第56卷第2期 数学学报中文版 Vol.56, No.2
2013年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2013

文章编号: 0583-1431(2013)02-0217-06 **文献标识码:** A

度量空间粗嵌入进 l_2 的一个注记

罗正华

华侨大学数学科学学院 泉州 362021
E-mail: luozhenghua@hotmail.com

张 文

厦门大学数学科学学院 厦门 361005
E-mail: wenzhang@xmu.edu.cn

摘 要 对 l_p- 空间与 l_2 之间粗嵌入关系作进一步的研究, 证明了度量空间 X 可粗嵌入进 l_2 当且仅当存在某个 $2 < p_0 < \infty$, 使得 X 可一致地粗嵌入进 $\{l_p, 2 < p \leq p_0\}$. 这给出度量空间粗嵌入进 l_2 的一个等价刻画.

关键词 度量空间; 粗嵌入; 一致粗嵌入
MR(2010) 主题分类 46B20, 46B04, 58C20
中图分类 O177.2

On the Coarse Embeddability of l_p-Spaces Into l_2

Zheng Hua LUO

School of Mathematical Science, Huaqiao University,
Quanzhou 362021, *P. R. China*
E-mail: *luozhenghua@hotmail.com*

Wen ZHANG

Department of Mathematics, Xiamen University,
Xiamen 361005, *P. R. China*
E-mail: *wenzhang@xmu.edu.cn*

Abstract We made some further research on the coarse embeddability between l_p-spaces and l_2 and we proved that a metric space X can be coarsely embedded into l_2 if and only if there exists some $p_0 > 0$ such that X can be coarsely embedded into $\{l_p, 2 < p \leq p_0\}$ uniformly. This gave an equivalent condition for the coarse embeddability of metric spaces into l_2.

Keywords metric spaces; coarsely embedding; coarsely embedding uniformly
MR(2010) Subject Classification 46B20, 46B04, 58C20
Chinese Library Classification O177.2

收稿日期: 2011-12-02; 接受日期: 2012-10-22
基金项目: 国家自然科学基金 (11101340, 11201160); 福建省自然科学基金 (2010J05012, 2012J05006); 华侨大学高层次人才科研启动项目 (11BS223)
通讯作者: 张文

1 引言和基本定义

在文 [1] 中, Gromov 引入了粗嵌入 (coarse embedding) 的概念.

定义 1.1 设 X,Y 是度量空间, 映射 $f: X \to Y$ 称为一个粗嵌入, 如果存在不减函数 $\rho_1,\rho_2:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 使得

(i) $\rho_1(d(x,y))\le d(f(x),f(y))\le\rho_2(d(x,y))$, $\forall\, x,y\in X$;

(ii) $\lim_{t\to+\infty}\rho_1(t)=+\infty$.

Gromov [1,2] 认为一个离散群到一个 Hilbert 空间 (或一致凸 Banach 空间) 的粗嵌入性, 可能与 Novikov 猜想相关. Yu [3,4] 随后证明了能粗嵌入进某个 Hilbert 空间的具有界几何的度量空间 (相应地, 离散群) 满足粗 Baum–Connes 猜想 (相应地, Novikov 猜想). 根据这一重要结果, 对于一大类的离散度量空间 (相应地, 离散群) 都可以验证其是否满足粗 Baum–Connes 猜想 (相应地, Novikov 猜想). 随后 Kasparov 和 Yu [5] 又考察了粗嵌入进一致凸 Banach 空间的情况. 由于上述这些重要的研究结果, Hilbert 空间 (或更一般的 Banach 空间) 的粗嵌入理论的研究引起了人们极大的重视.

这其中, l_p- 空间与 l_2 之间粗嵌入性的研究具有特殊的意义. Nowark [6,7] 证明了 l_2 可粗嵌入进每个 $l_p, 1\le p<\infty$, 同时证明了度量空间可粗嵌入进 l_2 当且仅当其可粗嵌入进某个 $l_p, 1\le p\le 2$. Johnson 和 Randrianarivony [8] 证明了 l_p $(p>2)$ 不能粗嵌入进 l_2. 本文证明了度量空间 X 可粗嵌入进 l_2 当且仅当存在某个 $p_0>2$, 使得 X 可一致地粗嵌入进 $\{l_p, 2<p\le p_0\}$.

因为嵌入一个复的 Hilbert 空间等价于嵌入一个实的 Hilbert 空间, 因此, 我们假设 Banach 空间都是实的. 用 $S(X)$ 表示 Banach 空间 X 的单位球面. 若 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列 Banach 空间, 我们用 $(\sum X_n)_p$ 表示这列 Banach 空间关于 p- 范数的直和, 即

$$\Big(\sum X_n\Big)_p=\Big\{x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}: x_n\in X_n, \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty\Big\},\quad \|x\|_p=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

当每个 X_n 都为 l_p 时, $(\sum l_p)_p$ 等距于 l_p.

定义 1.2 设 X 是度量空间, $\{(Y_\lambda,d_\lambda),\lambda\in\Gamma\}$ 是一族度量空间, 称 X 可一致地粗嵌入进 $\{Y_\lambda,\lambda\in\Gamma\}$, 若存在不减函数

$$\rho_1,\rho_2:[0,+\infty)\to[0,+\infty)\ \ \text{以及}\ \ f_\lambda: X\to Y_\lambda,\quad \lambda\in\Gamma,$$

满足

(i) $\rho_1(d(x,y))\le d_\lambda(f_\lambda(x),f_\lambda(y))\le\rho_2(d(x,y))$, $\forall\, x,y\in X$, $\forall\,\lambda\in\Gamma$;

(ii) $\lim_{t\to+\infty}\rho_1(t)=+\infty$.

Johnson 和 Randrianarivony [8] 证明了 l_p $(p>2)$ 不能粗嵌入进 l_2. 我们将证明若存在某个 $p_0>2$, 使得 X 可一致地粗嵌入进 $\{l_p, 2<p\le p_0\}$, 则 X 可粗嵌入进 l_2.

2 主要结果

为了证明本文的主要结果, 我们先给出一些引理.

引理 2.1 [6] 度量空间 X 可粗嵌入进某个 Hilbert 空间当且仅当存在不减函数

$$\rho_1,\rho_2:[0,+\infty)\to[0,+\infty),$$

使得

$$\lim_{t\to+\infty}\rho_1(t)=+\infty,$$

以及对每个有限集 $A\subset X$, 都存在 $f_A:A\to l_2$, 满足

$$\rho_1(d(x,y))\le\|f_A(x)-f_A(y)\|\le\rho_2(d(x,y)),\quad\forall\,x,y\in A.$$

引理 2.2 [9] 设 M 是 l_p $(1\le p\le\infty)$ 中包含 n 个点的子集, 则 M 可等距嵌入进 l_p^m 中, 其中 $m=\frac{1}{2}n(n-1)$.

利用上述引理, 我们可以证明如下定理.

定理 2.1 若对某个 $2<p_0<\infty$, 度量空间 X 可一致地粗嵌入进 $\{l_p,\,2<p\le p_0\}$, 则 X 可粗嵌入进 l_2.

证明 依题意, 存在不减函数 $\rho_1,\rho_2:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, 以及 $f_p:X\to l_p,\,2<p\le p_0$, 满足

(i) $\rho_1(d(x,y))\le\|f_p(x)-f_p(y)\|_p\le\rho_2(d(x,y))$, $\forall\,x,y\in X,\ 2<p\le p_0$;

(ii) $\lim_{t\to+\infty}\rho_1(t)=+\infty$.

由引理 2.1, 只需证明对任意有限集 $A=\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1}\}\subset X$, 都存在 $f_A:A\to l_2$, 满足

$$\rho_1(d(x,y))\le\|f_A(x)-f_A(y)\|_2\le\rho_2(d(x,y)),\quad\forall\,x,y\in A.$$

取 $2<p_k<p_0,p_k\searrow 2$. 对每个 $k\in\mathbb{N}$, 记 $y_{k,i}=f_{p_k}(x_i)$, $i=0,1,\dots,n-1$. 由引理 2.2, 将 $\{y_{k,0},y_{k,1},\dots,y_{k,n-1}\}$ 视为 $l_{p_k}^m$ 的子集, 其中 $m=\frac{1}{2}n(n-1)$, 并且不妨设 $y_{k,0}=0$, 则有

$$\rho_1(d(x_i,x_j))\le\|y_{k,i}-y_{k,j}\|_{p_k}\le\rho_2(d(x_i,x_j)),\quad i,j=0,1,\dots,n-1,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{$*$}$$

注意到对每个 $i=1,2,\dots,n-1$,

$$\|y_{k,i}\|_{p_0}\le\|y_{k,i}\|_{p_k}\le\rho_2(d(x_i,x_0)),\quad\forall\,k\in\mathbb{N}.$$

因此 $\{y_{k,i},\,k\in\mathbb{N}\}$ 是 l_2^m 中的有界集. 由紧性知, $\{y_{k,i},\,k\in\mathbb{N}\}$ 存在收敛子列. 不妨设 $k\to\infty$ 时, $y_{k,i}\to y_i\in l_2^m$, $i=1,2,\dots,n-1$.

定义 $f_A:A\to l_2^m\subset l_2$, 满足 $f(x_i)=y_i$, $i=0,1,\dots,n-1$, 其中 $y_0=0$. 因为 $y_{k,i}-y_{k,j}\to y_i-y_j(k\to\infty)$, 所以

$$\lim_{k\to\infty}\|y_{k,i}-y_{k,j}\|_{p_k}=\|y_i-y_j\|_2;$$

再由 $(*)$ 知

$$\rho_1(d(x_i,x_j))\le\|y_i-y_j\|_2\le\rho_2(d(x_i,x_j)),\quad i,j=0,1,\dots,n-1.$$

因此 f_A 即为所求.

为了说明定理 2.1 的条件不是平凡的, 我们可利用文 [7–10] 中的方法证明: 若度量空间 X 可粗嵌入进 l_2, 则对任意的 $2<p_0<\infty,X$ 可一致地粗嵌入进 $\{l_p,1\le p\le p_0\}$.

首先给出有关定义和引理.

定义 2.3 [11] 设 $1\le p,\ q<\infty$, Mazur 映射 $M_{p,q}:S(l_p)\to S(l_q)$ 定义如下

$$M_{p,q}(x)=\{|x_i|^{\frac{p}{q}}\operatorname{sign}(x_i)\}_{i=1}^{\infty},\quad x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in S(l_p).$$

当 $p<q$ 时, $M_{p,q}$ 满足

$$\frac{p}{q}\|x-y\|_p\le\|M_{p,q}(x)-M_{p,q}(y)\|_q\le C\|x-y\|_p^{\frac{p}{q}},\quad x,y\in S(l_p),$$

其中常数 C 只和 p,q 有关. 当 $p>q$ 时,$M_{p,q}$ 满足相反的不等式, 并且 $M_{p,q}=M_{q,p}^{-1}$.

特别地, 对于 Mazur 映射 $M_{2,p}:S(l_2)\to S(l_p)$, 我们有下述不等式.

引理 2.3 (1) 当 $1\le p<2$ 时,

$$\frac{1}{2}\|x-y\|_2^{\frac{2}{p}}\le\|M_{2,p}(x)-M_{2,p}(y)\|_p\le\frac{2}{p}\|x-y\|_2,\quad x,y\in S(l_2).$$

(2) 当 $2<p<\infty$ 时,

$$\frac{2}{p}\|x-y\|_2\le\|M_{2,p}(x)-M_{2,p}(y)\|_p\le 2\|x-y\|_2^{\frac{2}{p}},\quad x,y\in S(l_2).$$

证明 (1) 只需证明 $\frac{1}{2}\|x-y\|_2^{\frac{2}{p}}\le\|M_{2,p}(x)-M_{2,p}(y)\|_p$, 这等价于证明

$$\frac{1}{2^p}(a\pm 1)^2\le(a^{\frac{2}{p}}\pm 1)^p,\quad \forall a\ge 1.$$

可通过两边求导得到证明.

(2) 只需证明 $\|M_{2,p}(x)-M_{2,p}(y)\|_p\le 2\|x-y\|_2^{\frac{2}{p}}$, 这等价于证明

$$|a^{\frac{2}{p}}\pm 1|^p\le 2^p|a\pm 1|^2,\quad \forall a\ge 1.$$

所用方法与 (1) 类似.

引理 2.4 [10] 设 X 是度量空间, 则 X 可粗嵌入进 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 当且仅当对每个 $R>0$ 和 $\epsilon>0$, 都存在映射 $\varphi:X\to S(\mathscr{H})$, 满足

(i) $\sup\{\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_{\mathscr{H}}:x,y\in X,\ d(x,y)\le R\}\le\epsilon$;

(ii) $\lim_{S\to\infty}\inf\{\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_{\mathscr{H}}:x,y\in X,\ d(x,y)\ge S\}=2$.

利用上述两个引理我们可以证明如下结果.

定理 2.2 设度量空间 X 可粗嵌入进 l_2, 则对任意的 $2<p_0<\infty,X$ 可一致地粗嵌入进 $\{l_p,1\le p\le p_0\}$.

证明 由引理 2.4, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $\varphi_n:X\to S(l_2)$ 及 $S_n>0$, 使得当 $x,y\in X,\ d(x,y)\le n$ 时, 有

$$\|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\|_2\le 2^{-(n+1)};$$

当 $x,y\in X,\ d(x,y)\ge S_n$ 时, 有

$$\|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\|_2\ge 1.$$

不失一般性, 可设数列 $\{S_n\}$ 严格递增趋向于无穷大.

对每个 $1\le p\le p_0$, 记 $\varphi_{n,p}=M_{2,p}\circ\varphi_n:X\to S(l_p)$. 由引理 2.3 知:

(i) 当 $x,y\in X,d(x,y)\le n$ 时, 对 $1\le p\le 2$, 有

$$\|\varphi_{n,p}(x)-\varphi_{n,p}(y)\|_p\le\frac{2}{p}(2^{-(n+1)})\le 2^{-n};$$

对 $2\le p\le p_0$, 有

$$\|\varphi_{n,p}(x)-\varphi_{n,p}(y)\|_p\le 2(2^{-\frac{2(n+1)}{p}}).$$

(ii) 当 $x,y\in X,d(x,y)\ge S_n$ 时, 对 $1\le p\le 2$, 有

$$\|\varphi_{n,p}(x)-\varphi_{n,p}(y)\|_p\ge\frac{1}{2};$$

对 $2 \le p \le p_0$, 有

$$\|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(y)\|_p \ge \frac{2}{p_0}.$$

固定 $x_0 \in X$, 定义 $f_p : X \to (\sum l_p)_p$, 满足

$$f_p(x) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(x_0)), \quad x \in X.$$

容易看到

$$\|f_p(x)\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(x_0)\|_p^p < \infty.$$

因此 f_p 有意义. 下面证明 f_p 是粗嵌入. 设 $x, y \in X$, 对于 $1 \le p \le p_0$, 取 $k_p \in \mathbb{N}$, 使得 $(k_p - 1)^{\frac{1}{p}} \le d(x,y) < k_p^{\frac{1}{p}}$, 则当 $1 \le p \le 2$ 时,

$$\begin{aligned}\|f_p(x) - f_p(y)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{k_p-1} \|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(y)\|_p^p + \sum_{n=k_p}^{\infty} \|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(y)\|_p^p \\ &\le (k_p - 1)2^p + \sum_{n=k_p}^{\infty} 2^{-np} \le (k_p - 1)2^p + 1 \\ &\le 2^p d(x,y)^p + 1 \le (2d(x,y) + 2)^p;\end{aligned}$$

当 $2 \le p \le p_0$ 时,

$$\begin{aligned}\|f_p(x) - f_p(y)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{k_p-1} \|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(y)\|_p^p + \sum_{n=k_p}^{\infty} \|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(y)\|_p^p \\ &\le (k_p - 1)2^p + \sum_{n=k_p}^{\infty} 2^p 2^{-2(n+1)} \le k_p 2^p \\ &\le 2^p(d(x,y)^p + 1) \le (2d(x,y) + 2))^p,\end{aligned}$$

即对 $1 \le p \le p_0$, 有

$$\|f_p(x) - f_p(y)\|_p \le 2d(x,y) + 2.$$

另一方面, 取 $l \in \mathbb{N}$, 使得 $S_{l-1} \le d(x,y) < S_l$ (记 $S_0 = 0$), 则对 $1 \le p \le 2$, 有

$$\|f_p(x) - f_p(y)\|_p^p \ge \sum_{n=1}^{l-1} \|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(y)\|_p^p \ge (l-1)\left(\frac{1}{2}\right)^p,$$

即

$$\|f_p(x) - f_p(y)\|_p \ge \frac{1}{2}(l-1)^{\frac{1}{p}} \ge \frac{1}{p_0}(l-1)^{\frac{1}{p_0}}.$$

对 $2 \le p \le p_0$, 有

$$\|f_p(x) - f_p(y)\|_p^p \ge \sum_{n=1}^{l-1} \|\varphi_{n,p}(x) - \varphi_{n,p}(y)\|_p^p \ge (l-1)\left(\frac{2}{p_0}\right)^p,$$

即

$$\|f_p(x) - f_p(y)\|_p \ge (l-1)^{\frac{1}{p}} \frac{2}{p_0} \ge \frac{1}{p_0}(l-1)^{\frac{1}{p_0}}.$$

因此, 取

$$\rho_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_0}(n-1)^{\frac{1}{p_0}} \chi_{[S_{n-1}, S_n)}(t), \quad \rho_2(t) = 2(t+1),$$

则

$$\rho_1(d(x,y)) \le \|f_p(x) - f_p(y)\|_p \le \rho_2(d(x,y)), \quad \forall x, y \in X, \quad 1 \le p \le p_0.$$

显然 ρ_1, ρ_2 都是不减函数, $\lim_{t\to+\infty} \rho_1(t) = +\infty$, 并且 ρ_1, ρ_2 不依赖于 p, 所以 X 可一致地粗嵌入进 $\{l_p, 1 \le p \le p_0\}$.

由定理 2.1, 2.2 以及 Nowark [6,7] 的结果可以得到:

推论 2.1 设 X 是度量空间, 则以下论述等价:

(1) X 可粗嵌入进 l_2;

(2) 存在某个 $1 \le p < 2$ (等价于, 所有 $1 \le p < 2$), 使得 X 可粗嵌入进 l_p;

(3) 存在某个 $p_0 > 2$, 使得 X 可一致地粗嵌入进 $\{l_p, 2 < p \le p_0\}$;

(4) 对于任意的 $p_0 > 2, X$ 可一致地粗嵌入进 $\{l_p, 1 \le p \le p_0\}$.

以下是有待解决的问题.

问题 (1) 若 X 可粗嵌入进 l_2, 是否有 X 可一致地粗嵌入进 $\{l_p, 1 \le p \le \infty\}$?

(2) 若 X 可粗嵌入进每个 l_p $(p > 2)$, 是否意味着 X 可粗嵌入进 l_2?

致谢 作者感谢厦门大学泛函分析讨论班的老师和同学对上述研究领域的讨论和建议, 同时作者特别感谢程立新教授对这一研究领域的介绍和指导.

参考文献

[1] Gromov M., Asymptotic Invariants for Infinite Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Roe J., Lecture on Coarse Geometry, American Mathematical Society, USA, 2003.

[3] Skandalis G., Tu J. L., Yu G., Coarse Baum–Connes conjecture and groupoids, *Topology*, 2002, **41**: 807–834.

[4] Yu G., The oarse Baum–Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space, *Invent. Math.*, 2000, **139**: 201–240.

[5] Kasparov G., Yu G., The coarse geometric Novikov conjetcure and uniform convexity, *Adv. Math.*, 2006, **206**(1): 1–56.

[6] Nowark P., Coarse embeddings of metric spaces into Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2005, **133**: 2589–2596.

[7] Nowark P., On coarse embeddability into l_p-spaces and a conjecture of Dranishnikov, *Fund. Math.*, 2006, **189**(2): 111–116.

[8] Johnson W. B., Randrianarivony L., l_p $(p > 2)$ does not coarsely embed into a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2006, **134**(4): 1045–1050.

[9] Ball K., Isometric embedding in l_p-spaces, *Europ. J. Combinatorics*, 1990, **11**: 305–311.

[10] Dadarlat M., Guentner E., Constructions preserving Hilbert space uniform embeddability of discrete groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003, **355**: 3253–3275.

[11] Benyamini Y., Lindenstrauss J., Geometric Nonlinear Functional Analysis, Colloquium Publications Vol.48, American Mathematical Society, USA, 2000.