中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 8 期: 963～976
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE IN CHINA PRESS

关于多复变数的积分变换公式及其应用

黄玉笙①*, 林良裕②

① 莆田学院数学系, 莆田 351100
② 厦门大学数学学院, 厦门 361005
E-mail: hys3883636@163.com, lyulin@xmu.edu.cn

收稿日期: 2008-07-22; 接受日期: 2009-02-18; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10771174) 和福建省自然科学基金 (批准号: S0850026) 资助项目

摘要 利用整体分析方法, 给出了一个多复变数的整体积分变换公式, 获得了 C^n 中一闭逐块光滑可定向流形上的 Bochner-Martinelli 型积分高阶偏导具有 Hadamard 主值的 Plemelj 公式和相应奇异积分的合成公式, 拓广的 Poincaré-Bertrand 公式. 作为应用, 我们还讨论了一类高阶 Cauchy 边值问题和一类多复变数线性高阶奇异微积分方程的正则化问题.

关键词 积分变换 Bochner-Martinelli 型积分 高阶偏导 Plemelj 公式 合成公式 Poincaré-Bertrand 公式 应用

MSC(2000) 主题分类 32A25, 32A40, 32C10, 32C58, 32F20

0 引言和定义

众所周知, 局部分析技巧和整体分析技巧是现代分析中最常用的有力工具 [1–9]. 但是, 有时局部分析的计算和估计过于复杂和困难, 尤其在讨论高阶边值问题和高阶微积分方程等方面更加困难, 甚至存在一些困惑. 为了排除这些困惑, 本文采用与文献 [10–12] 不同的方法, 利用整体分析的方法, 首先给出了一个新的多复变数的整体积分变换公式, 把具有任意高阶奇性的 Bochner-Martinelli 积分的偏导化为具有 Cauchy 主值的新型积分. 由此, 我们给出了一个多复变数的高阶奇异积分的 Hadamard 主值的新定义, 并获得了 C^n 中的一闭逐块光滑可定向流形的 Bochner-Martinelli 型积分高阶偏导化具有 Hadamard 主值的新的 Plemelj 公式和相应奇异积分的合成公式, Poincaré-Bertrand 拓广式. 作为应用, 我们还讨论了一类高阶 Cauchy 边值问题和一类高阶复线性变系数微分–积分方程的正则化问题, 获得了一些有趣的结果.

设 D 是 C^n 中的有界域, 其边界 ∂D 是一闭逐块 $C^{(m+2)}$ 光滑, $1 \leqslant m < +\infty$ 可定向流形 [6,11]. $D^{\pm}$ 分别表示域 D 的内部和外部. $L^*(\bar{D})$ 表示在 ∂D 上满足 Hölder 条件且可全纯开拓到 D 内的函数空间, L^* 表示相应的线性空间. n_ζ 表示点 $\zeta \in \partial D$ 的法线方向, $C_n = (n-1)!(2\pi i)^{-n}$, $B_\varepsilon(\zeta) = \{\xi : |\xi - \zeta| < \varepsilon\}$, $\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi) = \partial D \cap B_\varepsilon(\zeta)$, $\Sigma_\varepsilon(\zeta,\xi) = \partial D \backslash \sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)$,

引用格式: 黄玉笙, 林良裕. 关于多复变数的积分变换公式及其应用. 中国科学 A, 2009, 39(8): 963–976
Huang Y S, Lin L Y. On the integral transformation formula in several complex variables and its applications. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0182-8

$C^{(m+\alpha)}(\partial D)$ 表示在 ∂D 上为 $C^{(m)}$ 类, 且其所有各阶偏导都满足指数为 α, $0<\alpha\leqslant 1$, 的 Hölder 连续可微的函数空间. 对 $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$, 我们可定义 Bochner-Martinelli 型积分

$$\Phi(z)=\int_{\partial D}\varphi(\xi)K(z,\xi),\quad z\notin\partial D, \tag{0.1}$$

其中

$$K(z,\xi)=C_n\sum_{j=1}^{n}(-1)^{(j-1)}(\bar{\xi}_j-\bar{z}_j)|\xi-z|^{-2n}d\bar{\xi}_{[j]}\wedge d\xi=\sum_{j=1}^{n}K_j(z,\xi),$$

是 Bochner-Martinelli 核. 核的分量

$$K_j(z,\xi)=(-1)^{j-1}C_n(\bar{\xi}_j-\bar{z}_j)|\xi-z|^{-2n}d\bar{\xi}_{[j]}\wedge d\xi, \tag{0.2}$$

当 $\zeta\in\partial D$ 时, $\Phi(\zeta)$ 是具 $2n-1$ 阶奇性的奇异积分, 其 Cauchy 主值 [1, 5]

$$\mathrm{VP}\int_{\partial D}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sum_\varepsilon(\zeta,\xi)}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi) \tag{0.3}$$

存在, 并定义点 $\zeta\in\partial D$ 的立体角系数 [3,5] 如下:

$$\begin{aligned}&\alpha(\zeta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{vol}\ \partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D/\mathrm{vol}\ \partial B_\varepsilon(\zeta),\\ &\mathrm{VP}\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)=\alpha(\zeta),\end{aligned} \tag{0.4}$$

这里我们可假设 [5] $0<\alpha(\zeta)<1$, 即 ∂D 上无尖点情形 (如文献 [5,6,7,11] 等定义的 ∂D), 并且有 Plemelj-Sochotsky 公式 [5]

$$\Phi^{+}(\zeta)=\mathrm{VP}\int_{\partial D}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi)+(1-\alpha(\zeta)\varphi(\zeta)), \tag{0.5}$$

$$\Phi^{-}(\zeta)=\mathrm{VP}\int_{\partial D}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi)-\alpha(\zeta)\phi(\zeta). \tag{0.6}$$

Poincaré-Bertrand 公式 [7] 设 $\varphi\in H(\alpha,\partial D\times\partial D), 0<\alpha\leqslant 1$, 则

$$\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}\varphi(\eta,\xi)K(\xi,\eta)=\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi}\varphi(\eta,\xi)K(\xi,\eta)K(\zeta,\xi)+\frac{\alpha(\zeta)}{2}\varphi(\zeta,\xi), \tag{0.7}$$

当 $n=1$ 时, ∂D 为复平面中逐段光滑曲线时, 这就是复变函数论中著名的 Poincaré-Bertrand 公式 (参见文献 [13]). 记号 $\lambda(\xi)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 表示点 $\xi\in\partial D$ 的单位复方向余弦, $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2=1$. dS_ξ 表示关于 ∂D 积分变元 ξ 的面积元素, $(-1)^{j-1}d\bar{\xi}_{[j]}\wedge d\xi=\lambda_j(\xi)ds_\xi$. 我们定义 ∂D 上的微分算子

$$L_k=\frac{\partial}{\partial\xi_k}+\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_j},\qquad L_k^m=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_k}+\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_j}\right)^m, \tag{0.8}$$

并约定 $L_k^0=I$ (单位算子). $L_k^m|_{j=1}\varphi(\zeta)=\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_k}+\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^m\varphi(\zeta)$.

定义 0.1 设域 D 的边界 ∂D 是一闭逐块 $C^{(m+2)}$ 光滑可定向流形 [5,6,10,11], $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$, 我们可定义 Bochner-Martinelli 型积分 $\Phi(z)$ 关于 z_k 的 m 阶偏导

$$\Psi(z)=\frac{\partial^m\Phi(z)}{\partial z_k^m}=\int_{\partial D_\xi}\varphi(\xi)\frac{\partial^m K(z,\xi)}{\partial z_k^m},\quad z\notin\partial D. \tag{0.9}$$

易知 $\Psi(z)$ 仍是 $C^n\backslash\partial D$ 中 $D^{\pm}$ 上分片复调和函数. 当 $\zeta\in\partial D, m>1$ 时,

$$\Psi(\zeta)=\int_{\partial D_{\xi}}\varphi(\xi)\frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}K(\zeta,\xi)$$

是具有 $2n+m-1$ 阶的高阶奇异积分. 这时, 我们用有限部分 "FP" 表示其 Hadamard 主值.

定义 0.2 设 $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D), 0<\alpha\leqslant 1, \zeta\in\partial D$, 则我们定义 $\Phi(\zeta)$ 的 Hadamard 主值

$$\mathrm{FP}\Phi(\zeta)=\mathrm{VP}\int_{\partial D_{\xi}}\sum_{j=1}^{n}L_k^m\varphi(\xi)K_j(\zeta,\xi). \tag{0.10}$$

1 主要定理

本文的主要结果是

定理 1.1 设 ∂D 是一闭逐块 $C^{(m+2)}$ 光滑可定向流形 [11], $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$, $1\leqslant m<+\infty, 0<\alpha\leqslant 1, z\notin\partial D$ 对 (0.9) 式定义的 Bochner-Martinelli 型积分 $\Phi(z)$ 的高阶偏导 $\Psi(z)$, 我们有积分变换

$$\Psi(z)=\int_{\partial D_{\xi}}\sum_{j=1}^{m}L_k^m\varphi(\xi)K_j(z,\xi), \tag{1.1}$$

其中核分量 $K_j(z,\xi)$ 如 (0.2) 式所述.

定理 1.2 (Plemelj 公式) 在定理 1.1 假设下, 若 $z\in D^{\pm}$, 对 z 属于以 $\zeta\in\partial D$ 为定点的某一角形区域 [5] $G_{\zeta}=\{z\in D^{\pm}:0<|z-\zeta||\xi-z|^{-1}\leqslant m_0, |z-\zeta|<\delta, \delta>0$ 足够小, $m_0>0$ 为常数$\}$ 内沿任意非切线途径趋于点 ζ 时, 我们可以选择一适当的线性酉变换, 使得

$$\Psi^{\pm}(\zeta)=\lim_{z\to\zeta^{\pm}}\frac{\partial^m\Psi(z)}{\partial z_k^m}=\begin{cases}\mathrm{FP}\Phi(\zeta)+(1-\alpha(\zeta))L_k^m|_{j=1}\varphi(\zeta), & (1.2)\\ \mathrm{FP}\Psi(\zeta)-\alpha(\zeta)L_k^m|_{j=1}\varphi(\zeta). & (1.3)\end{cases}$$

其中, $L_k^m|_{j=1}=(\frac{\partial}{\partial\zeta_k}+\frac{\partial}{\partial\zeta_1})^m$, $\mathrm{FP}\Psi(\zeta)$ 如 (0.10) 式定义.

由定理 1.2 立得

推论 1.3(跳跃公式) 在定理 1.2 条件下, 我们有

$$\Psi^{+}(\zeta)-\Psi^{-}(\zeta)=L_k^m|_{j=1}\varphi(\zeta),\quad \zeta\in\partial D, \tag{1.4}$$

推论 1.4 在定理 1.2 条件下, 若 $\varphi\in L^{*}(\bar{D})$, 我们有

$$\Psi^{+}(\zeta)=\frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}\varphi(\zeta),\qquad \zeta\in\partial D, \tag{1.5}$$

$$\mathrm{FP}\Psi(\zeta)=\alpha(\zeta)\frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}\varphi(\zeta),\quad \zeta\in\partial D. \tag{1.6}$$

相反地, (全纯扩充定理) 若 $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)\cap C(\bar{D})$ 且 (1.6) 式成立, 则 $\varphi\in L^{*}(\bar{D})$.

定理 1.5 (合成公式) 若 $\varphi\in L^{*}(\bar{D}), \zeta\in\partial D$, 则

$$\mathrm{FP}\int_{\partial D_{\xi}}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_{\eta}}\varphi(\eta)\frac{\partial^m}{\partial\xi_k^m}K(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\alpha(\zeta)\frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}\varphi(\zeta). \tag{1.7}$$

注 1 对 $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$, 则 (1.7) 式不能成立.

注 2 若 $\varphi\in L^{*}(\bar{D})$, 我们可定义积分算子 K 和 $\tilde{K}$, $\alpha\neq 0,1$,

$$K\varphi := \frac{1}{\alpha(\zeta)}\int_{\partial D_\xi}\varphi(\xi)K(\zeta,\xi),$$
$$\tilde{K}\varphi := \frac{1}{\alpha(\xi)}\int_{\partial D_\eta}\varphi(\eta)\frac{\partial^m}{\partial\xi_k^m}K(\xi,\eta) = \frac{1}{\alpha(\xi)}\int_{\partial S_\eta}\frac{\partial^m\varphi(\eta)}{\partial\eta_k^m}K(\xi,\eta),$$

则

$$K^2\varphi = \varphi, \tag{1.8}$$
$$(K\circ\tilde{K})\varphi = \frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}\varphi(\zeta). \tag{1.9}$$

定理 1.6 (Poincaré-Bertrand 拓广式) 设 $\varphi \in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$, $1 \leqslant m < +\infty$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\zeta,\xi,\eta \in \partial D$, 若选择一适当的线性酉变换, 则我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{FP}\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}\varphi(\eta,\xi)\frac{\partial^m}{\partial\xi_k^m}K(\xi,\eta) =& \mathrm{FP}\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi}\sum_{j=1}^{n}L_{k_1}^m\varphi(\eta,\xi)K_j(\xi,\eta)K(\zeta,\xi)\\ &+\frac{1}{2}\alpha(\zeta)L_{k_1}^m|_{j=1}\varphi(\zeta,\zeta),\end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $L_{k_1}^m|_{j=1}\varphi(\zeta,\zeta) = (\frac{\partial}{\partial\eta_k}+\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_1})^m\varphi(\eta,\zeta)|_{\eta=\zeta}$, (1.10) 式右边第一项的内层积分的 Hadamard 主值

$$\mathrm{FP}\int_{\partial D_\xi} = \mathrm{VP}\int_{\partial D_\xi} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{\sum_{\varepsilon_1}(\zeta,\xi)\cap\sum_{\varepsilon_2}(\eta,\xi)}\sum_{j=1}^{n}L_{k_1}^m\varphi(\eta,\xi)K_j(\xi,\eta)K(\zeta,\xi), \tag{1.11}$$

其余各层积分的 Hadamard 主值如 (0.10) 式.

注 3 当 $m=0$ 时, (1.10) 式即文献 [7] 定理 1.1 和文献 [15] 定理 2.8 的结果, 不过文献 [7] 中 (6) 式中的 $\varphi(\zeta,\zeta)$ 的系数应为 $\frac{1}{2}\alpha(\zeta)$, 文献 [15](2.12) 式中 $f(z,z)$ 的系数应为 $\frac{1}{2}\tau(z)$, 他们均为计算积分时出现失误.

注 4 当 $m=0, n=1$ 时, (1.10) 式即单复变函数论中著名的 Poincaré-Bertrand 公式.

命题 设 l 为复平面中一闭逐段 $c^{(1)}$ 光滑曲线, 则

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int_{l_\xi}\frac{1}{\xi-\zeta}d\xi\int_{l_\eta}\frac{\varphi(\eta,\xi)}{\eta-\xi}d\eta = \frac{1}{(\pi i)^2}\int_{l_\eta}d\eta\int_{l_\xi}\varphi(\eta,\xi)\frac{1}{(\xi-\zeta)(\eta-\xi)}d\xi + \frac{\alpha(\zeta)}{2}\varphi(\zeta,\zeta), \tag{1.12}$$

其中 $\alpha(\zeta)$ 为点 $\zeta\in l$ 的立体角系数, 当 ζ 为 l 上光滑点时 $\alpha(\zeta)=\frac{1}{2}$.

定理 1.7 设 $f\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$ 为已知函数, $1\leqslant m<+\infty, 0<\alpha\leqslant 1$, 则在复调和函数空间中解满足条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的 Cauchy 边值问题

$$\Psi^+(\zeta) = \Psi^-(\zeta) + f(\zeta), \quad \zeta\in\partial D, \tag{1.13}$$

能转化为解一等价的复高阶偏微分方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_k}+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_1}\right)^m\varphi(\zeta) = f(\zeta). \tag{1.14}$$

当给出一组适当的边界条件时, 方程 (1.14) 存在唯一解 $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$, 使得以 φ 为密度函数的 Bochner-Martinelli 型积分 $\Phi(z)$ 的 m 阶偏导 $\Psi(z)$ 是分别在 $D^{\pm}$ 中定义的分片复调和函数满足边值问题 (1.13) 式和条件 $\Psi^-(\infty)=0$ 的唯一解.

注 5 当 $m=1$ 时, 文献 [8] 给出了一组边界条件并得到解 φ 的表达式. 因此, 本文包含文献 [8] 的结果.

定理 1.8 设 $a,b,f\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)$ 是已知函数, $1\leqslant m<+\infty, 0<\alpha\leqslant 1$, 且在 ∂D 上满足条件 $a^2-b^2\neq 0, \lambda\neq 0$ 为常数, 则变系数复线性高阶奇异微分–积分方程

$$S\varphi:=a\varphi+\lambda a\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}L_k^m\varphi+bK\varphi+\lambda b\tilde{K}\varphi+L\varphi=f, \tag{1.15}$$

能转化为一 Fredholm 型复线性高阶微分–积分方程. 这里算子 L 为

$$L\varphi:=\int_{\partial D_\xi}\varphi(\xi)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}l_j(\zeta,\xi)|\xi-\zeta|^{-2n+1+r}d\bar{\xi}_{[j]}\wedge d\xi, \tag{1.16}$$

其中 $l_j\in C^{(m+\alpha)}(\partial D\times\partial D), 0<r<1, K$ 与 $\tilde{K}$ 如注 2 中所述.

定理 1.9 设 $a,b,f\in L^*(\bar{D})$, $l_j(\zeta,\xi)\in L^*(\bar{D}\times\bar{D})$ 是已知函数, 且在 ∂D 上满足 $a^2-b^2\neq 0, \lambda\neq 0$ 为复常数, 则具有 Hadamard 主值的复线性高阶微分–积分方程

$$S_1\varphi:=a\varphi+\lambda a\frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}\varphi+bK\varphi+\lambda b\tilde{K}\varphi+L\varphi=f, \tag{1.17}$$

能转化为一等价的 Fredholm 型复线性高阶微分–积分方程, 并且其特征方程

$$S_2\varphi:=a\varphi+\lambda a\frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}\varphi+bK\varphi+\lambda b\tilde{K}\varphi=f, \tag{1.18}$$

当给出一组适当的边界条件时, 方程 (1.18) 在 L^* 中有唯一解. 这里 L 的核如 (1.16) 式所述, 算子 K 和 $\tilde{K}$ 如注 2 中所述.

2 一些引理

引理 2.1 设 $\partial D=\bigcup_{j=1}^N S_j$ 为逐块 $C^{(m+2)}$ 闭可定向流形 [11], $\zeta\in\partial D\cap S_I$ 为一广义角点 [5], $z\in D^\pm, T_\zeta$ 为以 $\zeta\in\partial D$ 为顶点的某一角形区域 $G_\zeta\cap D^\pm$ 内对所有的 $S_i, i\in I=\{i_1,i_2,\ldots,i_l\}$ (为$\{1,2,\ldots,\mathbb{N}\}$的有序子集) 在点 ζ 的非切线方向. 当 $z\in T_\zeta\cap D^\pm$ 分别趋于点 ζ 时, 我们可选择一适当的线性酉变换, 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{z\to\zeta^+}(-1)^{k-1}C_n\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}(\bar{\xi}_k-\bar{z}_k)|\xi-z|^{-2n}d\bar{\xi}_{[k]}\wedge d\xi=\begin{cases}1-\alpha(\zeta), & k=1,\\ 0, & 2\leqslant k\leqslant n.\end{cases} \tag{2.1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{z\to\zeta^-}(-1)^{k-1}C_n\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}(\bar{\xi}_k-\bar{z}_k)|\xi-z|^{-2n}d\bar{\xi}_{[k]}\wedge d\xi=\begin{cases}-\alpha(\zeta), & k=1,\\ 0, & 2\leqslant k\leqslant n.\end{cases} \tag{2.1$'$}$$

证明 首先我们证明 (2.1) 式的第二式. 为简单计, 仅证 $k=2$ 的情形, 其他情形同理可证. 设 $\zeta\in\partial D$ 为广义角点 [5], $I=\{i_1,\ldots,i_l\}$ 为 $\{1,\ldots,\mathbb{N}\}$ 的某一有序子集, 满足 $\zeta\in S_I,\zeta\notin S_{Ij}$, 若 $j\notin I$. 我们可选择一线性酉变换, 把 ζ 变为原点 O, 且 T_o 的单位复方向余弦 $\lambda(0)=(1,0,\ldots,0)$, 不妨先改变点 $\zeta,\xi,\partial D$ 等的记号, 现对 $\forall i\in I$, 记 $\sigma_\varepsilon^{(i)}(0,\xi)=S_i\cap\sigma_\varepsilon(0,\xi)\in C^{(m+2)}$, 其局部方程为 $\rho_i(\xi)=0$, 类似文献 [12] 引理 3.1 的证明, 我们能够选择一线性酉变换

$$\xi_k=\sum_{j=1}^{n}U_{jk}w_j,\quad 1<k\leqslant n,$$

使得 $\sigma_\varepsilon^{(i)}(0,\xi)$ 在 $\zeta=0$ 的切平面为 (这时 $\bar{n}_0^{(i)}//T_0$)

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial\bar{\xi}_j}\bar{\xi}_j+\frac{\partial\rho_i}{\partial\xi_j}\xi_j\right)=0,$$

并且酉方阵 U 满足

$$\sum_{j=1}^{n}U_{jk}\frac{\partial\rho_i}{\partial\xi_j}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & k=1,\\ 0, & 2\leqslant k\leqslant n.\end{cases}$$

它把 $\sigma_\varepsilon^{(i)}(0,\xi)$ 变为 $\sigma_\varepsilon^{*(i)}(0,w)$, 则 $\sigma_\varepsilon^{*(i)}(0,w)$ 在 $w=0$ 的切平面为 $\frac{1}{2}(w_1+\bar{w}_1)=0$, 设 w 的实坐标为 $u=(u_1,u_2,\dots,u_{2n}),w_k=u_k+iu_{n+k}$. 因此 $\sigma_\varepsilon^{*(i)}(0,w)$ 能表示为 $u_1=h(\bar{u}),\tilde{u}=(u_2,\dots,u_{2n})$, 由 $\sigma_\varepsilon^{*(i)}(0,w)$ 的光滑性, 推出 $h(0)=0,\frac{\partial h}{\partial u_k}|_{\tilde{u}=0}=0,2\leqslant k\leqslant 2n$, 设 $z=(-\varepsilon^2,0,\dots,0)\in T_0\cap D^+$, 利用球坐标变换

$$u_1=u_1,u_2=r\cos\theta_1,\dots,u_{2n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-3}\cos\theta_{2n-2},u_{2n}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-2},$$

$$0\leqslant\theta_k\leqslant\pi,\quad 2\leqslant k\leqslant 2n-3,\quad 0\leqslant\theta_{2n-2}<2\pi.$$

我们有 $u_1=h(\tilde{u})=\psi(r,\theta)=r^2\varphi_1(r,\theta),\frac{\partial h}{\partial u_k}=r\varphi_k(r,\theta),k=2,\dots,2n$. 由此可见, 除了 $r=0$ 外, $\varphi_1(r,\theta)$ 和 $\varphi_k(r,\theta)$ 分别为 $C^{(m+2)}$ 和 $C^{(m+1)}$ 的, 并且它们在 $r=0$ 连续. 因此, 我们可写

$$\sigma_\varepsilon^{*(i)}(0,w)=\{(r,\theta):0\leqslant r^2+\psi^2\leqslant\varepsilon^2,0\leqslant\theta_k<\pi,1\leqslant k\leqslant 2n-3,0\leqslant\theta_{2n-2}<2\pi\}.$$

由于

$$du_1\equiv\frac{\partial h}{\partial u_k}du_k \mod (du_2,\dots,[k],\dots,du_{2n}),\quad 2\leqslant k\leqslant 2n.$$

不妨仍记 w 为 ξ, $\sigma_\varepsilon^{*(i)}(0,w)$ 为 $\sigma_\varepsilon^{(i)}(0,\xi)$, 由此推出

$$d\bar{\xi}_{[2]}\wedge d\xi=(2i)^{n-1}i(\varphi_2(r,\theta)-i\varphi_{n+2}(r,\theta))r^{2n-1}\sin^{2n-3}\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-3}d\theta_1\cdots d\theta_{2n-2}dr.$$

令

$$g_2^{(i)}(r,\theta)=\int_{0\leqslant r^2+\psi^2\leqslant\varepsilon^2}r^{2n}(\varphi_2(r,\theta)-i\varphi_{n+2}(r,\theta))(r^2+\psi^2(r,\theta)+\varepsilon^4+2\varepsilon^2\psi(r,\theta))^{-n}dr,$$

$$\begin{aligned}V_0=-\frac{(n-1)!}{2\pi^n}\bigg[&\int_0^\pi\sin^{2n-3}\theta_1\cos\theta_1d\theta_1\int_0^\pi\sin^{2n-4}\theta_2d\theta_2\cdots\int_0^\pi\sin\theta_{2n-3}d\theta_{2n-3}\int_0^{2\pi}d\theta_{2n-2}\\&-i\int_0^\pi\sin^{2n-2}\theta_1d\theta_1\cdots\int_0^\pi\sin^{n-1}\theta_nd\theta_n\int_0^\pi\sin^{n-3}\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1}\cdots d\theta_{n+1}\\&\cdot\int_0^\pi\sin\theta_{2n-3}d\theta_{2n-3}\int_0^{2\pi}d\theta_{2n-2}\bigg],\end{aligned}$$

则

$$I_2^{(i)}=-C_n\int_{\sigma_\varepsilon^{(i)}(0,\xi)}(\bar{\xi}_2-\bar{z}_2)|\xi-z|^{-2n}d\bar{\xi}_{[2]}\wedge d\xi=V_0g_2^{(i)}(r,\theta).$$

现在估计 $I_2^{(i)}$, 令

$$\xi=(r^2+\psi^2)^{\frac{1}{2}},\quad \psi(r,\theta)=r^2\varphi_1(r,\theta)=\xi^2\tilde{\varphi}_1(\xi,\theta),$$
$$\frac{\partial h}{\partial u_{n+2}}=r\varphi_{n+2}(r,\theta)=\xi\tilde{\varphi}_{n+2}(\xi,\theta),$$

则 $\tilde{\varphi}_1(\xi,\theta)$ 和 $\tilde{\varphi}_{n+2}(\xi,\theta)$ 除了 $\xi=0$ 外, 分别为 $C^{(m+2)}$ 和 $C^{(m+1)}$, 因为

$$\frac{2\varepsilon^2\xi^2\tilde{\varphi}_1(\xi,\theta)}{\xi^2+\varepsilon^2}=O(\varepsilon^2),$$

对 $\xi\in[0,\varepsilon]$ 成立, 有

$$g_2^{(i)}(r,\theta)=\int_0^{\varepsilon}\xi^{2n}(1-\xi^2\tilde{\varphi}_1(\xi,\theta))^{n-\frac{1}{2}}(\tilde{\varphi}_2(\xi,\theta)-i\tilde{\varphi}_{n+2}(\xi,\theta))$$
$$\times\left(1-\xi\tilde{\varphi}_1(\xi,\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)(\xi^2+\varepsilon^4)^{-n}(1+O(\varepsilon^2))d\xi=O(\xi).$$

所以有

$$I_1^{(i)}=O(\varepsilon),\quad \forall\ i\in I.$$

类似地, 我们能证明 $I_k^{(i)}=O(\varepsilon), 3\leqslant k\leqslant n,\ i\in I$.

若记

$$I_k=(-1)^{k-1}C_n\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}(\bar{\xi}_k-\bar{z}_k)|\xi-z|^{-2n}d\bar{\xi}_{[k]}\wedge d\xi,\quad 2\leqslant k\leqslant n.$$

则

$$I_k=\sum_{i\in I}I_k^{(i)}=O(\varepsilon),\quad 2\leqslant k\leqslant n.$$

所以 (2.1) 式的第二式成立. 因为核 $K(z,\xi)$ 是酉线性变换不变量, 由文献 [5] 推出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{z\to\zeta^+}\int_{\sigma_\varepsilon(\delta,\xi)}K(z,\xi)=1-\alpha(\zeta),$$

由此及 (2.1) 式的第二式立得 (2.1) 式的第一式成立.

引理 2.2 在引理 2.1 的假设下, 我们可选择适当的线性酉变换, 使得

$$\lim_{z\to\zeta^+}\int_{\partial D_\xi}K_k(z,\xi)=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & 2\leqslant k\leqslant n,\end{cases}\tag{2.2}$$

$$\lim_{z\to\zeta^-}\int_{\partial D_\xi}K_k(z,\xi)=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n,\tag{2.3}$$

$$\mathrm{VP}\int_{\partial D_\xi}K_k(\zeta,\xi)=\begin{cases}\alpha(\zeta), & k=1,\\ 0, & 2\leqslant k\leqslant n,\ \zeta\in\partial D.\end{cases}\tag{2.4}$$

其中 $K_k(z,\xi)$ 是 B-M 核的第 k 个分量.

证明 首先证明 (2.2) 式. 类似引理 2.1 的证明, 我们能选择一线性酉变换, 使得 $\zeta=0,T_0$ 的单位复方向余弦 $\lambda(0)=(1,0,\dots,0), z=(-\varepsilon^2,0,\dots,0)\in T_0\cap D^+$, 易知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{z\to\zeta^+}\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)}K_k(z,\xi)=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & 2\leqslant k\leqslant n.\end{cases}\tag{2.5}$$

另一方面,

$$\lim_{z\to\zeta^+}\int_{\partial D}K_k(z,\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{z\to\zeta^+}\left(\alpha(\zeta)\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)}+\int_{\sigma_\varepsilon(\zeta,\xi)}\right)K_k(z,\xi),$$

由 (2.1) 和 (2.5) 两式立得 (2.2) 式.

注意到 $\int_{\partial D_\xi}K(z,\xi)=0, z\in D^-$, 由此及 $(2.1)'$ 式, 立得 (2.2) 式. 类似地, 我们可证 (2.4) 式成立.

引理 2.3 设 $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D),\xi,\zeta,\eta\in\partial D,1\leqslant m<+\infty,0<\alpha\leqslant 1$, 则有

$$\sum_{j=1}^n\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)=0, \tag{2.6}$$

其中 $K_j(\xi,\eta)$ 如 (0.2) 式所述:

$$L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)=\left(\frac{\partial}{\partial\eta_k}+\frac{\partial}{\partial\bar\eta_j}\right)^m\varphi(\eta,\zeta)|_{\eta=\zeta}.$$

证明 表示

$$K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta)=C_n\delta(j,k)(\bar\eta_k-\bar\xi_k)|\eta-\xi|^{-2n}d\bar\eta_{[j,k]}\wedge d\eta\wedge\bar\xi_j, \tag{2.7}$$

$$K_{0,1}(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^n\sum_{k\neq j}K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta),$$

其中 $d\bar\eta_{[j,k]}$ 表示 $d\bar\eta$ 中缺去因子 $d\bar\eta_j$ 和 $d\bar\eta_k,\delta(j,k)d\xi=d\xi_k\wedge d\xi_j\wedge d\xi_{[j,k]}$. 易知, $\bar\partial_\xi K(\xi,\eta)=-\bar\partial_\eta K_{0,1}(\xi,\eta)$, $\bar\partial_\xi K(\zeta,\xi)=0$. 进而有

$$\bar\partial_\xi K_j(\xi,\eta)=-\bar\partial_\eta K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta), \tag{2.8}$$

类似文献 [12] 中 (42) 式的证明, 应用 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n\int_{\partial(D_\xi-B_{\varepsilon_1}(\zeta)-B_{\varepsilon_2}(\eta))}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\\&=-\bar\partial_\eta\sum_{j=1}^n\sum_{k\neq j}\int_{D_\xi-B_{\varepsilon_1}(\zeta)-B_{\varepsilon_2}(\eta)}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi),\end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned}I_1&=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\sum_{j=1}^n\int_{\partial B_{\varepsilon_1}(\zeta)\cap D_\xi}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\\&=\alpha(\zeta)\lim_{\varepsilon_1\to 0}\sum_{j=1}^n\int_{\partial B\varepsilon_1(\zeta)}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\\&=\alpha(\zeta)\sum_{j=1}^nL_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\eta),\quad\zeta\neq\eta.\end{aligned} \tag{2.9}$$

类似文献 [12] 引理 2.1 证明中对积分 I_2 的计算, 有

$$\begin{aligned}I_2&=\lim_{\varepsilon_2\to 0}\sum_{j=1}^n\int_{\partial B_{\varepsilon_2}(\eta)\cap D_\xi}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\\&=-\frac{1}{n}\alpha(\eta)\sum_{j=1}^nL_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\eta),\quad\zeta\neq\eta,\end{aligned} \tag{2.10}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{VP}\int_{\partial D_\xi} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}(-\bar\partial_\eta)\int_{\partial D_\xi} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha(\zeta)-\frac{1}{n}\alpha(\eta)\right)L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\eta), \qquad (2.11)$$

进而

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\\&\quad=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}\int_{\partial D_\eta}\bar\partial_\eta\int_{\partial D_\xi} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\\&\qquad+\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial D_\eta}\left(\alpha(\zeta)-\frac{1}{n}\alpha(\eta)\right)L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\eta),\end{aligned} \qquad (2.12)$$

(2.12) 式右边第一项能表示为 (不妨取 $\varepsilon_1=2\varepsilon^{\frac12}\,(<\frac12)$, $\varepsilon_2=2\varepsilon^{\frac12}\,(<\frac12)$),

$$\begin{aligned}&-\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\sum_\varepsilon(\zeta,\eta)-\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta}+\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}\bar\partial_\eta\int_{\partial D_\xi} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\right)\\&\quad=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}\bar\partial_\eta\int_{D_\xi} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_{0,1}^{(j,k)}(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\right)\\&\quad=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta}\int_{D_\xi-B_{\varepsilon_1}(\zeta)-B_{\varepsilon_2}(\eta)}\left(\sum_{j=1}^{n}\bar\partial_\xi\Big(L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\Big)\right)\\&\quad=\sum_{j=1}^{n}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta}\left(\int_{\sum_{\varepsilon_1}\cap\sum_{\varepsilon_2}(\eta,\xi)}-\int_{\partial B_{\varepsilon_1}(\zeta)\cap D_\xi}-\int_{\partial B_{\varepsilon_2}(\eta)\cap D_\xi}\right)\\&\qquad\times L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi)\\&\quad=J_1-J_2-J_3.\end{aligned}$$

易知, 对所有 $\xi\in\sum_{\varepsilon_1}(\zeta,\xi)$ 和 $\eta\in\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta$, 一致地有 $|\xi-\eta|\geqslant\varepsilon^{\frac12}$, 则

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)\right|=O(\varepsilon^{\frac{2n-1}{2}}),$$

所以

$$J_1=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{j=1}^{n}\int_{\sum_{\varepsilon_1(\zeta,\xi)}\cap\sum_{\varepsilon_2(\eta,\xi)}}K(\zeta,\xi)\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K_j(\xi,\eta)=0,$$

由 (2.9) 和 (2.10) 两式, 推出

$$J_2=\lim_{\varepsilon\to0}\alpha(\zeta)\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)\cap D_\eta} L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\eta)=\alpha(\zeta)\int_{\partial D_\eta}\sum_{j=1}^{n}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\eta),$$

$$J_3=-\frac{1}{n}\int_{\partial D_\eta}\alpha(\eta)\sum_{j=1}^{n}L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\eta).$$

用 J_1, J_2, J_3 分别代入 (2.12) 式右边第一项, 即推出 (2.6) 式成立.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 设 ∂D 是一闭逐块 $C^{(m+2)}$ 光滑可定向流形, $\varphi \in C^{(m+\alpha)}(\partial D), 1 \leqslant m < +\infty, 0 < \alpha \leqslant 1, z \notin \partial D, \zeta, \xi \in \partial D$. $\lambda(\xi) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为点 $\xi \in \partial D$ 的单位复方向余弦. 易知 $(-1)^{k-1} d\bar{\xi} \wedge d\xi_{[k]} = \bar{\lambda}_k(\xi) dS_\xi, (-1)^{k-1}\lambda_j(\xi) d\bar{\xi}_j = (-1)^{n+j}\bar{\lambda}_k(\zeta) d\xi_k$, 于是在 ∂D_ζ 上,

$$d\xi_k \equiv d\bar{\xi}_j \mod (d\xi_1, \dots, [k], \dots, d\xi_n, d\bar{\xi}_1, \dots, [\bar{j}], \dots, d\bar{\xi}_n),$$

因此有

$$(-1)^{k-1} d\bar{\xi} \wedge d\xi_{[k]} = (-1)^{n+j} d\bar{\xi}_{[j]} \wedge d\xi, \tag{3.1}$$

令

$$(A_m\varphi)(z) := \int_{\partial D_\xi} \varphi(\xi)(\bar{\xi}_k - \bar{z}_k)^m |\xi - z|^{-2m} K(z, \xi), \tag{3.2}$$

$$(A_{m-\nu} L_k^\nu \varphi)(z) := \int_{\partial D_\xi} \sum_{j=1}^n L_k^\nu \varphi(\xi)(\bar{\xi}_k - \bar{z}_k)^{m-\nu} |\xi - z|^{-2(m-\nu)} K_j(z, \xi). \tag{3.3}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&C_n d\Bigg[\varphi(\xi)\Bigg(\sum_{l,j=1}^n - \sum_{l\neq k, j=1}^n\Bigg)(-1)^{l+j}(\bar{\xi}_l - \bar{z}_l)^{m-1}(\bar{\xi}_j - \bar{z}_j)|\xi - z|^{-2(n+m-1)} d\bar{\xi}_{[j]} \wedge d\xi_{[l]}\Bigg] \\
&= C_n \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_j}\right)\varphi(\xi)(\bar{\xi}_k - \bar{z}_k)^{m-1}(\bar{\xi}_j - \bar{z}_j)|\xi - z|^{-2(n+m-1)} d\bar{\xi}_{[j]} \wedge d\xi \\
&\quad -(n+m-1) C_n \varphi(\xi) \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j}(\bar{\xi}_k - \bar{z}_j)|\xi - z|^{-2(n+m)} d\bar{\xi}_{[j]} \wedge d\xi.
\end{aligned}$$

应用 Stokes 公式, 有

$$(A_m\varphi)(z) = \frac{1}{n+m-1}\int_{\partial D_\xi} \sum_{j=1}^n L_k \varphi(\xi)(\bar{\xi}_k - \bar{z}_k)^{-2(m-1)} K_j(z, \xi), \tag{3.4}$$

类似地, 同理可证

$$\begin{aligned}
(A_{m-1} L_k \varphi)(z) &= \frac{1}{n+m-2}(A_{m-2} L_k^2 \varphi)(z), \\
&\vdots \\
(A_1 L_k^{m-1}\varphi)(z) &= \frac{1}{n}(A_0 L_k^m \varphi)(z) = \frac{1}{n}\int_{\partial D} \sum_{j=1}^n L_k^m \varphi(\xi) K_j(z, \xi),
\end{aligned}$$

综上所述, 有

$$\frac{\partial^m \Phi(z)}{\partial z_k^m} = \prod_{\nu=1}^m (n+m-\nu)(A_m\varphi)(z) = (A_0 L_k^m \varphi)(z), \tag{3.5}$$

此即 (1.1) 式.

定理 1.2 的证明 首先证明 (1.2) 式. 由定理 1.1,

$$\Psi^+(\zeta)=\lim_{z\to\zeta^+}\int_{\partial D_\xi}\sum_{j=1}^{n}(L_k^m\varphi(\xi)-L_k^m\varphi(\zeta))K_j(z,\xi)+\sum_{j=1}^{n}\lim_{z\to\zeta^+}\int_{\partial D}L_k^m\varphi(\zeta)K_j(z,\xi),$$

应用 Lebersgue 定理和引理 2.2, 我们可选择适当的线性酉变换, 使得

$$\Psi^+(\zeta)=\int_{\partial D_\xi}\sum_{j=1}^{m}L_k^m\varphi(\xi)K_j(\zeta,\xi)+(1-\alpha(\zeta))L_k^m|_{j=1}\varphi(\zeta).$$

此即 (1.2) 式成立, 同理可证 (1.3) 式成立.

推论 1.4 的证明 设 $\varphi\in L^*(\bar{D})$, 由 (1.2) 和 (2.4) 式立得 (1.5) 和 (1.6) 式成立. 相反地, 若 $\varphi\in C^{(m+\alpha)}(\partial D)\cap C(\bar{D})$ 且 (1.6) 式成立, 由 (1.2) 式, 我们有

$$\Psi^+(\zeta)=\alpha(\zeta)L_k^m|_{j=1}\varphi(\zeta)+(1-\alpha(\zeta))L_k^m|_{j=1}\varphi(\zeta)=\frac{\partial^m}{\partial\zeta_k^m}\varphi(\zeta),\tag{3.6}$$

因此 $\varphi\in L^*(\bar{D})$.

定理 1.5 的证明 由 (0.10) 式, 对 $\varphi\in L^*(\bar{D})$, 易知 $L_k^m\varphi(\eta)=\frac{\partial^m\varphi(\eta)}{\partial\eta_k^m}\in L^*$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{FP}\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}\varphi(\eta)\frac{\partial^m}{\partial\xi_k^m}K(\xi,\eta)&=\mathrm{FP}\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}\frac{\partial^m\varphi(\eta)}{\partial\eta_k^m}K(\xi,\eta)\\&=\mathrm{VP}\int_{\partial D_\xi}\alpha(\xi)\frac{\partial^m\varphi(\xi)}{\partial\xi_k^m}K(\zeta,\xi).\end{aligned}$$

由于 $\alpha(\xi)$ 在 ∂D 上除去一个零测集 ($2n-2$ 维流形) 外的光滑部分上 $\alpha(\xi)=\frac{1}{2}$, 故上式等于

$$\mathrm{VP}\int_{\partial D_\xi}\frac{1}{2}\frac{\partial^m\varphi(\xi)}{\partial\xi_k^m}K(\zeta,\xi)=\frac{1}{2}\alpha(\zeta)\frac{\partial^m\varphi(\zeta)}{\partial\zeta_k^m}.$$

定理 1.6 的证明 应用定理 1.1 与 (0.2) 式和 (0.10) 式, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{FP}\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}\varphi(\eta,\xi)\frac{\partial^mK(\xi,\eta)}{\partial\xi_k^m}&=\mathrm{FP}\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}\sum_{j=1}^{n}L_{k_1}^m\varphi(\eta,\xi)K_j(\xi,\eta)\\&=\sum_{j=1}^{n}\bigg[\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}(L_{k_1}^m\varphi(\eta,\xi)-L_{k_1}^m\varphi(\xi,\xi))K_j(\xi,\eta)\\&\quad+\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}(L_{k_1}^m\varphi(\xi,\xi)-L_{k_1}^m(\zeta,\xi))K_j(\xi,\eta)\\&\quad+\int_{\partial_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}(L_{k_1}^m\varphi(\eta,\xi)-L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta))K_j(\xi,\eta)\\&\quad+L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta)\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta}K_j(\xi,\eta)\bigg].\end{aligned}\tag{3.7}$$

由文献 [12] 引理 2.7 知上式右边前三项积分能改变积分次序, 同时由引理 2.2 的 (2.4) 式, 我

们能选择适当的线性酉变换, 使得右边最后一项积分

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} L_{k_1}^m \varphi(\zeta,\zeta)\int_{\partial D_\xi} K(\zeta,\xi)\int_{\partial D_\eta} K_j(\xi,\eta)\\&\quad=\int_{\partial D_\xi}\alpha(\xi)L_{k_1}^m|_{j=1}\varphi(\zeta,\zeta)K(\zeta,\xi)\\&\quad=\frac{1}{2}L_{k_1}^m|_{j=1}\varphi(\zeta,\zeta)\int_{\partial D_\xi}K(\zeta,\xi)=\frac{1}{2}\alpha(\zeta)L_{k_1}^m|_{j=1}\varphi(\zeta,\zeta),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{FP}\int_{\partial D_\xi} K(\eta,\xi)\int_{\partial D_\eta}\varphi(\eta,\xi)\frac{\partial^m K(\xi,\eta)}{\partial \xi_k^m}\\&=\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi}(L_{k_1}^m\varphi(\eta,\xi)-L_{k_1}^m\varphi(\zeta,\zeta))K(\zeta,\xi)\wedge K_j(\xi,\eta)+\frac{1}{2}\alpha(\zeta)L_{k_1}^m|_{j=1}\varphi(\zeta,\zeta),\end{aligned}\tag{3.8}$$

由 (2.6) 式立得 (1.10) 式成立.

定理 1.7 的证明 由定理 1.1 的 (1.2) 和 (1.3) 式代入边值问题 (1.13) 立得方程 (1.14), 反之, 用跳跃公式 (1.4) 代入方程 (1.14) 立得边值问题 (1.13). 所以边值问题 (1.13) 与方程 (1.14) 等价. 由著名的 Holmgren 定理 [17] 可知, 方程 (1.14) 解存在, 并且, 当给出一组适当的 Cauchy 边值问题的边界条件即对应方程 (1.14) 的初始条件时, 此方程有唯一解 $\varphi\in C^{m+\alpha}(\partial D)$. 所以分别在 $D^{\pm}$ 上定义的以 φ 为密度函数的分片复调和函数 $\Phi(z)$ 的 m 阶偏导 $\Psi(z)$ 是满足条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的高阶边值问题 (1.13) 式的唯一解.

定理 1.8 的证明 首先, 对 $\varphi\in C^{m+\alpha}(\partial D)$, 我们定义积分算子 M 如下:

$$M\varphi := (a^2-b^2)^{-1}(aI-bK)\varphi,\tag{3.9}$$

易知算子 M 是 (1.15) 式的左正则化算子. 事实上, 用 M 从左侧作用于 (1.15) 式的双边, 则

$$\begin{aligned}MS\varphi\equiv(a^2-b^2)^{-1}\bigg[&a^2\varphi+abK\varphi+aL\varphi-bK(a\varphi)-bKbK\varphi-bKL\varphi\\&+\lambda a^2\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}L_k^m\varphi+\lambda ab\tilde{K}\varphi-\lambda bK\left(a\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}L_k^m\varphi\right)-\lambda bKb\tilde{K}\varphi\bigg].\end{aligned}\tag{3.10}$$

对 $-bKbK\varphi$ 应用 (0.7) 式, 我们有

$$-bKbK\varphi=-b^2\varphi-\frac{2b}{\alpha}\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi}b(\xi)\varphi(\eta)K(\zeta,\xi)\wedge K(\xi,\eta),$$

对 $-bKL\varphi$, 由文献 [12] 引理 2.7 知

$$-bKL\varphi=\frac{-b}{\alpha}\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi}\varphi(\eta)K(\zeta,\xi)\wedge L(\xi,\eta),$$

由 (1.10) 式, 我们有

$$-\lambda bKb\tilde{K}\varphi=-\lambda b^2\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_k}+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_1}\right)^m\varphi(\zeta)-\frac{2\lambda b}{\alpha}\int_{\partial D_\eta}\int_{\partial D_\xi}b(\xi)\sum_{j=1}^{n}L_k^m\varphi(\eta)K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi),$$

则 (1.15) 式能归结为

$$MS\varphi \equiv \varphi + \lambda a^2 \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} L_k^m \varphi - \lambda b^2 \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_k}\right)^m \varphi + N\varphi - \tilde{N} \sum_{j=1}^{n} L_k^m \varphi = g, \tag{3.11}$$

其中 $g = Mf$, 算子 N 的核

$$\begin{aligned} N(\zeta,\eta) = (a^2-b^2)^{-1} \Big\{ & a(\zeta)L(\zeta,\eta) - \frac{b(\zeta)}{\alpha(\zeta)}\big(a(\eta)-a(\zeta)\big)K(\zeta,\eta) \\ & - \frac{2b(\zeta)}{\alpha(\zeta)} \int_{\partial D_\xi} b(\xi)K(\zeta,\xi)\wedge K(\xi,\eta) - \frac{b(\zeta)}{\alpha(\zeta)} \int_{\partial D_\xi} L(\zeta,\xi)\wedge K(\xi,\eta) \Big\}. \end{aligned}$$

类似文献 [15](4.14) 式的估计, 我们有 (以下 $C_1 - C_4$ 均为正的常数)

$$|N(\zeta,\eta)| \leqslant C_1 |\eta-\zeta|^{-2n+1+\beta_0}, \quad 0<\beta_0<1, \tag{3.12}$$

算子 $\tilde{N}$ 的核

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\zeta,\eta) &= \frac{\lambda b(\zeta)}{\alpha(\zeta)}(a(\eta)-a(\zeta)) \sum_{j=1}^{n} L_k^m \varphi(\eta) K_j(\zeta,\eta) + \frac{2\lambda b(\zeta)}{\alpha(\zeta)} \sum_{j=1}^{n} L_k^m \varphi(\eta) \int_{\partial D_\xi} b(\xi) K_j(\xi,\eta)\wedge K(\zeta,\xi) \\ &= \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2. \end{aligned}$$

类似文献 [18] 引理 5 的证明, 有

$$|\tilde{N}_1| \leqslant C_2 |\eta-\zeta|^{-2n+1+\alpha}, 0<\alpha\leqslant 1, \tag{3.13}$$

$$|\tilde{N}_2| \leqslant C_3 |\eta-\zeta|^{-2n+1+\delta}, 0<\delta< 1, \tag{3.14}$$

则

$$|\tilde{N}(\zeta,\eta)| \leqslant C_4 |\eta-\zeta|^{-2n+1+\beta}, \quad \beta = \min(\alpha,\delta,\beta_0), \tag{3.15}$$

所以方程 (3.11) 是弱奇性的.

由于对 $\zeta \in \partial D$, 当 $\alpha,\beta>0$, 存在常数 $M_1>0$, 使得

$$\int_{\partial D_\xi} \frac{dS_\xi}{|\xi-\eta|^{2n-1-\alpha}|\xi-\zeta|^{2n-1-\beta}} \leqslant \begin{cases} M_1, & \alpha+\beta>2n-1, \\ M_1 \log^{|\eta-\zeta|}, & \alpha+\beta=2n-1, \\ M_1|\eta-\zeta|^{-2n+1+(\alpha+\beta)}, & \alpha+\beta<2n-1. \end{cases} \tag{3.16}$$

于是对 $N(\zeta,\eta)$ 的 p 重叠核 $N^{(p)}(\zeta,\eta)$, 显然有

$$|N^{(p)}(\zeta,\eta)| \leqslant M_p |\eta-\zeta|^{-2n+1+p\beta}, \tag{3.17}$$

其中 $M_p>0$ 为常数, 当 p 满足 $2n-1-p\beta\leqslant 0$ 时, 则所有的 $N^{(p)}(\zeta,\eta)$ 都是有界函数, 同理对 $\tilde{N}(\zeta,\eta)$ 的 p 重叠核, 当 p 满足 $2n-1-p\delta\leqslant 0$ 时, 亦对所有的 $\tilde{N}^{(p)}(\zeta,\eta)$ 都是有界函数. 于是, 只要取 $p\geqslant[\frac{2n-1}{\beta}]+1$, 则方程 (3.11) 是 Fredholm 型复线性高阶微分-积分方程.

定理 1.9 的证明 在定理假设条件下, 易知 (3.9) 式定义的算子 M 是方程 (1.7) 的左正则化算子, 并且 M 存在逆算子 M^* 如下:

事实上, 应用 (1.8) 和 (1.9) 式, 我们有

$$M^*\varphi := (aI + bK)\varphi, \quad MS_1\varphi \equiv \varphi + \lambda\frac{\partial^m\varphi}{\partial\zeta_k^m} + ML\varphi = g, \quad g = Mf, \tag{3.18}$$

因为 $ML\varphi = LM\varphi$ 是弱奇性积分, 所以 (3.18) 式是 Fredholm 型高阶复线性微积分方程. 反之, 若用 M^* 作用于 (3.18) 式的双边, 立得方程 (1.17). 因此方程 (3.18) 与方程 (1.17) 等价. 同样, 若用算子 M 作用于特征方程 (1.18) 的双边, 有

$$MS_2\varphi \equiv \varphi + \lambda\frac{\partial^m\varphi}{\partial\zeta_k^m} = g, \quad g = Mf. \tag{3.19}$$

由 Holmgren 定理 [17] 知常系数复高阶微分方程 (3.19) 解存在, 并且当给出一组适当的初始条件时, 方程 (3.19) 在 L^* 中存在唯一解.

参考文献

1 陆启铿, 钟同德. Privalov 定理的拓广. 数学学报, **7**: 144–165 (1957)

2 Gong S. Integrals of Cauchy-type on the Ball. Boston: International Press, 1993

3 Kytmanov A M. Bochner-Martinelli Integral and its Applications. Siberia: Science Press, 1992

4 Dzhuraev A. On Riemann-Hilbert boundary problem in several complex variables. *Complex Variables J*, **29**: 287–303 (1996)

5 林良裕. 闭逐块光滑流形上的哥西型积分的边界性质. 数学学报, **31**: 547–557 (1988)

6 Range R M, Siu Y T. Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries. *Math Ann,* **206**: 315–354 (1973)

7 林良裕, 邱春晖. 闭逐块光滑流形上奇异积分的 Poincaré-Bertrand 公式. 数学学报, **45**: 759–772 (2002)

8 Lin L Y, Qiu C H. The Cauchy boundary value problems on a closed piecewise smooth manifold in $\mathbb{C}^n$. *Acta Mathmatica Sinica, English Series*, **20**(6): 989–998 (2004)

9 Qiu C H, Zhong T D. The koppelman-leray formula on complex finsler manifolds. *Sci China Ser A*, **48**(6): 647–863 (2005)

10 黄玉笙, 林良裕. 闭光滑流形上的高阶线性微 - 积分方程. 数学学报, **47**: 703–710 (2004)

11 Huang Y S, Qiu C H, Lin L Y. The higher order linear differential-integral equations on a closed piecewise smooth manifold. The Proceedings of the China Association for Science and Technology, Feng C, Huang P ed. Urumchi: Science Press, 2005, 3–12

12 Lin L Y, Qiu C H. The singular integral equation on a closed piecewise smooth mamifold in $\mathbb{C}^n$. *Integr Equ Oper Theory,* **44**: 337–358 (2002)

13 Huang Y S. The Riemann boundary value problem in several complex variables. *Journal of Lanzhou University*, **42**(3): 111–114 (2006)

14 Lin L Y, Qiu C H, Huang Y S. The Plemalj formula of higher order partial derivatives of the Bochner-Martinelli integral. *Integr Equ Oper Theory,* **53**: 61–73 (2005)

15 Zhong T D, Chen L P. The Poincaré-Bertrand formula for the Bochner-Martinelli integral. *Integr Equ Oper Theory,* **54**: 585–595 (2006)

16 Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equation. New York: Courier Dover Publications, 1952

17 Pidrovsky E G. Lecture of Partial Differential Equations. Moccow: Mathmatical Physics Literature National Press, 1961

18 Sun J G. Singular integral equations on a closed smooth manifold. *Acta Math Sinica,* **22**: 675–692 (1979)