于 $z\in D$ 是 $\sigma$ 点有限局部全纯的核$\Omega(\eta)$,简称为离散全纯核,

$$\Omega(\eta) = C_n\det(\eta,\bar{\partial}_\zeta\eta,\cdots,\bar{\partial}_\zeta\eta)\wedge d\zeta, \tag{1.12}$$

其中 $C_n=(-1)^{n(n-1)/2}(2\pi i)^{-n}$, $d\zeta=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$, $\eta$的分量由(1.1)和(1.6)式定义. 易知核 $\Omega(\eta)$ 关于 $z\in D$ 是 $\sigma$ 点有限局部全纯的和关于$\zeta\in\partial D$ 是 $C^1$ 的. 确切地说,它是一个

由分布在 D 上，定义在 $B_J \in \mathscr{F}, J \subset \mathbb{N}$ 上的所有 $\sigma$ 可数个局部全纯核的集体．每个局部核 $\Omega(\eta)|_{B_J}$ 关于 $z \in B_J$ 是全纯的．只要对(1.7)式双边应用算子 $\bar{\partial}_\zeta$ 易知核 $\Omega(\eta)$ 是一闭 $(n, n-1)$ 外微分式．即 $\bar{\partial}_\zeta \Omega(\eta) = 0$．由(1.2)，(1.8)和(1.12)式立知 $\Omega(\eta)$ 仅在点 $z = \zeta \in \partial D$ 至多有一可积的 $2n-1$ 阶的奇性．周知

$$\Omega(h) = C_0 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) |\zeta - z|^{-2n} d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta, \tag{1.13}$$

是 Bochner-Martinelli 核[2]，$C_0 = (n-1)(2\pi i)^{-n}$，$d\bar{\zeta}_{[k]}$ 表示在 $d\bar{\zeta}$ 中缺去 $d\bar{\zeta}_k$．我们在 $(\zeta, \lambda, z) \in \partial D \times \mathbb{R} \times D$ 上定义新的离散核

$$\Omega(H) = C_n \det(H, \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} H, \cdots, \bar{\partial}_{\zeta,\lambda} H) \wedge d\zeta, \tag{1.14}$$

其中 $H_k$ 由(1.9)和(1.10)式定义．易知，$\Omega(H)$ 关于 $\zeta \in \partial D$ 是 $C^1$ 的，关于 $z \in D$ 是 $\sigma$ 点有限局部连续可微分的；它仅在 $z = \zeta \in \partial D$ 具有和 $\Omega(\eta)$ 相同阶数的奇性，并且 $\bar{\partial}_{\zeta,\lambda} \Omega(H) = 0$.

## 2 积分公式

类似文献[1]引理 3 的证明，只要对(1.11)式双边应用算子 $\bar{\partial}_{\zeta,\lambda}$，立得下面的引理．

**引理 2.1** 设函数 $f(\zeta) \in C^k(\bar{D})$. $1 \leqslant k \leqslant +\infty$，那么对任意固定的 $z \in D$ 和所有的 $\zeta \in \partial D, \lambda \in \mathbb{R}$，

$$d_{\zeta,\lambda}(f\Omega(H)) = \bar{\partial}_\zeta f \wedge \Omega(H). \tag{2.1}$$

**定理 2.1** 设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中具有 $C^1$ 边界的有界域，函数 $f \in C^k(\bar{D})$，$1 \leqslant k \leqslant +\infty$，那么对 $z \in D$，

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta) - \int_D \bar{\partial} f \wedge \Omega(h) - \int_{\partial D} \bar{\partial} f \wedge \int_0^1 \Omega(H). \tag{2.2}$$

**证** 对 $d(f\Omega(H))$ 在 $G = \{(\zeta, \lambda) | (\zeta, \lambda) \in \partial D \times [0,1] \cup (D \setminus B_\varepsilon(z)) \times \{1\}\}$ 上的积分应用 Stokes 定理，由(2.1)式，并且令 $\varepsilon \to 0$，可得

$$\int_{\partial D \times [0,1]} \bar{\partial}_\zeta f \wedge \Omega(H) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(D \setminus B_\varepsilon(z)) \times \{1\}} \bar{\partial}_\zeta f \wedge \Omega(H) =$$

$$\int_{\partial D \times \{0\}} f(\zeta)\Omega(H) - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(z) \times \{1\}} f(\zeta)\Omega(H).$$

由 $\lambda = 0$, $\Omega(H) = \Omega(\eta)$；$\lambda = 1$, $\Omega(H) = \Omega(h)$，上式右边第二项为 $f(z)$，并且立得(2.2)式．

由定理 1 立得下面的推论．

**推论** 在定理 2.1 的条件下，若 $f \in A_c(D)$，则

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta), \quad z \in D, \tag{2.3}$$

并称(2.3)式为有界域 D 上具有离散全纯核的 Bochner-Martinelli 公式．

### 参 考 文 献

1 林良裕．$\mathbb{C}^n$ 中光滑拟凸域上 $\bar{\partial}$ 方程的局部解．厦门大学学报(自然科学版)，1995, 34(5)：680～686

2 钟同德，黄 沙．多元复分析．石家庄：河北教育出版社，1990