第 22 卷第 5 期
2010 年 5 月

计算机辅助设计与图形学学报
Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics

Vol. 22 No. 5
May 2010

平面三次混合双曲多项式曲线的特征图判别

魏永伟[1,2]，曹　娟[3]，汪国昭[1]

[1] (浙江大学数学系计算机图象图形研究所　杭州　310027)

[2] (上海海事大学应用数学系　上海　201306)

[3] (厦门大学数学科学学院　厦门　361005)

(ywwei @shmtu. edu. cn)

摘　要：根据文献[9](Wang G Z, Yang Q M. Planar cubic hybrid hyperbolic polynomial curve and its shape classification. Progress in Natural Science, 2004, 14(1): 41-46)中提出的 H-曲线带奇点或拐点的条件，利用 H-曲线奇点、拐点的仿射不变性，给出 H-曲线几何特征图的判别法，并找到了不同特征图在三维空间中的关系. 该判别法完善了 H-曲线的奇异点检测理论，提升了几何特征图维数.

关键词：平面三次混合双曲多项式曲线；H-曲线；H-Bézier 曲线；特征图；奇点；拐点

中图法分类号：TP391.72

On the Characterization Diagrams of Planar Cubic Hybrid Hyperbolic Polynomial Curve

Wei Yongwei[1,2], Cao Juan[3], and Wang Guozhao[1]

[1] (*Institute of Computer Graphics and Image Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

[2] (*Department of Applied Mathematics, Shanghai Maritime University, Shanghai* 201306)

[3] (*School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen* 361005)

Abstract: In this paper, we propose the geometric characterization diagrams of planar cubic H-curves based on the conditions of singularities for planar cubic H-curves presented by Reference (Wang G Z, Yang Q M. Planar cubic hybrid hyperbolic polynomial curve and its shape classification. Progress In Natural Science, 2004, 14(1): 41-46) Since inflection points and singularities (loops or cusps) of curves are affinely invariant, we find out the geometrically intuitive relationship of these different geometric characterization diagrams in a common 3-dimension characterization space. This approach completes the theory of detecting singularities of H-curves in the point of elevating geometric characterization diagrams dimension.

Key words: planar cubic hybrid hyperbolic polynomial curve; H-curve; H-Bézier curve; characterization diagram; singularity; inflection points

研究曲线的几何特征是 CAGD 中的一项重要工作，而曲线的形状是其重要几何特征之一，它包括曲线的弯曲、奇点和拐点等. 因此在实际研究中，我们往往需要检测一条曲线的环点、尖点以及拐点的分布情况. 广大学者已经从不同的角度对于这项工作进行了大量研究. 早在 1981 年，Wang[1] 就提出了使三次参数多项式曲线产生奇异点和拐点的条件；后来，Stone 等[2] 研究了三次多项式曲线的几何特征以及特征图之间的直接关系；Meek 等[3] 研究了均匀三次 B-样条曲线的形状判别情形. 对于三次

收稿日期：2009-05-05；修回日期：2009-10-22. 基金项目：国家自然科学基金(60773179，60970079，60933008). 魏永伟(1977—)，女，博士研究生，讲师，主要研究方向为 CAGD &CG；曹　娟(1983—)，女，博士，主要研究方向为 CAGD &CG；汪国昭(1944—)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为 CAGD &CG、医学图像三维重建等.

多项式曲线,当固定它的 3 个控制顶点后,曲线的形状完全由移动的那个控制顶点决定,并且这个移动的控制顶点使曲线产生尖点、环点、1 个拐点或 2 个拐点的轨迹把平面分成了不同的区域,称这个被分割了的平面为曲线的特征图. 移动不同的控制顶点得到的几何特征图也不同. 根据这些学者的研究结论,我们能得到一般的三次多项式曲线的几何特征图. 到了 20 世纪 90 年代,Manocha 等[4]及 Li 等[5]研究了任意次的多项式曲线和有理多项式曲线的奇异点分布情况;Sakai[6]则着重于三次有理曲线段的研究. 2001 年,Monterde[7]给出了一种控制 n 次有理 Bézier 曲线奇异点的方法. 2006 年,Juhász[8]则把问题推广到更一般的情况,他详细研究了所有能被基函数和任意维空间中控制顶点线性表示出来的曲线的奇异点及拐点情况,并且对三次 Bézier 曲线、三次有理 Bézier 曲线和 C-Bézier 曲线奇点分布情况进行比较. 特别地,他指出三次多项式曲线只有在它们是平面曲线时才可能有 1 个奇异点或者 1～2 个拐点. 由此,关于一般参数曲线的奇异点及拐点的分布已有了详尽的研究.

值得注意的是,还有一类参数曲线不容忽视,即 2004 年 Wang 等[9]定义的平面三次混合双曲多项式曲线,简称 H-曲线. H-曲线可以精确地表示双曲线、悬链线等曲线,基于这些优良性质使得它在实际应用中越来越受重视. 虽然 Wang 等已经推导出了导致平面三次 H-曲线出现拐点和奇异点的条件,但是关于 H-曲线的几何特征图研究仍然是一个尚未涉足的问题. 针对这一问题,本文详细研究了平面三次 H-曲线的几何特征图判别以及不同特征图之间的关系,并把传统的二维特征图提升到三维特征空间,对于任意一条三次 H-曲线,它的所有平面特征图均可以通过用适当的平面和三维特征空间相交得到.

1 平面三次 H-曲线及其形状分类

在文献[9]中,一段平面三次 H-曲线定义为

$$P(t) = P_0\sinh t + P_1\cosh t + P_2 t + P_3,\ 0 \le t \le \alpha;$$

其中 $\alpha > 0$, $P_i\ (i = 0,1,2,3)$ 为平面上的点向量.

为简便起见,引入下述记号

$$\begin{cases} A = \det(P_1, P_2) \\ B = \det(P_2, P_0) \\ C = \det(P_0, P_1) \end{cases} \qquad (1)$$

当 $A = B = C = 0$ 时, H-曲线是一条直线. 本文假设 $A^2 + B^2 + C^2 \ne 0$.

引理 1[9]. H-曲线带有一个拐点的充要条件是

$$(C - A)((B - A)e^{2\alpha} + 2Ce^{\alpha} - (B + A)) < 0;$$

带有 2 个拐点的充要条件是

$$B^2 + C^2 - A^2 > 0,$$

且

$$1 < \frac{C \pm \sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}{A - B} < e^{\alpha};$$

H-曲线最多有 1 个尖点,且带有尖点的充要条件是

$$B^2 + C^2 - A^2 = 0,$$

且

$$1 < \frac{C}{A - B} < e^{\alpha} \qquad (2)$$

H-曲线带有环点的充要条件是

$$\begin{cases} B^2 + C^2 - A^2 < 0 \\ \dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{|C|} \le \min\left\{ \dfrac{\sinh\left(\ln\sqrt{\dfrac{A+B}{A-B}}\right)}{\ln\sqrt{\dfrac{A+B}{A-B}}}, \dfrac{\sinh\left(\alpha - \ln\sqrt{\dfrac{A+B}{A-B}}\right)}{\alpha - \ln\sqrt{\dfrac{A+B}{A-B}}} \right\} \\ C(A + B) > 0 \\ B[(e^{2\alpha} - 1)A - (e^{2\alpha} + 1)B] > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

2 平面三次 H-曲线的几何特征图

固定平面三次 H-曲线的 3 个控制顶点,移动余下的 1 个控制顶点时,曲线是否出现奇异点或拐点则完全由移动的这个控制顶点决定. 使得 H-曲线产生尖点、环点、1 个或 2 个拐点的移动控制顶点的轨迹将平面分成若干区域,这个被分割了的平面称为 H-曲线的几何特征图. 另外, H-曲线是否带有奇异点或拐点是仿射不变的. 因此,不妨把固定的那 3 个控制顶点仿射变换到点(0,0),(0,1),(1,1)上,则曲线的形状完全由第 4 个控制顶点决定. 这个经仿射变换得到的曲线叫作标准 H-曲线. 本文把对原 H-曲线的特征图判别转化到对标准 H-曲线上进行. 如果控制顶点是共线的或重合的,即任意 3 个控制顶点都不能被仿射变换到(0,0),(0,1),(1,1),即这种退化情况将在本文最后讨论.

下面以 H-Bézier 曲线为例研究它的几何特征图,并讨论移动不同控制顶点时得到的几何特征图之间的关系.

2.1 H-Bézier 曲线的几何特征图

一条平面三次 H-Bézier 曲线定义[9]为

$$P(t) = H_0(t)q_0 + H_1(t)q_1 + H_2(t)q_2 + H_3(t)q_3 = \frac{1}{s-\alpha}(\sinh t\ \cosh t\ t\ 1) \times \begin{bmatrix} -c & M+c & -M-1 & 1 \\ s & -K-s & K & 0 \\ 1 & -M-1 & M+1 & -1 \\ -\alpha & s+K & -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

其中,$0 \le t \le \alpha, \alpha > 0, s = \sinh\alpha, c = \cosh\alpha, K = \frac{s(s-\alpha)}{\alpha c+\alpha-2s}, M = \frac{(c+1)(s-\alpha)}{\alpha c+\alpha-2s}$; $H_i(t)\ (i = 0,1,2,3)$ 为三次 H-Bézier 曲线的基函数, $q_i\ (i = 0,1,2,3)$ 为控制顶点, $q_0q_1q_2q_3$ 为控制多变形.

将前 3 个控制顶点仿射变换到特定位置 $q_0 = (0,0)$, $q_1 = (0,1)$ 和 $q_2 = (1,1)$,并设 $q_3 = (x,y)$. 把 $q_i\ (i = 0,1,2,3)$ 代入 H-Bézier 曲线,可得到 H-曲线中 $P_i\ (i = 0,1,2,3)$ 的表达式. 进一步计算得式(1)中 A, B 和 C 的表达式分别为

$$A = \frac{1}{(s-\alpha)^2}(-sx - Ky + s(M+1)) \tag{4}$$

$$B = \frac{1}{(s-\alpha)^2}(-(c-1)x + (M+1)(c-1)) \tag{5}$$

$$C = \frac{1}{(s-\alpha)^2}(-sx - Ky + s(M+1) - K(c-1)) \tag{6}$$

从引理 1 知,当式(4) (5) (6)满足 $B^2 + C^2 - A^2 = 0$ 及式(2)时,H-曲线上有 1 个尖点. 将式(4) (5) (6)代入方程 $B^2 + C^2 - A^2 = 0$ 可得二次曲线,此时的二次曲线正好是一条抛物线

$$a_1x^2 + b_1x + c_1y + d_1 = 0;$$

其中, $a_1 = (c-1)^2$, $b_1 = 2(c-1)(Ks - (M+1)(c-1))$, $c_1 = 2K^2(c-1)$, $d_1 = (M+1)^2(c-1)^2 - 2K(c-1)s(M+1) + K^2(c-1)^2$.

注意,由于移动不同的控制顶点时 $q_i\ (i = 0,1,2,3)$ 的取值不同,由式(1)知, A, B, C 的表达式也不同. 因此将式(4) (5) (6)代入方程 $B^2 + C^2 - A^2 = 0$ 后表示的二次曲线也不同.

类似地,将式(4) (5) (6)代入不等式(2)中,可得到一个边界由方程 $C - A + B = 0$, $C - (A - B)e^{\alpha} = 0$ 及 $A - B = 0$ 所确定的区域. 由引理 1 知,当 q_3 位于这个区域内且同时在抛物线上时,这条标准 H-曲线上有 1 个尖点. 采用同样的方法计算,可得到那些能使曲线带有环点、1 个或 2 个拐点的第 4 个控制顶点的移动区域. 这些不同的区域就组成了移动 q_3 时标准 H-Bézier 曲线的几何特征图,由仿射不变性知,这也是一般 H-Bézier 曲线的几何特征图. 本文省略了中间的计算过程,直接将结果显示在图 1 中,这一结果与三次 Bézier 曲线及三次 C-Bézier 曲线的结果类似.

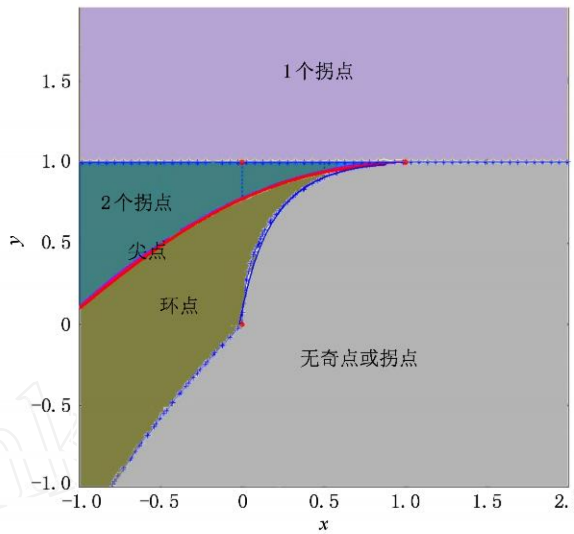

图 1　移动 q_3 时平面三次 H-Bézier 曲线的特征图(α = 1.5)

同理,可以得到移动其他任何一个控制顶点时,对应的 H-Bézier 曲线的特征图. 图 2 所示为只移动 q_1 时, H-Bézier 曲线的特征图.

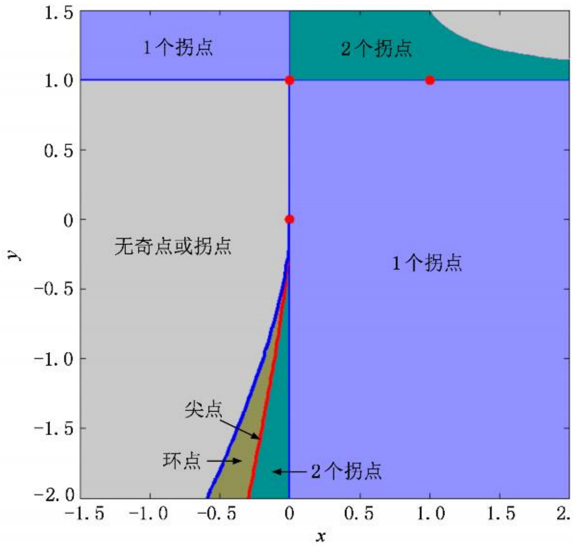

图 2　移动 q_1 时平面三次 H-Bézier 曲线的特征图(α = 1.5)

此外,其他标准 H-曲线,如标准 HB-样条和 H-Ferguson 曲线的几何特征图可以类似地得到.

2.2　H-曲线所有几何特征图的三维关系

在第 2.1 节中得到的这些几何特征图都是平面图,从二维角度来看它们之间没有直接的联系. 下面将这些几何特征图提升到三维空间中,并在三维空间中找出它们的联系.

由引理 1 知,曲线的奇异点和拐点分布完全是由 A, B, 和 C 决定,因此本文将每条平面 H-曲线和三维空间中的点 (A, B, C) 对应起来. 当 H-曲线有尖点时, A, B 和 C 应满足 $B^2 + C^2 - A^2 = 0$ 以及

不等式(2). 从几何直观角度来看,则必须是那个移动的控制顶点位于由式(5)确定的三维立体内,且同时位于 $B^2 + C^2 - A^2 = 0$ 确定的二次曲线上. 类似地,当移动的控制顶点位于式(3)定义的三维体内时,曲线上有一个环点. 这个体的边界的隐式方程可以通过将式(3)中的不等号改为等号而得到. 特别地,当移动的控制顶点位于控制曲面

$$\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{|C|} = \min\left\{\frac{\sinh\left(\ln\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}\right)}{\ln\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}}, \frac{\sinh\left(\alpha - \ln\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}\right)}{\alpha - \ln\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}}\right\}$$

上时,这条曲线在 $t = 0$ 和 $t = \alpha$ 时自交. 采用类似的方法,那些使得曲线产生 1 个拐点或 2 个拐点的体的边界可以通过计算得到,我们将这些体的边界叫作特征曲面. 换言之,三维空间可以被这些特征曲面分割成不同的区域,分别对应于当移动点都在这些区域时,曲线产生尖点、环点、1 个或 2 个拐点或无以上任何点产生,这个被分割成不同区域的三维空间称为特征空间. 注意,图 1 可以看作是用某个平面去截取这个特征空间而得到的. 详细地,式(4)(5)(6)说明当控制顶点 p_3 移动时,(A, B, C) 将描绘出特征空间中的一个平面,其参数表达形式为

$$(A, B, C) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}(-sx - Ky + s(M+1), -(c-1)x + (M+1)(c-1), -sx - Ky + s(M+1) - K(c-1)).$$

也就是说,图 1 所示特征图实际上是由隐式表达式为

$$A - C = \frac{K(c-1)}{(s-\alpha)^2}$$

的平面与特征空间相交而得到的.

从几何直观上看,图 1,2 可以被看作是由不同的截取平面去截取特征空间而得到的. 当固定 p_0, p_2, p_3 而移动 p_1 时,即图 2 的截取平面的参数表达式为

$$\begin{cases} A = \frac{1}{(s-\alpha)^2}[(K - Ms)x - (K+s)y + K] \\ B = \frac{1}{(s-\alpha)^2}[M(1-c)x + (1-c)y] \\ C = \frac{1}{(s-\alpha)^2}[(cK - sM)x - (K+s)y + K] \end{cases},$$

其隐式表达式为

$$M(A - C) + KB = \frac{K(c-1)y}{(s-\alpha)^2}.$$

即移动 p_1 而固定其他控制顶点,相应的特征图可以用该平面去截取特征空间而得到. 图 3 所示为移动第 3 个控制顶点时,带有尖点的 H-Bezier 曲线对应的特征图是由 3 张特征曲面被截取平面所截得到的特征图,即用恰当的截取平面去截取特征空间,且这个截取平面的参数方程由 (A, B, C) 定义. 由式(2)知,所有 H-曲线对应的 A, B 和 C 都具有以下形式

$$\det(P_j, P_k) = \det\left(\sum_m a_{jm} q_m, \sum_n b_{nk} q_n\right) = \sum_m \sum_n a_{jm} b_{nk} \det(q_m, q_n);$$

其中,j, k 为式(1)中 A, B, C 分别对应的控制顶点的下标值,系数为仿射变换矩阵的元素或者是 H-Bézier 基函数变换到 $\{\sinh t, \cosh t, t, 1\}$ 的矩阵的元素.

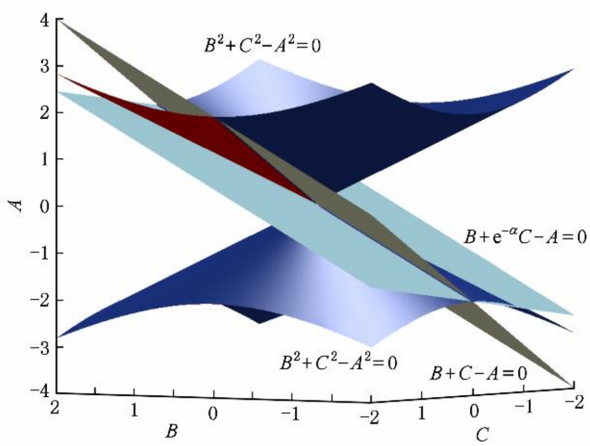

图 3 移动 q_2 时带有尖点的 H-Bézier 曲线对应的三维特征空间

总的来说,给定 H-曲线的区间上界 α(α也是形状参数)时,通过以下步骤可得到该曲线的几何特征图:

Step1. 根据引理 1 中给出的曲线带有 1 个拐点、2 个拐点、尖点及环点的充要条件分别计算出三维空间中的特征曲面,三维空间被这些特征曲面划分成了特征空间.

Step2. 根据式(1)计算出 A, B, C,并把 (A, B, C) 对应成特征空间中的一个点.

Step3. 用 A, B, C 确定的平面去截取 Step1 得到的特征空间,从而得到该曲线的几何特征图.

3 退化情形

如果所有控制顶点共线或其中几个控制顶点重合,则任意 3 个控制顶点不能被仿射变换到标准形式,因此曲线的奇异点分布情况不能用上述的几何特征图方法来分析. 下面分情况进行讨论:

1) 当所有控制顶点共线但都不重合时,曲线是

一条直线. 如果 4 个控制顶点不是按照它们的下标次序沿着直线排列的,则直线上就会产生重叠.

2) 只有 2 个控制顶点重合时. 若 $p_1 = p_2$,曲线两端各产生 1 个拐点; 若 $p_0 = p_1$ (或 $p_2 = p_3$),曲线在 p_0 (或 p_3)处有零切向量和零曲率.

3) 当 3 个控制顶点重合时. 若 $p_0 = p_1 = p_3$ (或 $p_0 = p_2 = p_3$),曲线退化为一条直线并且沿着直线 t 是非单调变化的; 若 $p_0 = p_1 = p_2$ (或 $p_1 = p_2 = p_3$) 时,曲线退化为一条直线且在 p_0 (或 p_3) 处有零切向量和零曲率.

4) 当 $p_0 = p_1$ 且 $p_2 = p_3$ 时,曲线是一条直线并且 t 沿着直线单调变化.

5) 当 4 个控制顶点都重合,即 $p_0 = p_1 = p_2 = p_3$ 时,曲线退化为一点.

4　结　　语

对于任意的可以用控制顶点和基函数表示的曲线,当仅移动 1 个控制顶点而固定其他控制顶点时,曲线的奇异点或拐点的情况完全由这个移动的控制顶点的位置决定. 本文把这一检测曲线几何特征的方法应用到 H-曲线上. 移动不同的控制顶点得到的几何特征图也不同,它们的关系在二维上来看是不明显的. 本文在 Juhász[8] 工作的基础上,进一步研究了这些几何特征图之间的关系,将它们统一提升到三维空间中,所有这些几何特征图都可以通过用恰当的截取平面去和公共的特征空间相交而得到. 这种特征图判别方法也适用于其他任意的可以用控制顶点和基函数表示的曲线,例如推广到陈文喻等[10] 定义的 PH-C 曲线上.

参考文献(References) :

[1] Wang C Y. Shape classification of the parametric cubic curve and parametric B-spline cubic curve [J]. Computer-Aided Design, 1981, 13(4): 199-206

[2] Stone M C, Parc X, DeRose T D. A geometric characterization of parametric cubic curves [J]. ACM Transactions on Graphics, 1989, 8(3): 147-163

[3] Meek D S, Walton D J. Shape determination of planar uniform cubic B-spline segments [J]. Computer-Aided Design, 1990, 22(7): 434-441

[4] Manocha D, Canny J F. Detecting cusps and inflection points in curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(1): 1-24

[5] Li Y M, Cripps R J. Identification of inflection points and cusps on rational curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(5): 491-497

[6] Sakai M. Inflection points and singularities on planar rational cubic curve segments [J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(3): 149-156

[7] Monterde J. Singularities of rational Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(8): 805-816

[8] Juhász I. On the singularity of a class of parametric curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(2): 146-156

[9] Wang G Z, Yang Q M. Planar cubic hybrid hyperbolic polynomial curve and its shape classification [J]. Progress in Natural Science, 2004, 14(1): 41-46

[10] Chen Wenyu, Cao Juan, Wang Guozhao. Pythagorean-Hodograph C-curve[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19(7): 822-827 (in Chinese)
(陈文喻, 曹　娟, 汪国昭. Pythagorean-Hodograph C-曲线[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(7): 822-827)