

文章编号 : 1007-9831 (2013) 04-0030-03

对称群的循环子群的计算结果

王积社¹, 刘姊珺²

(1. 韩山师范学院 数学与应用数学系, 广东 潮州 521041; 2. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要 : 计算出 $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}$ 的循环子群, 并给出其共轭分类.

关键词 : 对称群; 循环子群; 共轭类

中图分类号 : O152.1 文献标识码 : A doi : 10.3969/j.issn.1007-9831.2013.04.010

The calculation results of the cyclic subgroup of the symmetry group

WANG Ji-she¹, LIU Zi-jun²(1. Department of Mathematics and Applied Mathematics, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China ;
2. School of Mathematics Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)**Abstract** : Calculated the cyclic subgroup of $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}$, and gave the conjugate classification.**Key words** : symmetry group ; cyclic subgroup ; conjugacy class

设计 C 语言程序计算了对称群 $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}$ 的所有循环子群, 且给出了共轭分类及其类代表以及各类的类长 (该类中所含子群的个数), 因为程序代码较多, 所以只列出计算结果 .

为了计算方便, 本文将置换 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$ 简记为 $[k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n]$, 称之为置换的简约式. 至于对称群与循环群的有关概念及结论参考文献[1-3]. 本程序设计中参考了文献[4]的全排列生成算法及文献[5]的某些算法.

1 S_6 的循环子群

S_6 只有阶数为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的循环子群, 共有 362 个, 可分为 11 个共轭类, 其中 1, 5 阶的都只有一类, 3 或 4 或 6 阶的可分为 2 类, 2 阶的可分为 3 类 (见表 1).

表 1 S_6 的循环子群的共轭分类

编号	阶数	类长	类代表	编号	阶数	类长	类代表
1	1	1	[123456]	7	4	45	[124563]
2	2	15	[123465]	8	4	45	[214563]
3	2	45	[124365]	9	5	36	[134562]
4	2	15	[214365]	10	6	60	[132564]
5	3	20	[123564]	11	6	60	[234561]
6	3	20	[231564]				

2 S_7 的循环子群

收稿日期 : 2013-02-01

作者简介 : 王积社 (1954 -), 男, 山西晋城人, 副教授, 从事数学机械化研究. E-mail : wangfeng.yz@163.com

S_7 只有阶数为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12 的循环子群, 共有 2 039 个, 可分为 15 个共轭类, 其中 1, 5, 7, 10, 12 阶的都只有一类, 3 或 4 阶的可分为 2 类, 2 或 6 阶的可分为 3 类 (见表 2).

表 2 S_7 的循环子群的共轭分类

编号	阶数	类长	类代表	编号	阶数	类长	类代表
1	1	1	[1234567]	9	5	126	[1245673]
2	2	21	[1234576]	10	6	210	[1243675]
3	2	105	[1235476]	11	6	420	[1345672]
4	2	105	[1325476]	12	6	105	[2143675]
5	3	35	[1234675]	13	7	120	[2345671]
6	3	140	[1342675]	14	10	126	[2145673]
7	4	105	[1235674]	15	12	105	[2315674]
8	4	315	[1325674]				

3 S_8 的循环子群

S_8 只有阶数为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15 阶的循环子群, 共有 14 170 个, 可分为 22 个共轭类, 其中 1, 5, 7, 8, 10, 12, 15 阶的都只有一类, 3 阶的可分为 2 类, 2 或 4 阶的可分为 4 类, 6 阶的可分为 5 类 (见表 3).

表 3 S_8 的循环子群的共轭分类

编号	阶数	类长	类代表	编号	阶数	类长	类代表
1	1	1	[12345678]	12	5	336	[12356784]
2	2	28	[12345687]	13	6	560	[12354786]
3	2	210	[12346587]	14	6	1 680	[12456783]
4	2	420	[12436587]	15	6	840	[13254786]
5	2	105	[21436587]	16	6	560	[21453786]
6	3	56	[12345786]	17	6	1 680	[21456783]
7	3	560	[12453786]	18	7	960	[13456782]
8	4	210	[12346785]	19	8	1 260	[23456781]
9	4	1 260	[12436785]	20	10	1 008	[13256784]
10	4	630	[21436785]	21	12	840	[13426785]
11	4	630	[23416785]	22	15	336	[23156784]

4 S_9 的循环子群

S_9 只有阶数为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 20 的循环子群, 共有 109 694 个, 可分为 30 个共轭类, 其中 1, 5, 7, 8, 9, 14, 15, 20 阶的都只有一类, 10 或 12 阶的可分为 2 类, 3 阶的可分为 3 类, 2 或 4 阶的可分为 4 类, 6 阶的可分为 7 类 (见表 4).

表 4 S_9 的循环子群的共轭分类

编号	秩	阶数	类长	类代表	编号	秩	阶数	类长	类代表
1	1	1	1	[123456789]	16	1	6	3 780	[124365897]
2	1	2	36	[123456798]	17	1	6	5 040	[132564897]
3	1	2	378	[123457698]	18	1	6	15 120	[132567894]
4	1	2	1 260	[123547698]	19	1	6	1 260	[214365897]
5	1	2	945	[132547698]	20	1	6	10 080	[231567894]
6	1	3	84	[123456897]	21	1	7	4 320	[124567893]
7	1	3	1 680	[123564897]	22	1	8	11 340	[134567892]
8	1	3	1 120	[231564897]	23	1	9	6 720	[234567891]
9	1	4	378	[123457896]	24	1	10	4 536	[124367895]
10	1	4	3 780	[123547896]	25	1	10	2 268	[214367895]
11	1	4	5 670	[132547896]	26	1	12	3 780	[124537896]
12	1	4	5 670	[134527896]	27	1	12	3 780	[214537896]
13	1	5	756	[123467895]	28	1	14	4 320	[214567893]
14	1	6	1 260	[123465897]	29	1	15	3 024	[134267895]
15	1	6	5 040	[123567894]	30	1	20	2 268	[234167895]

5 S_{10} 的循环子群

S_{10} 只有阶数为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 30 的循环子群, 共有 976 412 个, 可分为 42 个共轭类, 其中 1, 7, 9, 14, 15, 20, 21, 30 阶的都只有一类, 5 或 8 阶的可分为 2 类, 3 或 10 阶的可分为 3 类, 12 阶的各自可分为 4 类, 2 阶的各自可分 5 类, 4 阶的可分为 6 类, 6 阶的可分为 9 类 (见表 5).

表 5 S_{10} 的循环子群的共轭分类

编号	秩	阶数	类长	类代表	编号	秩	阶数	类长	类代表
1	1	1	1	[123456789a]	22	1	6	75 600	[12436789a5]
2	1	2	45	[12345678a9]	23	1	6	12 600	[13254769a8]
3	1	2	630	[12345687a9]	24	1	6	100 800	[13426789a5]
4	1	2	3 150	[12346587a9]	25	1	6	12 600	[21436759a8]
5	1	2	4 725	[12436587a9]	26	1	6	37 800	[21436789a5]
6	1	2	945	[21436587a9]	27	1	7	14 400	[12356789a4]
7	1	3	120	[12345679a8]	28	1	8	56 700	[12456789a3]
8	1	3	4 200	[12346759a8]	29	1	8	56 700	[21456789a3]
9	1	3	11 200	[13426759a8]	30	1	9	67 200	[13456789a2]
10	1	4	630	[12345689a7]	31	1	10	15 120	[12354789a6]
11	1	4	9 450	[12346589a7]	32	1	10	22 680	[13254789a6]
12	1	4	28 350	[12436589a7]	33	1	10	90 720	[23456789a1]
13	1	4	28 350	[12456389a7]	34	1	12	12 600	[12356489a7]
14	1	4	9 450	[21436589a7]	35	1	12	37 800	[13256489a7]
15	1	4	28 350	[21456389a7]	36	1	12	12 600	[23156489a7]
16	1	5	1 512	[12345789a6]	37	1	12	37 800	[23416789a5]
17	1	5	18 144	[23451789a6]	38	1	14	43 200	[13256789a4]
18	1	6	2 520	[12345769a8]	39	1	15	15 120	[12453789a6]
19	1	6	12 600	[12346789a5]	40	1	20	22 680	[13452789a6]
20	1	6	12 600	[12354769a8]	41	1	21	14 400	[23156789a4]
21	1	6	25 200	[12436759a8]	42	1	30	15 120	[21453789a6]

6 S_{11} 的循环子群

S_{11} 只有阶数为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 28, 30 的循环子群, 共有 8 921 002 个 (见表 6).

表 6 S_{11} 的循环子群

阶数	子群个数	阶数	子群个数	阶数	子群个数	阶数	子群个数
1	1	6	2 248 015	11	362 880	20	249 480
2	35 695	7	39 600	12	1 004 850	21	158 400
3	71 005	8	831 600	14	356 400	24	207 900
4	645 480	9	369 600	15	110 880	28	118 800
5	202 356	10	1 205 820	18	369 600	30	332 640

参考文献:

- [1] 徐明曜. 有限群导引 (上册) [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 1999
- [2] 张远达. 有限群构造 (上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1982
- [3] 韩士安, 林磊. 近世代数 [M]. 北京: 科学出版社, 2004
- [4] 王晓玲. 换位法实现全排列 [J]. 沧州师范专科学校学报, 2004, 20 (4): 56
- [5] 徐士良. 常用算法程序集: C 语言描述 [M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2004