贵州科学 28(1): 12－15, 2010
Guizhou Science

抛物型方程的一个新的 GE－3并行算法

曹俊英[1,2] 田应福[1] 王自强[1]
([1]贵州民族学院 理学院, 贵阳 550025; [2]厦门大学 数学科学学院, 厦门 361005)

摘 要: 利用 Saul' yev 格式和它的对称格式及一个绝对稳定的隐格式, 构造了一个求解抛物型方程的分组显式 (GE–3) 并行算法, 该算法的截断误差为 $O(\tau+h^2)$, 条件稳定. 数值例子验证了理论分析的有效性。

关键词: 抛物型方程, 并行算法, 截断误差, 稳定性条件
中图分类号 O175.26 文献标识码 A 文章编号 1003－6563(2010)01－0012－04

A New GE–3 Parallel Algorithm for the Parabolic Equation

CAO Jun-ying TIAN Ying-fu WANG Zi-qiang
([1]College of Sciences, Guizhou College for Nationalities, Guiyang 550025, China; [2]School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract Using a scheme, its symmetric scheme and an implicit differencing scheme of absolute stability, we construct group explicit scheme (GE–3) parallel algorithm for solving parabolic equation. The truncation error of this algorithm is $O(\tau+h^2)$ with stability conditions. A numerical example shows that the schemes are effective.

Key words parabolic equation, parallel algorithm, order of truncation, stability condition

1 引言

通过对抛物型方程的研究, 我们知道, 对于显格式, 由于它具有天然的并行性, 因此可以作为并行格式来利用 (杨情民, 1981; 金承日, 1991; 胡健伟等, 1991); 对于半显格式, 它虽然不是显格式, 但是在实际计算过程中却是显式计算, 从而使计算量大为减少, 在并行算法的研究中有着重要的作用 (张莉等, 2004; 曹俊英, 2007); 对于隐格式, 由于用它来逼近抛物型方程时需要解一个大型的方程组, 如何来用隐格式来构造并行算法, 这是一个新的难题, 对于这方面的研究 (周顺兴, 1982; 刘庆富等, 2005)。较少本文用绝对稳定的 Saul' yev 格式及对称形式和一个 2层 6点绝对稳定的隐格式设计了一个分组显式 GE–3格式, 该格式, 截断误差为 $O(\tau+h^2)$, 稳定性条件为$\frac{1}{6}\leqslant r\leqslant\frac{5}{6}$。文中的数值例子验证了该并行格式理论分析的正确性。

2 差分格式的构造

考虑一维抛物型方程初边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\sigma\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0\leqslant x\leqslant L,\ t>0,\ \sigma>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant L\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t\geqslant 0\end{cases}\tag{1}$$

取时间步长为 τ, 空间步长为 $h=\frac{L}{M}$(M 为整数), 对区域$[0,L]\times[0,T]$做矩形剖分, 其中: $x_j=jh$, $t_n=$

收稿日期: 2008－04－05; 修回日期: 2009－05－26
基金项目: 贵州省科技厅资金项目 (黔科合 J字 [2008] 2122号) 资助。
作者简介: 曹俊英 (1981－), 女, 博士生, 讲师。研究方向: 微分方程数值解。E－mail caojunying1000@126.com

$n\tau$,并令 $[u]_j^n = u(x_j, t_n)$, u_j^n 是 $[u]_j^u$ 的近似值。

当问题(1)的解充分光滑时,有如下关系式成立:

$$\frac{\partial^{m-n} u}{\partial x^m \partial t^n} = \sigma^n \frac{\partial^{m+2n} u}{\partial x^{m+2n}} \tag{2}$$

其中 m、n 为非负整数. 利用 $r = \frac{\sigma\tau}{h^2}$, 由文(张宝琳等, 1999), 得 Saul'yev 格式为:

$$(1+r)u_j^{n+1} - ru_{j+1}^{n+1} = (1-r)u_j^n + ru_{j-1}^n \tag{3}$$

该格式绝对稳定,精度为 $O(\tau/h + \tau + h^2)$.

根据对称性可得其对称格式为:

$$(1+r)u_j^{n+1} - ru_{j-1}^{n+1} = (1-r)u_j^n + ru_{j+1}^n \tag{4}$$

(4)的精度和稳定性条件同(3).

利用文(张天德, 2000)构造二层6点的隐格式为:

$$(1-6r)u_{j-1}^{n+1} + (10+12r)u_j^{n+1} + (1-6r)u_{j+1}^{n+1} = (1+6r)u_{j-1}^n + (10-12r)u_j^n + (1+6r)u_{j+1}^n \tag{5}$$

该格式绝对稳定,精度为 $O(\tau + h^2)$.

3 GE-3格式的构造

利用格式(3), (4), (5)设计格式:

$$\begin{cases} -ru_j^{n+1} + (1+r)u_{j-1}^{n+1} = (1-r)u_{j-1}^n + ru_{j-2}^n \\ (1-6r)u_{j-1}^{n+1} + (10+12r)u_j^{n+1} + (1-6r)u_{j+1}^{n+1} \\ \quad = (1+6r)u_{j-1}^h + (10-12r)u_j^n + (1+6r)u_{j+1}^n \\ (1+r)u_{j+1}^{n+1} - ru_j^{n+1} = (1-r)u_{j+1}^n + ru_{j+2}^n \end{cases} \tag{6}$$

即:

$$\begin{pmatrix} 1+r & -r & \\ 1-6r & 10+12r & 1-6r \\ & -r & 1+r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1}^{n+1} \\ u_j^{n+1} \\ u_{j+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & & \\ 1+6r & 10-12r & 1+6r \\ & & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1}^n \\ u_j^n \\ u_{j+1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ru_{j-2}^n \\ 0 \\ ru_{j+2}^n \end{pmatrix}$$

数值 u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1} 可由第 n 层的5个点的函数值 u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n, 显式计算:

$$(*)\begin{cases} u_{j-1}^{n+1} = \frac{1}{e}(cu_{j-2}^n + du_{j-1}^n + bru_j^n + 14r^2 u_{j+1}^n \\ \quad + aru_{j+2}^n & (7) \\ u_j^{n+1} = \frac{1}{f}(au_{j-2}^n + 14ru_{j-1}^n + bu_j^n + 14ru_{j+1}^n \\ \quad + au_{j+2}^n & (8) \\ u_{j+1}^{n+1} = \frac{1}{e}(aru_{j-2}^n + 14r^2 u_{j-1}^n + bru_j^n + du_{j+1}^n \\ \quad + cu_{j+2}^n & (9) \end{cases}$$

其中:

$a = -r(1-6r)$; $b = (10-12r)(1+r)$;
$c = r(10+23r+6r^2)$; $d = 10+14r-10r^2$;
$e = (24r+10)(1+r)$; $f = 24r+10$

用图示表示为:

	*	*	*		$n+1$
*	*	*	*	*	n
$j-1$	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$	

经过计算,不难得到差分方程(7), (8), (9), 分别在 $(j, n-1)$, (j, n), $(j, n+1)$ 处的截断误差 E_1, E_2, E_3 分别如下:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{-72r^3 + 18r^2 + 11r + 5}{6(24r+10)(1+r)} rh^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{j-1}^n \\ \quad + O(\tau^\alpha h^{\beta-2}) \\ E_2 = \frac{-72r^2 + 18r - 1}{12(12r+5)} rh^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_j^n + O(\tau^\alpha h^{\beta-2}) \\ E_3 = \frac{-72r^3 + 18r^2 + 11r + 5}{6(24r+10)(1+r)} rh^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{j+1}^n \\ \quad + O(\tau^\alpha h^{\beta-2}) \end{cases}$$

其中: $\alpha + \beta = 5$, $\beta > 2$, 因此, (*)的截断误差为 $O(\tau + h^2)$.

4 稳定性分析:

为了方便起见,令:

$a_1 = 1+r$, $a_2 = -r$, $a_3 = 1-6r$, $a_4 = 10+12r$
$a_5 = 1-r$, $a_6 = 1+6r$, $a_7 = 10-12r$, $a_8 = r$

则(6)对应的矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & & & & \\ a_3 & a_4 & a_5 & & & & \\ & a_2 & a_1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & a_1 & a_2 & \\ & & & & a_3 & a_4 & a_3 \\ & & & & & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ M \\ M \\ u_{m-2}^{n+1} \\ u_{m-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_5 & & & & & & & & & & & & \\ a_6 & a_7 & a_6 & & & & & & & & & & \\ & & a_5 & a_8 & & & & & & & & & \\ & & a_8 & a_5 & & & & & & & & & \\ & & & a_6 & a_7 & a_6 & & & & & & & \\ & & & & & a_5 & a_8 & & & & & & \\ & & & & & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & a_8 & a_5 & & & & \\ & & & & & & & & a_6 & a_7 & a_6 & & \\ & & & & & & & & & a_5 & a_8 & & \\ & & & & & & & & & & a_8 & a_5 & \\ & & & & & & & & & & a_6 & a_7 & a_6 \\ & & & & & & & & & & & & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ M \\ M \\ M \\ M \\ M \\ M \\ M \\ u_{m-2}^n \\ u_{m-1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ru_0^n \\ 0 \\ M \\ M \\ M \\ M \\ M \\ M \\ M \\ 0 \\ ru_m^n \end{pmatrix}$$

即为 $MU^{n+1} = NU^n + b$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 其中 $U^n = [u_1^n, u_2^n, L, u_{m-1}^n]^T$.

利用胡家赣引理 (胡家赣, 1984), M 当严格对角占优, 即:

$$\begin{cases} |a_1| > |a_2| \\ |a_4| > 3|a_3| \end{cases},$$

即, $\begin{cases} |1 + r| > |r| \\ |10 + 12r| > 2|1 - 6r|, \end{cases}$

亦即 $r > \frac{1}{6}$ 时, 有:

$$\|M^{-1}N\|_\infty \le \max\left\{ \frac{\sum_j^m |n_{ij}|}{|m_{ij}| - \sum_{j \ne i} |m_{i,j}|} \right\}$$

$$= \max_i\left\{ \frac{|a_5|}{|a_1| - |a_2|}, \frac{|a_7| + 2|a_6|}{|a_4| - 2|a_3|}, \frac{|a_5| + |a_8|}{|a_1| - |a_2|} \right\}$$

$$= \max_i\left\{ \frac{|a_7| + 2|a_6|}{|a_4| - 2|a_3|}, \frac{|a_5| + |a_8|}{|a_1| - |a_2|} \right\}$$

$$= \max_i\left\{ \frac{|10 - 12r| + 2|1 + 6r|}{|10 + 12r| + 2|1 - 6r|}, \frac{|1 - r| + |r|}{|1 + r| - |r|} \right\} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |10 - 12r| + 2|1 + 6r| \\ -|10 + 12r| + 2|1 - 6r| \le 1 & (10) \\ |1 - r| + |r| - |1 + r| + |r| \le 1 & (11) \end{cases}$$

对于 (10) 分以下 3种情况进行讨论:

¹ $0 < r \le \frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{6} < r < \frac{1}{6}$ ㈣ $r > \frac{5}{6}$

综合 ¹ – ㈣, 我们得到满足 (10) 的 r 为: $\frac{1}{6} < r \le \frac{5}{6}$. 对于 (11), 满足 (11) 的 r 为: $r \le 1$.

综合 (10), (11) 和 $r > \frac{1}{6}$, 得 $\frac{1}{6} < r \le \frac{5}{6}$. 即:

$$\|M^{-1}N\|_\infty \le 1 \Rightarrow \frac{1}{6} < r \le \frac{5}{6}.$$

此时, 截断误差为 $O(\tau + h^2)$.

5 数值例子

对初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 \le x \le \pi, \ t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

已知其精确解为: $u(x, t) = e^{-1}\sin x$, 我们利用格式 GE – 3得到如下结果, 表中的值是在节点 $(jh, n\tau)$ 处的误差值, 其中

$$h = \frac{\pi}{300}.$$

表 1 GE - 3格式

Tab 1 GE - 3 scheme

	$j=60$	$j=120$	$j=180$	$j=240$
$r=1/3, n=100$	1.149455e-007	6.038621e-008	-1.709060e-008	-8.808126e-008
$r=1/3, n=2\,000$	3.224789e-007	4.250280e-007	3.539764e-007	1.369332e-007
$r=1/3, n=20\,000$	1.244278e-006	1.999406e-006	1.968712e-006	1.163755e-006
$r=5/6, n=100$	2.850854e-007	1.489892e-007	-4.365177e-008	-2.197270e-007
$r=5/6, n=2\,000$	6.634148e-007	9.404355e-007	7.815480e-007	2.481352e-007
$r=5/6, n=20\,000$	1.004753e-006	1.614107e-006	1.588066e-006	9.364358e-007

数值例子验证了理论分析的结果.

[REFERENCES]

Cao JY, 2007. A New Parallel Algorithm for the Parabolic Equation [J]. *Guizhou Science*, 25(2): 27-33 (in chinese).

Hu JW, Tang HM, 1991. Numerical Methods of Differential Equations[M]. Science Press, Beijing: 167-173 (in chinese).

Hu JG, 1984. The estimates of and the optimally scaled matrix [J]. Journal of Computational Mathematics, 2: 122-129 (in chinese).

Jin CR, 1991. High Accuracy Explicit Difference Schemes for Solving the Parabolic Equation[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, (1): 38-44 (in chinese).

Liu QF, Zhong WJ, 2005. Parallel Algorithms of Accelerative Iteration for Solving Implicit Difference Equations [J]. *Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 27(3): 258-266 (in chinese).

Li GY, Sui J, 1989. A Parallel Numerical Solution for the Parabolic Equations[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis*, 9(3): 9-18 (in chinese).

Wu HM, 1982. An Elementary Proof of Schur-Cohn theorem and Miller Theorem for Quadratic polynomial's Root[J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, (1): 63-64 (in chinese).

Zhang L, Zhang DK, 2004. Combinatorial Difference Quotient Method for Solving Parabolic Equation [J]. *Journal of Guizhou University (Natural Science)*, 21(4): 349-353 (in chinese).

Zhang BL, Gu TX, Mo ZY, 1999. Principle and Method of Numerical Parallel Computation [M]. National Defense Industry Press, Beijing: 189-204 (in chinese).

Zhang TD, 2000. On the Difference Schemes of U_t= aU_(xx) [J]. *Journal of Shandong University of Technology*, 30(2): 172-177 (in chinese).

Zhang BL, 1992. Initial Boundary Value Problem of Solving Parallel Finite Difference Method[J]. *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 6(1): 53-65 (in chinese).

Zhou SX, 1982. High Accuracy Difference Schemes for Solving the Partially Differentiate Equation[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, (2): 204-213 (in chinese).

[附中文参考文献]

曹俊英, 2007. 抛物型方程的一个新的并行算法 [J]. 贵州科学, 25(2): 27-33.

胡健伟, 汤怀民, 1991. 微分方程数值方法 [M]. 北京: 科学出版社 1: 167-173.

胡家赣, 1984. $\| M^{-1}N \|$ 的估计和最优尺度矩阵 [J]. 计算数学(外文版), 2: 122-129.

金承日, 1991. 解抛物型方程的高精度显式差分格式 [J]. 计算数学, (1): 38-44.

刘庆富, 仲伟俊, 2005. 求解隐式差分方程的加速迭代并行算法 [J]. 高等学校计算数学学报, 27(3): 258-266.

黎光禹, 眭洁, 1989. 抛物型方程的一种并行数值解法 [J]. 南开大学学报(自然科学), 9(3): 9-18.

张莉, 张大凯, 2004. 解抛物型方程组合差商法 [J]. 贵州大学学报(自然科学版), 21(4): 349-353.

周顺兴, 1982. 解抛物型偏微分方程的高精度差分格式 [J]. 计算数学, (2): 204-213.

张宝琳, 谷同祥, 莫则尧, 1999. 数值并行计算原理与方法 [M]. 北京: 国防工业出版社: 189-204.

张天德, 2000. 关于解 U_t= aU_(xx)的差分格式 [J]. 山东工业大学学报, 30(2): 172-177.

张宝琳, 1992. 并行求解初边值问题的有限差分方法研究 [J]. 应用数学与计算数学学报, 6(1): 53-65.

邬华谟, 1982. 二次多项式根的 Schur-Cohn定理和 Miller定理的初等证明 [J]. 数值计算与计算机应用, (1): 63-64.